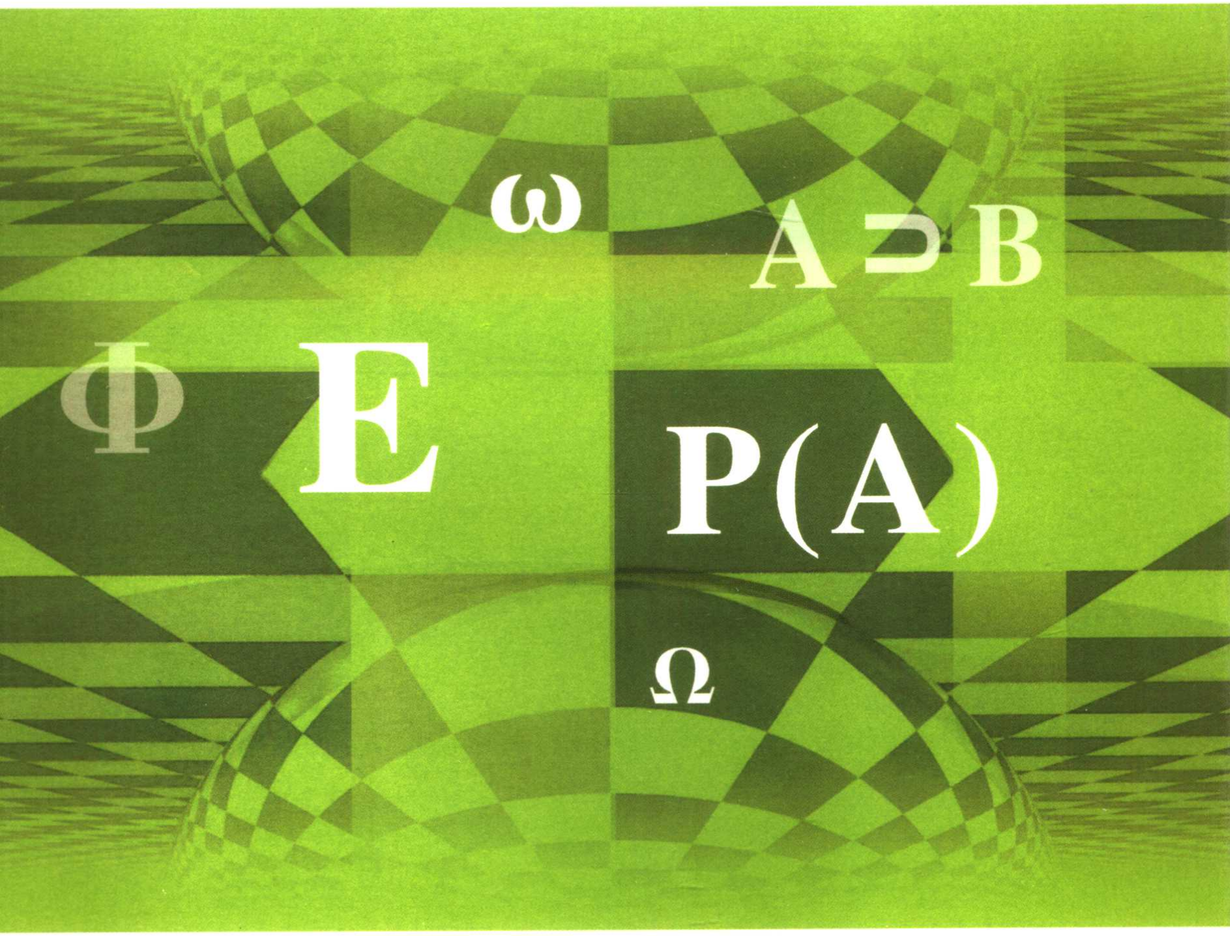
21世纪高等学校经济数学教材

# 概率论与数理统计

◆ 车荣强 主编
◆ 何其祥 主审




复旦大学出版社

# 概率论与数理统计

21 世纪高等学校经济数学教材

# 概率论与数理统计

主编　车荣强
主审　何其祥

復旦大學出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/车荣强主编. —上海:复旦大学出版社,2007.1
21 世纪高等学校经济数学教材
ISBN 978-7-309-05279-4

