计算机系列

全国高职计算机专业教材

院士教授、企业资深从业人员、职教一线教师共同打造

◎顾问 张效祥 院士 ◎总主编 邱玉辉 教授

高等应用数学

周生银 主编

Advanced Applied Mathematics

西南师范大学出版社

全国高职计算机专业教材
院士教授、企业资深从业人员、职教一线教师共同打造
◎顾问 张效祥 院士 ◎总主编 邱玉辉 教授

高等应用数学

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/周生银主编. 重庆:西南师范大学出版社,2006.7

ISBN 7-5621-3644-0

Ⅰ.高... Ⅱ.周... Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064348 号

高等应用数学

周生银　主编

责任编辑:曹会东

封面设计:狄尚设计　西西

出版发行:西南师范大学出版社

(重庆·北碚　邮编 400715

网址:http://www.xscbs.com)

印 刷 者:重庆圣利印刷厂

开　　本:787mm×1092mm　1/16

印　　张:19

字　　数:487 千字

版　　次:2006 年 7 月　第 1 版

印　　次:2006 年 7 月　第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-5621-3644-0/TP·65

定　　价:28.00 元

《全国高职计算机专业教材》编委会联系方式

联 系 人:周　松　张浩宇

电　　话:023－68254356　13908317565　13883206497

地　　址:重庆市北碚区西南师范大学出版社内

邮　　编:400715

E-mail:qggzjsjjc@yahoo.com.cn

《全国高职计算机专业教材》总编委会

丛书总序

CONGSHU ZONGXU

总主编 邱玉辉

高等职业教育是我国高等教育体系的重要组成部分。近年来，国家高度重视职业教育，并为推动我国职业教育跨越式发展，颁发了《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，提出了将高等职业教育学制逐步由目前的三年改为两年的改革方向。

教材是提高教育质量的关键之一。信息产业部电子教育中心调查后认为，现在使用的教材多数是普通高校本科教材的压缩和简化，偏重理论知识的介绍，而案例教学、项目教学的内容极少，实用技能的训练更是不足，课程内容滞后于专业技术的更新与发展，与社会需求和行业发展相脱节，从而导致学生分析问题和解决问题的能力，特别是职业能力较弱，毕业的学生很少能直接顶岗工作。

为落实国家大力发展职业技术教育的重大决策和解决目前缺乏面向两年学制的高职计算机专业系列教材的问题，我们组织开发了这套《全国高职计算机专业教材》。

这套教材由我国著名计算机专家、"两弹一星"功臣张效祥院士担任顾问，并得到中央教育科学研究所的大力支持。其编写指导思想是：需求牵引，改革驱动，理论适度，着眼技术，立足实用，培养能力。我们通过总结当前职业教育专家教学改革的最新研究成果，紧紧依靠高职院校从事计算机教育的一线教师，以培养技能型紧缺人才为目标，让学生明白Why，知道What，重点学会How。把理论与实践融为一体，既考虑了每门课程本身的科学性，又兼顾了课程间的联系与衔接。全套教材具有重点突出，针对性强；结构清晰，循序渐进；模块结构，易教易学等特点。此外，我们还将为教材配备包含教参和习题解答等内容的光盘，供教师参考和学生自学。

总之，这套教材经过长期策划，精心打造，认真审读，终于问世了。它倾注了编写教师、总编委会以及出版社的大量心血。如果它能够对我们的高职计算机教育有所助益，那么我们的目的就达到了。

前言

QIANYAN

本书为全国高职计算机专业系列教材之一。其中整合了传统教学内容中的微积分、线性代数、概率统计等内容并进行了适当精选，以适应高职高专学生的基础水平及学时较少的实际情况。书中对命题逻辑的内容只介绍了一点初步知识。

我们在编写过程中，始终坚持总编委会的指导思想和编写原则，针对高职高专学生的实际水平和接受能力，面对现实，弱化理论，强化基本计算和基本应用方法的讲解。概念的引入尽可能从实例入手，对抽象的理论尽量给了直观解释，让读者易于接受。比如对极限概念，本书采用了一种大胆的尝试：全部采用描述性定义；对多数定理，也只通过实例或直观解释而不给出理论证明。这就大大降低了教材在理论上的难度。我们始终把重点放在基本概念的直观引入、计算方法和实际应用方法的具体阐述上。

本教材计划使用两个学期，约 120～150 学时。各校在使用过程中可根据不同学制、不同专业以及安排的实际学时数进行一定的取舍。书中标有 * 号的内容是可选内容。对第十二章的内容，也可提前到第一章之前进行教学。

