新世纪
详解版

高中数学
奥林匹克竞赛
全真试题

■ 权威资料
■ 方法技巧
■ 金牌思路

全国联赛卷

总主编 蓝 润
本册主编 南秀全

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克竞赛全真试题. 全国联赛卷/蓝涧主编;南秀全编. —2 版.—武汉:湖北教育出版社,2007.1
ISBN 978-7-5351-3976-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①蓝… ②南… Ⅲ. 数学课-高中-习题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 015379 号

出版 发行:湖北教育出版社 网址:http://www.hbedup.com	武汉市青年路 277 号 邮编:430015 电话: 027-83619605 邮购电话:027-83669149
经 销:新 华 书 店	
印 刷:通山县九宫印务有限公司	(437600·通山县通羊镇南市路 165 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32	12 印张
版 次:2007 年 2 月第 2 版	2007 年 2 月第 1 次印刷
字 数:278 千字	印数:1-8 000
ISBN 978-7-5351-3976-4	定价:17.00 元

前　言

数理化奥林匹克竞赛是覆盖面最广的一种群众性竞赛活动，几乎覆盖了全国各地每一所学校。各级各类的竞赛活动旨在拓宽学生的知识视野，激发学生的学习兴趣，培养学生的思维品质、动手能力，发展学生的个性特长。同时，竞赛活动对促进教师自身素质的提高，促进教学改革的深入开展和教学质量的提高，也起到了积极的作用。

然而竞赛试题内容广博，命题新颖，思路开阔，对学生的综合素质和创新要求较高。但当我们的父母看到孩子做不出训练题目想帮一把却又感到无助之时，总感叹自己手中没有一本好书，不是太难，就是太易，或是太偏，或是缺少系统性，而面对太多的竞赛资料又总觉得有些茫然。我们的许多教师也为竞赛书太多太滥大伤脑筋，为竞赛缺少一个既有系统性而又不超竞赛大纲的书而犯愁。为此我们广泛收集，将近几年的小学、初中、高中的全国部分省市的数理化竞赛试题进行精选，将全国数理化竞赛试题进行汇总，并吸收部分国际竞赛的典型试题，汇编成这套丛书。书中通过对试卷的全面分析和研究，对每道赛题都逐一进行了详细的解析，力求通俗易懂，化难为易，既便于学生自学，又便于家长和教师参考。本套丛书力求体现以下特点：

1. 导向性。全面反映了近几年中、小学数理化竞赛的题型，及所考查的知识点和解题方法，从而可以看出未来竞赛命题的走向和原则。

2. 新颖性。所选内容均是经过我们筛选的近几年的国际国内竞赛试题，不仅内容新，题型新，而且具有广泛的代表性。用后

一定会感到内容新鲜，题目新颖，精彩有趣。

3. 精巧性。因为许多试题虽有一定难度，但难而不怪；灵活性强，高而可攀。当然，解答时具备较强的分析推理能力和灵活运用知识的能力。我们在解析时，注意做到语句通俗、简明，思路清晰、简捷。有的还配有图表说明，便于学生理解。对于一题多解，限于篇幅，一般只采用一、两种最简便巧妙的方法。这对拓展学生思路，启迪思维，发展智力，将有很大帮助。

4. 实用性。本丛书中前半部分是试题，并留有解答的空间，后半部分是解析。可供学生在赛前进行检测，检测后再对照答案掌握和理解解题方法。这样既便于学生用，也便于家长和教师参考。

5. 权威性。本丛书是由在国际奥赛中屡夺金牌的黄冈的特、高级教师和国家级奥林匹克优秀教练员编写。

参加本书编写的有：石涧、吴远伦、秦必耕、吕伦兵、余林、魏友成、余光、付峰、姜文清、肖九河、王飞、肖珂、沈立新、肖一鸣、杨仕春、杜江、陈正、段文敏、胡海波、吕中浩、段文涛、南山、杨世俊、徐胜登、刘晓明。

此次修订更新了部分试题，由于时间仓促和水平有限，编写中难免出现错误或不当之处，敬请广大读者提出宝贵意见。希望本套丛书铺就您的金牌之路。

编　者

2006 年 12 月

目录

目录

2001年全国高中数学联合竞赛试题

一、选择题(满分36分,每小题6分)

1. 已知 a 为给定的实数,那么集合 $M=\{x \mid x^2-3x-a^2+2=0, x\in \mathbf{R}\}$ 的子集的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 不确定

2. 命题1:长方体中,必存在到各顶点距离相等的点;

命题2:长方体中,必存在到各棱距离相等的点;

命题3:长方体中,必存在到各面距离相等的点.