Ⅰ. 概… Ⅱ. 车… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 143743 号

**概率论与数理统计**
**车荣强 主编**

---

**出版发行** 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@ fudanpress. com http://www. fudanpress. com

---

**责任编辑** 范仁梅
**总 编 辑** 高若海
**出 品 人** 贺圣遂

---

**印　　刷** 江苏大丰市科星印刷有限责任公司
**开　　本** 787 × 960 1/16
**印　　张** 16.5
**字　　数** 296 千
**版　　次** 2007 年 1 月第一版第一次印刷
**印　　数** 1—5 100

---

**书　　号** ISBN 978-7-309-05279-4/O · 385
**定　　价** 25.00 元

---

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

# 内 容 提 要

本书由上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写，系“21 世纪高等学校经济数学教材”系列之一.

全书共分 9 章：随机事件与概率，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，统计量及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析. 本书科学、系统地介绍了概率论与数理统计的基本内容，重点介绍了概率论与数理统计的方法及其在经济管理中的应用，每章均配有习题，书末附有习题的参考答案.

本书可作为高等经济管理类院校的数学基础课程教材，同时也适合财经类高等教育自学考试、各类函授大学、夜大学使用，也可作为财经管理人员的学习参考书.

# 21世纪高等学校经济数学教材
# 编 委 会

# 前言

为适应我国高等教育的飞速发展和数学在各学科中更广泛的应用，根据高等教育面向21世纪发展的要求，上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写了“21世纪高等学校经济数学教材”——《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》.

针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，在这套系列教材的编写过程中，我们注重了以下几方面的问题：

1. 适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，着眼于培养“厚基础，宽口径，高素质”的财经人才，注重加强基础课程，特别是数学基础课程.

2. 作为高等经济管理类院校数学基础课程的教材，在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时，力求深入浅出，通俗易懂，突出有关理论、方法的应用和简单经济数学模型的介绍.

3. 注意培养学生的学习兴趣，扩大学生的视野，使学生了解概率论与数理统计创立发展的背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后附有数学家简介，介绍在概率论与数理统计创立发展过程中作出过伟大贡献的著名数学家.

4. 注意兼顾经济管理学科各专业学生，既能较好地掌握所学知识，又能满足后继课程及学生继续深造的需要. 为此，将概率论习题分为两部分，习题(A)为基础题，习题(B)为提高题.

参加《概率论与数理统计》一书编写的有上海财经大学应用数学系何萍副教授(第一、第三章)及张晓梅副教授(第二、第四章)，上海金融学院应用数学系车荣强副教授(第五、第六、第七章)，上海商学院基础教学部姚力民老师(第八、第九章)，最后由车荣强副教授对全书进行了统稿.

在本教材编写过程中，我们得到了上海财经大学、上海金融学院、上海商学院的重视和支持，并得到了复旦大学出版社的鼎力相助，特别是范仁梅老师的认真负责，在此一并致谢.

限于学识与水平，本书的缺点与错误在所难免，恳请专家和读者批评指正.

**编者**

2007年1月

# 目 录

# 第一章 随机事件与概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科.

随机事件与概率是概率论与数理统计中最基本的概念,本章将介绍随机事件、概率的概念和性质,给出在不同条件下随机事件的概率计算公式,并对相互独立的随机事件进行专门讨论.

## §1.1 随机试验与样本空间

先来看看概率的直观背景,体会应该怎样来建立概率论的理论体系.

概率是在随机试验的基础上讨论的,我们把对某个感兴趣对象的观察过程称为试验,若事先无法预知将要出现的结果,称这样的试验为**随机试验**,通常用 $E$ 表示. 通常要求随机试验在相同的条件下可以重复进行.