本书可供二年制或三年制高职高专信息类专业使用，也可供其他专业选用。

本书主编是周生银，副主编是黄从云，杨磊。其中第一、七章由周生银编写，第三、九章由黄从云编写，第六、十一章由杨磊编写，第二章由曾彦编写，第四章由朱春梅编写，第五章由刁光成编写，第八章由黄铭编写，第十章由朱兴凤编写，第十二章由李彦群编写。由周生银进行全书的统稿并作最后的审定。

本书在编写过程中，始终得到西南大学邱玉辉教授的具体指导和西南师范大学出版社的大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平所限和时间仓促，错漏之处在所难免，恳请读者指正。

编者

2006 年 7 月

目 录

第一章　函数

学习要求：

1. 巩固函数的概念及其基本性质，基本初等函数的概念、图像与性质.

2. 掌握复合函数、初等函数的概念.

3. 理解函数模型的意义、建立方法，能用函数解决实际问题.

主要内容：

函数及其性质、初等函数、函数模型的建立.

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

在中学，我们曾学习过常量、变量以及函数的概念. 对于函数的定义，在学习的不同阶段或者在不同的教科书上，可能有不同的叙述，但总的来说还是大同小异.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集. 如果对于每一个数 $x \in D$，变量 y 按某种对应法则 f 总有一个唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. x 称作自变量，y 称作因变量，数集 D 称作函数 $y = f(x)$ 的定义域. 当 x 取遍 D 中所有值时，对应的因变量 y 所取值的全体称为这个函数的值域，记作 $f(D)$.

函数 $y = f(x)$ 中的"f"表示的是一个对应法则，即对每一个 $x \in D$，按法则 f 都有一个确定的 y 值与之对应. 比如，对于函数 $y = x^2 + 1$，f 是这样的一个对应法则：

$$对任意\ x \in R, x \xrightarrow{f} x^2 + 1 = y,$$

这个函数就记作 $y = x^2 + 1, f(x) = x^2 + 1$,或 $y = f(x)$.

重点:函数的定义域 D 和对应法则 f 被称为函数的两大要素,对应法则是函数的核心,也是函数的实质所在.

对应法则也常用 y, g, h, F 等表示,此时函数就记作 $y(x), g(x), h(x), F(x)$ 等.

当 x 取值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的值称作函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值,记作 $y(x_0)$,$f(x_0)$ 等.

提醒:在这个意义之下,f 也可认为是函数的一种"求值运算".

例 1.1 设 $y = f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$,求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

解 $y = f(x)\big|_{x=\frac{2}{\pi}} = f\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. □

例 1.2 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$,求 $f(x)$.

解 令 $x + 1 = t$,则 $x = t - 1$,

所以 $f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4$,

所以 $f(x) = x^2 - 5x + 4$. □

要表示函数中自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则,可以有解析法、图像法和列表法.

像上面所讨论的那样,用一个解析式(如 $y = x^2 + 1$)来表示函数的方法,叫做解析法.这是一种最精确的表达方式.有了函数的解析表达式,就可以对已知数值进行确定的数学计算,从而得到未知量的精确数值.更进一步,通过对解析表达式的数学分析,可以得到函数性质的精确表达.

表示函数的第二种方法是图像法.在平面直角坐标系中,取自变量在横轴上变化,因变量在纵轴上变化,则平面点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像(或图形).

例 1.3 王先生到郊外去观景,他以每时 3 km 的速度匀速前进,离家 1 h,他发现一骑车人的自行车坏了,他用了1 h帮助这个人把自行车修好后,又以原来的速度上路了.则王先生离家的距离 y 关于离家时间 $x(0 \leqslant x \leqslant 5)$ 的函数关系为

$$y = \begin{cases} 3x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3, & 1 < x \leqslant 2, \\ 3x - 3, & 2 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

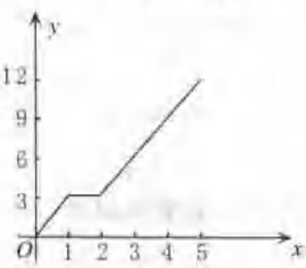


图 1-1

此函数的图像如图 1-1 所示.该函数的定义域为 $D = [0,5]$,但它在定义域内的不同区间上是用不同解析式来表示的,这样的函数称为分段函数.

提醒:分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数;分段函数需要分段求值,分段作图.