以上三个命题中,正确的有(　　).

(A) 0个　　(B) 1个　　(C) 2个　　(D) 3个

3. 在四个函数 $y=\sin|x|$, $y=\cos|x|$, $y=|\cot x|$, $y=\lg|\sin x|$ 中,以 π 为周期,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的偶函数是(　　).

(A) $y=\sin|x|$　　(B) $y=\cos|x|$

(C) $y=|\cot x|$　　(D) $y=\lg|\sin x|$

4. 如果满足 $\angle ABC=60^\circ$, $AC=12$, $BC=k$ 的 $\triangle ABC$ 恰有一个,那么 k 的取值范围是(　　).

(A) $k=8\sqrt{3}$　　(B) $0<k<12$

(C) $k\geqslant 12$　　(D) $0<k\leqslant 12$ 或 $k=8\sqrt{3}$

5. 若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$,则 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 的值为(　　).

(A) 3^{333}　　(B) 3^{666}　　(C) 3^{999}　　(D) 3^{2001}

6. 已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24元,而4枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和小于22元,则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较结果是(　　).

(A) 2枝玫瑰价格高　　(B) 3枝康乃馨价格高

(C) 价格相同　　(D) 不确定

二、填空题(满分 54 分,每小题 9 分)

7. 椭圆 $\rho=\dfrac{1}{2-\cos\theta}$ 的短轴长等于______.

8. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2, |z_2|=3, 3z_1-2z_2=\dfrac{3}{2}-i$,则 $z_1\cdot z_2$ =______.

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,则直线 A_1C_1 与 BD_1 的距离是______.

10. 不等式 $\left|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}+2\right|>\dfrac{3}{2}$ 的解集为______.

11. 函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为______.

12. 在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物,如图 1,要求同一块中种同一植物,相邻的两块种不同的植物.现有 4 种不同的植物可供选择,则有______种栽种方案.

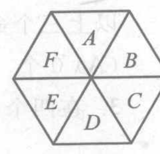


图 1

三、解答题(满分 60 分,每小题 20 分)

13. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列,$\{b_n\}$ 为等比数列,且 $b_1=a_1^2, b_2=a_2^2, b_3=a_3^2\,(a_1<a_2)$,又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$.试求 $\{a_n\}$ 的首项与公差.

14. 设曲线 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$($a$ 为正常数)与 $C_2: y^2=2(x+m)$ 在 x 轴上方仅有一个公共点 P.

(1) 求实数 m 的取值范围(用 a 表示);

(2) O 为原点,若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A,当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时,试求 $\triangle OAP$ 的面积的最大值(用 a 表示).

15. 用电阻值分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ $(a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6)$ 的电阻组装成一个如图 2 所示的组件.在组装中应如何选取电阻,才能使该组件总电阻值最小?证明你

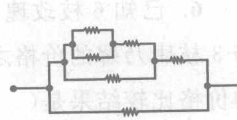


图 2

的结论.

加　试

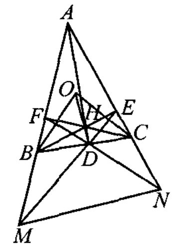


图 3

一、(50 分)如图 3 所示,$\triangle ABC$ 中,O 为外心,三条高 AD、BE、CF 交于点 H,直线 ED 和 AB 交于点 M,FD 和 AC 交于点 N,求证:

(1) $OB\perp DF$,$OC\perp DE$;

(2) $OH\perp MN$.

二、(50 分) 设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j=1$. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值.

三、(50 分) 将边长为正整数 m,n 的矩形划分成若干边长均为正整数的正方形,每个正方形的边均平行于矩形的相应边.试求这些正方形边长之和的最小值.

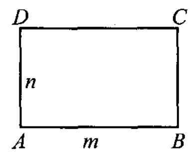


图 4

2002 年全国高中数学联合竞赛试题

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间是(　　).

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(-\infty,1)$

(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(3,+\infty)$

2. 若实数 x,y 满足 $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$,则 x^2+y^2 的最小值为(　　).