虽然我们不能预知什么结果会出现,但随机试验的所有可能出现的结果应该是已知的. 研究任何一个随机试验,首要任务就是要弄清楚该试验的所有可能发生的结果,而这每一个可能的结果被称为随机试验 $E$ 的**样本点**或**基本事件**,记为 $\omega$. 样本点全体所构成的集合称为**样本空间**,通常用 $\Omega$ 表示. $\Omega$ 可以是有限集,也可以是无限集.

应该指出,这里所说的可能出现的结果将依赖于人们所关心的问题与所使用的解决问题的方法. 因此样本空间的选择不是唯一的.

**例 1** (1) 掷一枚硬币有两个可能结果:正面朝上或反面朝上. 我们不妨分别用 $T$ 表示正面朝上、$H$ 表示反面朝上,那么样本空间是

$$\Omega=\{T, H\}.$$

(2) 掷两枚硬币的样本空间又是什么呢?

第一种情形:如果使用的是有区别的两枚硬币,那么样本空间是

$$\Omega=\{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\},$$

其中第一个字母表示一枚硬币的结果,第二个字母表示另一枚硬币的结果.

第二种情形:如果不能或者不区别它们,那么样本空间是

$$\Omega=\{(T,\ T),\ (T,\ H),\ (H,\ H)\},$$

以上两个样本空间都正确.问题不在于硬币在物理上是否可区分,而在于是否要区分它们.

(3) 掷两颗骰子,若它们是可以区别的,应该有 36 种结果 (见表 1.1),样本空间为

$$\Omega=\{(i,\ j)\mid i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}.$$

**表 1.1**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1, 1) | (2, 1) | (3, 1) | (4, 1) | (5, 1) | (6, 1) | (1, 2) | (2, 2) | (3, 2) | (4, 2) | (5, 2) | (6, 2) |
| (1, 3) | (2, 3) | (3, 3) | (4, 3) | (5, 3) | (6, 3) | (1, 4) | (2, 4) | (3, 4) | (4, 4) | (5, 4) | (6, 4) |
| (1, 5) | (2, 5) | (3, 5) | (4, 5) | (5, 5) | (6, 5) | (1, 6) | (2, 6) | (3, 6) | (4, 6) | (5, 6) | (6, 6) |

若无法区别它们或者不区别它们,则仅有 21 种结果,此时的样本空间为

$$\Omega=\{(i,\ j)\mid i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6;\ i\leqslant j\}.$$

如果只关心点数之和,那么只有 11 种可能的结果,此时的样本空间为

$$\Omega=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12\}.$$

**例 2** 掷一枚硬币直到正面出现时停止,观察已经出现的反面数.这样的随机试验的样本空间是

$$\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots,\ +\infty\},$$

其中 $n$ 表示前 $n$ 次出现反面,第 $n+1$ 次出现正面,$+\infty$表示永远都是反面,不能停止.这是一个具有无限多个样本点的样本空间.

同一个样本空间可以描述不同的随机试验.比如,上例中的样本空间也适用于记录某电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数,还可以用于描述一段时间内经过一个路口的车辆数目等.

**例 3** (1) 观察某地区一昼夜最低气温 $x$ 和最高气温 $y$(单位:℃).设这个地区的温度不会低于 $T_0$ 也不会高于 $T_1$,则此随机试验的样本空间是

$$\Omega=\{(x,\ y)\mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

(2) 从一批灯泡中抽取一只,测试它的使用寿命.此试验的样本空间为

$$\Omega = \{T \mid T \in [0, M]\},$$

其中 $T$ 表示使用寿命，$M$ 为一个确定的上限. 若不能确定上限，则样本空间为

$$\Omega = \{T \mid T \in [0, +\infty)\}.$$

## §1.2　随机事件及其概率

### 一、随机事件

在研究随机试验时，人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现，而且关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现. 满足这个条件的样本点组成了样本空间的子集，称为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写拉丁字母 $A$, $B$, $C$ 等表示事件.