例 1.4　作出下面分段函数的图像：

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

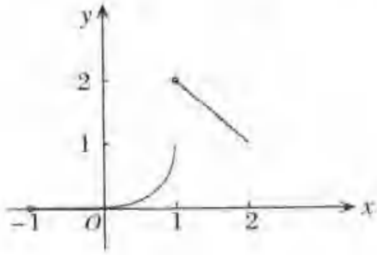


图 1-2

解　该分段函数的图像如图 1-2 所示.　□

技巧：函数的图像表达了函数的数值分布．用图来表示函数中变量之间的依赖关系，可以很直观地说明函数的很多性质，如单调性、奇偶性、周期性等等．在高等数学的学习中，我们强烈希望读者要学会通过图像来观察、归纳及记忆函数性质，这是一个非常重要的学习技巧．

函数的图像表示法的缺点就是不能精确地给出数值，也不能精确地表达函数的性质.

函数的第三种表示方法叫做列表法，就是一一列出自变量与因变量之间所对应的数值. 例如常用的数学用表就是用列表形式表示的函数关系. 它的好处是一目了然，能让你很快查到所需要的变量的值，甚至是精确的值，而无须进行另外的计算；缺点就是只能处理很有限的数值，对于可以取大量，甚至无穷个数值的变量，这种方法就不行了，同时也不容易让人理解变量之间的对应规律.

例 1.5　中央电视台每天播放天气预报. 经统计，某地 2005 年 9 月 19 日至 29 日每天的最高气温如表 1-1 所示.

表 1-1

日期 t	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温 N(℃)	28	28	27	26	26	25	26	24	23	21	22

这个表格确实表达了最高气温是日期的函数，这里不存在任何计算气温的公式，(否则就不需要气象局了) 但是每一天都会产生一个唯一的最高气温，也就是说，对每一个日期 t，都有一个与之对应的唯一的最高气温 N.

函数概念最关键的地方，就是它的对应关系，或者说依赖关系，即每一个 x 值只能对应因变量 y 的一个值. 这一点是函数的必要条件. 我们通常也把这种函数叫做单值函数.

例 1.6　设变量 x 与 y 满足 $x^2+y^2=25$，$x\in[-5,5]$，问 y 是否是 x 的函数?

解　不是，因为存在 $x\in(-5,5)$ 可以确定两个 y 值：$y=\pm\sqrt{25-x^2}$，不符合函数的定义.　□

通常意义上的函数是指单值函数. 非空集合 D 中的一个 x 值有多个 y 值与之对应的关系可称为多值函数. 对于多值函数 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$，可以把它分成两个单值函数：$y=+\sqrt{25-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{25-x^2}$，它们称为多值函数的单值分支.

表示了依赖关系之后，还必须说明自变量的取值范围，也就是函数的定义域. 确定函数的定义域时，有两个基本原则：其一，对于一个纯粹用解析式来表达的函数，其定义域是使函数有

意义的自变量值的集合;其二,对于来自实际问题的函数,其定义域必须符合实际意义.

分段函数的定义域是自变量各可取值区间的并集.

例 1.7 (1) 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x>0, \\ -x, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$.

一个函数的定义域,可以用不等式、区间或者集合表示,有时也可用文字叙述.比如例 1.7 的两个函数的定义域都是"一切实数",而函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域可表示为 $x\geqslant 1$,$[1,+\infty)$ 或 $D=\{x\mid x\geqslant 1\}$ 等形式.

在以后讨论函数时,还会经常用到另一个概念——邻域.我们把以 x_0 为中心,以 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 叫做点 x_0 的(半径为 δ 的)邻域.如果其中不含邻域中心点 x_0,就叫作 x_0 的去心邻域.点 x_0 的 δ 去心邻域也就是集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

重点:定义域与对应法则是函数的两个要素,也是判断两个函数是否相同的标准.

例 1.8 下列函数是否相同?为什么?

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;

(2) $\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解 (1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数,因为定义域不同.

(2) $\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数,因为对应法则与定义域均相同. □

有了自变量的取值范围,利用函数的对应关系,就可以确定因变量的取值范围,也就是函数的值域.这就要求我们熟练掌握各种函数的数学性质,特别是下面要讨论的几种基本初等函数的性质.我们将结合例题更详细地讨论这一点,并且希望读者多做练习.

二、函数的几种特性

下面讨论函数所可能具有的几种性质.这几种性质都具有非常直观的意义,用初等的方式就可以表达出来.

1. 函数的单调性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(减少),区间 I 称为单调增(减)区间.