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{2}$

3. 函数 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$(　　).

(A) 是偶函数但不是奇函数　　(B) 是奇函数但不是偶函数

(C) 既是偶函数又是奇函数　　(D) 既不是偶函数也不是奇函数

4. 直线$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$相交于$A$、$B$两点，该椭圆上点$P$，使得$\triangle PAB$面积等于3. 这样的点$P$共有(　　).

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

5. 已知两个实数集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$与$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{50}\}$，若从$A$到$B$的映射$f$使得$B$中每个元素都有原象，且$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射共有(　　).

(A) C_{100}^{50}　　(B) C_{99}^{50}　　(C) C_{100}^{49}　　(D) C_{99}^{49}

6. 由曲线$x^2=4y$，$x^2=-4y$，$x=4$，$x=-4$围成的图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为V_1；满足$x^2+y^2\leqslant 16$，$x^2+(y-2)^2\geqslant 4$，$x^2+(y+2)^2\geqslant 4$的点(x,y)组成的图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为V_2，则(　　).

(A) $V_1=\frac{1}{2}V_2$　　(B) $V_1=\frac{2}{3}V_2$

(C) $V_1=V_2$　　(D) $V_1=2V_2$

二、填空题(本题满分54分，每小题9分)

7. 已知复数Z_1、Z_2满足$|Z_1|=2$，$|Z_2|=3$. 若它们所对应向量的夹角为$60°$，则$\left|\frac{Z_1+Z_2}{Z_1-Z_2}\right|=$______.

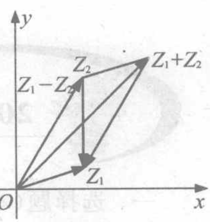


图1

8. 将二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$的展开式按$x$的降幂排列，若前三项系数成等差数列，则该展开式中$x$的幂指数是整数的项共有______个.

9. 如图2所示，点P_1、P_2、$\cdots$、P_{10}分别是四面体顶点或棱的中点，那么在同一平面上的四点组$(P_1,P_i,P_j,P_k)$$(1<i<j<k\leqslant 10)$有______个.

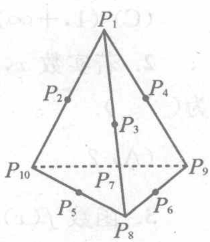


图2

10. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，

$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$. 若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2002)=$______.

11. 若 $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，则 $|x|-|y|$ 的最小值是______.

12. 使不等式 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是______.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 已知点 $A(0,2)$ 和抛物线 $y^2=x+4$ 上两点 B、C，使得 $AB\perp BC$，求点 C 的纵坐标的取值范围.

14. 如图 3 所示，有一列曲线 P_0、P_1、P_2、…，已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形，P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉（$k=0,1,2,\cdots$）. 设 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

（1）求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

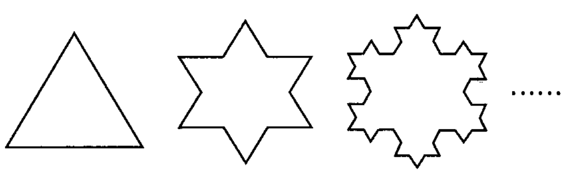


图 3

15. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a,b,c\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$）满足条件：

（ⅰ）$x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$；

（ⅱ）当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$；

（ⅲ）$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 m（$m>1$），使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有

$f(x+1)\leqslant x$.

加　试

一、(本题满分 50 分) 如图 4 所示,在$\triangle ABC$中,$\angle A=60^\circ$,$AB>AC$,点 O 是外心. 两条高 BE、CF 交于 H 点. 点 M、N 分别在线段 BH、HF 上,且满足 $BM=CN$. 求$\dfrac{MH+NH}{OH}$的值.

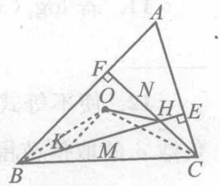


图 4

二、(本题满分 50 分) 实数 a,b,c 和正数 λ,使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实数 x_1,x_2,x_3,且满足:

(ⅰ) $x_2-x_1=\lambda$;

(ⅱ) $x_3>\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$.

求$\dfrac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$的最大值.