如果选取了合适的样本空间，可以将事件理解为样本空间中某些样本点的集合. 于是，一个事件被看作样本空间 $\Omega$ 的一个子集. 一个事件发生(或出现)是指该子集中的样本点有一个发生.

所谓一个合适的样本空间，意味着如果选择一些其他的样本空间，也许事件就不能表示为其子集，所以，事件必须对应样本空间. 不同的事件对应不同的子集；反之，不同的子集对应不同的事件.

在随机试验中，必定发生的事件称为**必然事件**，记为 $\Omega$. 在随机试验中，一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 样本空间 $\Omega$ 与空集 $\varnothing$ 作为样本空间的子集，也视为事件. 必然事件与不可能事件可以说不是随机的，但为了讨论问题的方便，今后我们将它们作为随机事件的两个极端情形处理.

**例 1**　在 §1.1 的例 1(2)中，若设 $A$ 表示至少出现一次正面，$B$ 表示至少出现一次反面. 当适合于该事件的样本空间为第一种情形时，有

$$A = \{(T, T), (T, H), (H, T)\},\ B = \{(T, H), (H, T), (H, H)\}.$$

当适合于该事件的样本空间为第二种情形时，有

$$A = \{(T, T), (T, H)\},\ B = \{(T, H), (H, H)\}.$$

在 §1.1 的例 1 (3) 中，若两颗骰子是可以区别的，设 $C$ 表示点数和为 7，则

$$C = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}.$$

**例 2** 在§1.1 的例 3 (1) 中,设 $A$ 表示最大温差超过 10 ℃,则

$$A=\{(x,\ y)\mid y-x>10,\ T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

## 二、事件的关系与运算

概率论中的事件是赋予了具体含义的集合,因此事件间的关系与运算可以按照集合论中集合间的关系与运算来处理.

1. 事件的包含

如果事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 发生,则称事件 $B$ **包含**事件 $A$,或称事件 $A$ **包含于**事件 $B$,记为

$$B\supset A\quad \text{或}\quad A\subset B.$$

显然,对于任何事件 $A$,有

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**,记为

$$A=B.$$

2. 事件的并(和)

事件 $A$ 与事件 $B$ 中至少有一个发生所构成的事件,称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**并(和)**,记为

$$A\cup B\quad \text{或}\quad A+B.$$

$n$ 个事件 $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件,称为事件 $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ 的并(和),记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\quad \text{或}\quad A_1+A_2+\cdots+A_n,$$

也记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\quad \text{或}\quad \sum_{i=1}^{n}A_i.$$

可列个事件 $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, …中至少有一个发生所构成的事件,称为可列个事件 $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, …的并(和),记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\quad \text{或}\quad \sum_{i=1}^{\infty}A_i.$$

3. 事件的交(积)

事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生所构成的事件,称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**交(积)**,

记为

$$A \cap B \quad 或 \quad AB.$$

类似地，$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生所构成的事件，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交（积），记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad 或 \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

也记为

$$A_1 A_2 \cdots A_n \quad 或 \quad \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

4. 事件的差

事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生所构成的事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差，记为

$$A - B,$$

它是由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的那些样本点构成的集合.

5. 互不相容事件

如果事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **互不相容**，或称事件 $A$ 与事件 $B$ **互斥**. 互不相容事件 $A$ 和 $B$ 没有公共的样本点.

类似地，$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i A_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **两两互不相容（或两两互斥）**.

显然，在随机试验中，各个样本点构成的事件是两两互不相容的.

6. 对立事件

事件 $A$ 不发生称为 $A$ 的**对立事件**，或称为事件 $A$ 的**逆事件**，记为 $\bar{A}$. 它是由样本空间中所有不属于 $A$ 的样本点构成的集合.

显然，互为对立的事件一定互斥，互斥事件不一定对立.

事件的运算与集合的运算一样，满足下列运算律.

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$;

$AB = BA$.

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC$;

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.