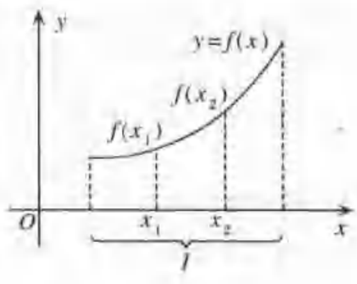


图 1-3

从直观上来说,在某区间上单调增加的函数,其图像在这一区间上沿 x 轴正向是上升的;(图 1-3) 反之,单调减少的函

数，其图像在这一区间上沿 x 轴正向是下降的.

2. **函数的有界性**

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内无界. 由此可知，函数的有界性跟所讨论的区间有关.

从直观上来说，有界函数的图像可以用两条平行于 x 轴的直线夹住.（图 1-4）

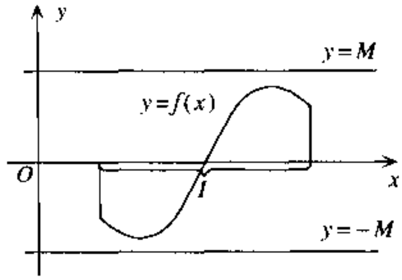


图 1-4

3. **函数的奇偶性**

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，且 I 关于原点对称. 若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

如 $f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 为奇函数.

不满足上述两条的为非奇非偶函数，如 $f(x)=x^2+x$.

同样可以从图像方面得到对奇偶性的很好的理解，就是看在某个区间内，整个函数图像是否关于原点对称（图 1-5）或者关于 y 轴对称（图 1-6）. 这样我们又可以得到：一个函数是奇函数或偶函数，首先它的定义域必须是关于原点对称的.

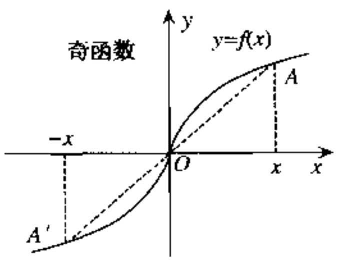


图 1-5

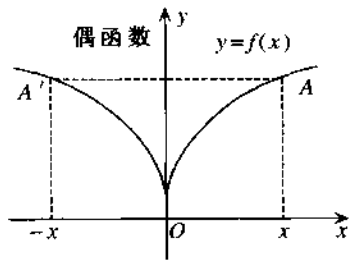


图 1-6

4. **函数的周期性**

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在不为零的常数 T，使得对于任意 $x\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 叫做该函数的周期.

由定义 1.5 易证，当 T 是 $f(x)$ 的周期时，$-T$，$\pm 2T$，$\pm 3T$，… 也都是 $f(x)$ 的周期. 可见周期函数的周期是不唯一的. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期，即周期的最小正值.

从直观上来看，就是整个函数图像沿着 x 轴的正方向或负方向平移一个有限大小的距离，得到的函数图像与原来的函数图像可以完全重合. 也就是说周期函数具有沿着 x 轴的平移不变性质.

如 $y = \sin x, y = \cos x$ 的周期为 2π，$y = \tan x, y = \cot x$ 的周期为 π，而 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.（A, w, φ 为常数且 $w \neq 0$）.

三、反函数及其性质

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，其值域为 W. 如果对数集 W 中的每个数 y，在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $f(x) = y$ 成立，则得到一个定义在数集 W 上的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D.

函数 $y = f(x)$ 与函数 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数. 如函数 $y = \sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $x = \arcsin y(-1 \leqslant y \leqslant 1)$ 互为反函数.

习惯上，我们将 $x = f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y = f^{-1}(x)$，这时称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

例 1.9 求 $y = 3x - 1$ 的反函数.

解 由 $y = f(x) = 3x - 1$ 可得 $x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$，互换 x, y，得 $y = 3x - 1$ 的反函数是 $y = \frac{x+1}{3}$. □

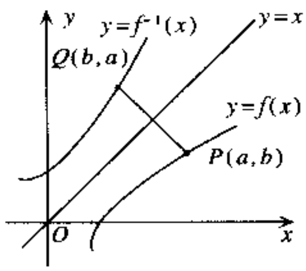


图 1-7

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图像对称于直线 $y = x$.（图 1-7）同时，原函数的定义域是其反函数的值域，原函数的值域是其反函数的定义域.

一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数. 更直接一些的结论是：在某区间上单调的函数，在此区间上必然存在反函数.

第二节 初等函数

一、基本初等函数

标准形式的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数(可简记为"常、幂、指、对、三、反")统称为基本初等函数.这里作一个集中复习,希望读者弄清它们的定义形式、定义域、值域、图像及性质,特别是要能够根据函数图像来分析其性质.