三、(本题满分 50 分) 在世界杯足球赛前,F 国教练为了考察 A_1、A_2、…、A_7 这七名队员,准备让他们在三场训练比赛(每场 90 分钟)都上场. 假设在比赛的任何时刻,这些队员中有且仅有一个在场上,并且 A_1、A_2、A、A_3、A_4 每人上场的总时间(以分钟为单位)均被 7 整除,A_5、A_6、A_7 每人上场的总时间(以分钟为单位)均被 13 整除. 如果每场换人次数不限,那么按每名队员上场的总时间计算,共有多少种不同的情况.

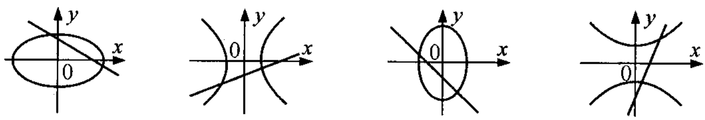
2003 年全国高中数学联合竞赛试题

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 删去正整数数列 1,2,3,…中的所有完全平方数,得到一个新数列. 这个新数列的第 2003 项是(　　).

(A) 2046　　(B) 2047　　(C) 2048　　(D) 2049

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,$ab\neq0$,那么,直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是(　　).



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

3. 过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 $60°$ 的直线.若此直线与抛物线交于 A,B 两点,弦 AB 的中垂线与 x 轴交于 P 点,则线段 PF 的长等于(　　).

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

4. 若 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right]$,则 $y=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值是(　　).

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

5. 已知 x,y 都在区间 $(-2,2)$ 内,且 $xy=-1$,则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是(　　).

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

6. 在四面体 $ABCD$ 中,设 $AB=1$,$CD=\sqrt{3}$,直线 AB 与 CD 的距离为 2,夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则四面体 $ABCD$ 的体积等于(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、填空题(本题满分 54 分,每小题 9 分)

7. 不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是______.

8. 设 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点,P 是椭圆上的点,且

$|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则$\triangle PF_1F_2$的面积等于______.

9. 已知$A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$. 若$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是______.

10. 已知a,b,c,d均为正整数，且$\log_a b=\dfrac{3}{2}$，$\log_c d=\dfrac{5}{4}$，若$a-c=9$，则$b-d=$______.

11. 将八个半径都为1的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于______.

12. 设$M_n=\{$(十进制)n位纯小数$0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\mid a_i$只取0或1$(i=1,2,\cdots,n-1)$，$a_n=1\}$，$T_n$是$M_n$中元素的个数，$S_n$是$M_n$中所有元素的和，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=$______.

三、解答题（本题满分60分，每小题20分）

13. 设$\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$，证明不等式

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

14. 设A,B,C分别是复数$Z_0=ai$，$Z_1=\dfrac{1}{2}+bi$，$Z_2=1+ci$（其中a,b,c都是实数）对应的不共线的三点. 证明：曲线$Z=Z_0\cos^4 t+2Z_1\cos^2 t\sin^2 t+Z_2\sin^4 t\,(t\in\mathbf{R})$与$\triangle ABC$中平行于$AC$的中位线只有一个公共点，并求出此点.

15. 一张纸上画有半径为R的圆O和圆内一定点A，且$OA=a$，折叠纸片，使圆周上某一点A'刚好与A点重合. 这样的每一种折法，都留下一条直线折痕. 当A'取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

加　试

一、（本题满分50分）过圆外一点P作圆的两条切线和一条割线，切点为A,B. 所作割线交圆于C,D两点，C在P,D之间. 在弦CD上取

一点 Q，使$\angle DAQ=\angle PBC$.

求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.

二、(本题满分 50 分) 设三角形的三边长分别是整数 l,m,n，且 $l>m>n$. 已知 $\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$，其中 $\{x\}=x-[x]$，而$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 求这种三角形周长的最小值.

三、(本题满分 50 分) 由 n 个点和这些点之间的 l 条连线段组成一个空间图形，其中 $n=q^2+q+1$，$l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1$，$q\geqslant 2$，$q\in\mathbf{N}$. 已知此图中任四点不共面，每点至少有一条连线段，存在一点至少有 $q+2$ 条连线段. 证明：图中必存在一个空间四边形(即由四点 A,B,C,D 和四条连线段 AB,BC,CD,DA 组成的图形).

2004 年全国高中数学联合竞赛试题

一、选择题(本题满分 36 分，每小题 6 分)

1. 设锐角 θ 使关于 x 的方程 $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ 有重根，则 θ 的弧度数为(　　).

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$

(C) $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{12}$　　(D) $\frac{\pi}{12}$

2. 已知 $M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$. 若对于所有 $m\in\mathbf{R}$，均有 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是(　　).

(A) $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$　　(B) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(C) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　(D) $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

3. 不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集为(　　).

(A) $[2,3)$　　(B) $(2,3]$

(C) $[2,4)$　　　　　　　(D) $(2,4]$

4. 如图 1，设点 O 在 $\triangle ABC$ 内部，且有 $OA+2OB+3OC=0$. 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积的比为(　　).

(A) 2　　　　　　　(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) 3　　　　　　　(D) $\dfrac{5}{3}$

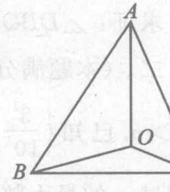


图 1

5. 设三位数 $n=\overline{abc}$. 若以 a,b,c 为三条边的长可以构成一个等腰(含等边)三角形，则这样的三位数 n 有(　　)个.

(A) 45　(B) 81　(C) 165　(D) 216

6. 如图 2，顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆的圆心，$AB\perp OB$，垂足为 B，$OH\perp PB$，垂足为 H，且 $PA=4$，C 为 PA 的中点. 当三棱锥 O-HPC 的体积最大时，OB 的长为(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　　　　　　(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　　　　(D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

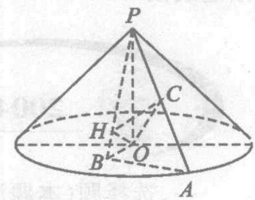


图 2

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x)=a\sin ax+\cos ax\,(a>0)$ 在一个最小正周期长的区间上的图象与函数 $g(x)=\sqrt{a^2+1}$ 的图象所围成的封闭图形的面积是________.

8. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$. 则 $f(x)=$________.

9. 如图 3，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 A-BD_1-A_1 的度数是________.

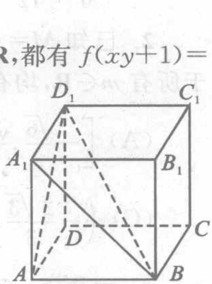


图 3

10. 设 p 是给定的奇质数. 若正整数 k 使得 $\sqrt{k^2-pk}$ 也是一个正整数，则 $k=$________.

11. 数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，满足关系式$(3-$

$a_{n+1})(6+a_n)=18$,且 $a_0=3$. 则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=$________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中,给定两点 $M(-1,2)$ 和 $N(1,4)$,点 P 在 x 轴上移动. 当 $\angle MPN$ 取最大值时,点 P 的横坐标为________.

三、解答题(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13. 一项"过关游戏"规则规定:在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次,如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 2^n,则算过关. 问:

(1) 某人在这项游戏中最多能过几关?

(2) 他连过前三关的概率是多少?

(注:骰子是一个在各面上分别有 1,2,3,4,5,6 点数的均匀正方体. 抛掷骰子落地静止后,向上一面的点数为出现点数.)

14. 在平面直角坐标系 xOy 中,给定三点 $A\left(0,\frac{4}{3}\right)$,$B(-1,0)$,$C(1,0)$. 点 P 到直线 BC 的距离是该点到直线 AB,AC 距离的等比中项.

(1) 求点 P 的轨迹方程.

(2) 若直线 l 经过 $\triangle ABC$ 的内心(设为 D),且与点 P 的轨迹恰好有 3 个公共点,求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

15. 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根,函数 $f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$ 定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) 求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$.

(2) 证明:对于 $u_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(i=1,2,3)$,若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$,则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

加　试

一、(本题满分 50 分) 如图 4,在锐角 $\triangle ABC$ 中,AB 上的高 CE 与 AC 上的高 BD 相交于点 H,以 DE 为直径的圆分别交 AB,AC 于 F,G 两点,FG 与 AH 相交于点 K. 已知 $BC=25$,$BD=20$,$BE=7$. 求 AK 的长.

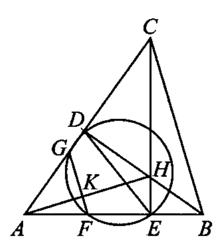


图 4

二、(本题满分 50 分) 在平面直角坐标系 xOy 中,y 轴正半轴上的