1. 常数函数:$y = C$(C 为常数)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,图像为平行于x轴、y轴上截距为C的直线.(图1-8)函数的值域为$W = \{C\}$.

2. 幂函数:$y = x^{\mu}$(μ 为任一给定的实数)

它的定义域随μ而异,但不论μ为何值,x^{μ} 在$(0,+\infty)$内总有定义,而且图像都经过$(1,1)$点.常用的幂函数有:$y = x^2$,$y = x^3$,$y = x^{-1}$,$y = \sqrt{x}$ 等等.(图 1-9)

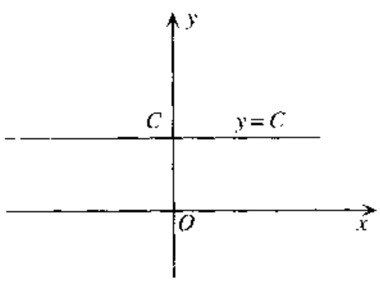


图 1-8

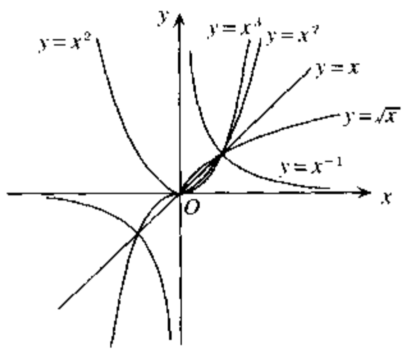


图 1-9

3. 指数函数:$y = a^x$($a > 0, a \neq 1$)

如 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,$y = 2^x$.(图 1-10)

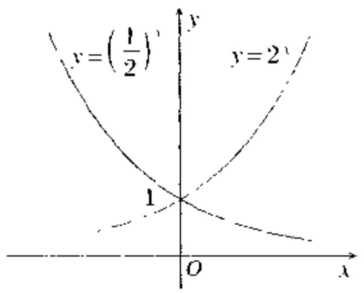


图 1-10

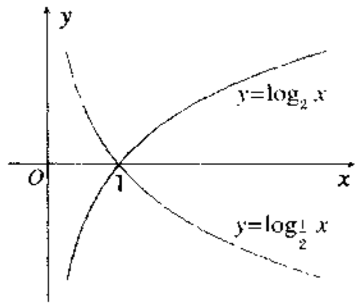


图 1-11

4. **对数函数**：$y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$

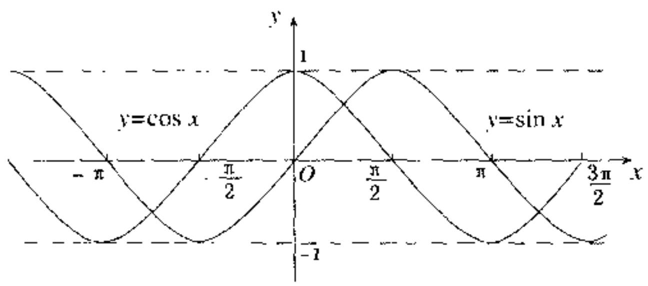
如 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$.（图 1-11）

对数函数的一般形式为 $y=\log_a x$，它实际上就是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

5. **三角函数**

三角函数有 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$，共 6 种. 它们都是周期函数.

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$.（图 1-12）



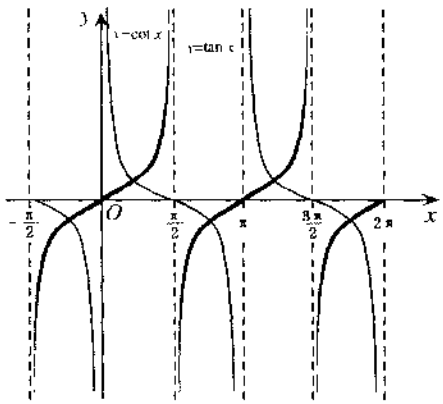


图 1-12

图 1-13

(2) 正切函数 $y=\tan x$ 与余切函数 $y=\cot x$.（图 1-13）

(3) 正割函数 $y=\sec x$ 与余割函数 $y=\csc x$.

对于这两个函数，我们也可以像讨论前面的几个函数那样来进行研究. 但由于 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，凡涉及正割或余割函数的问题，一般都可将之化为余弦或正弦函数来处理，因此对这两个函数，这里不再具体讨论.