LCS 理工类硕士研究生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

矩阵分析及其应用

■ 曾祥金 吴华安 编著

HAN UNIVERSITY PRESS

汉大学出版社

LCS 理工类硕士研究生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

矩阵分析及其应用

■ 曾祥金 吴华安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析及其应用/曾祥金,吴华安编著.—武汉:武汉大学出版社,2007.8

21世纪高等学校数学系列教材

理工类硕士研究生

ISBN 978-7-307-05684-8

Ⅰ.矩… Ⅱ.①曾… ②吴… Ⅲ.矩阵分析—研究生—教材 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第090059号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北金海印务公司

开本:787×1092　1/16　印张:11.875　字数:241千字　插页:1

版次:2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷

ISBN 978-7-307-05684-8/O·363　定价:20.00元

内容简介

本书是工科硕士研究生和工程硕士生的教材.全书共分七章,系统地介绍了线性空间和线性变换、内积空间的理论和应用、矩阵的Jordan标准形与若干分解形式、范数理论及其应用,矩阵函数及其应用、特征值的估计与广义逆.各章末配有习题,书末附有答案或提示.本教材结合工科的特点,注意理论与应用的结合,引入了大量国内外矩阵理论的研究成果,以达到由浅入深,学以致用的目的.

本书也可以供工科高年级本科生、相关教师及工程技术人员阅读或参考.

前　言

矩阵理论作为一种基本的数学理论，随着现代科学技术的发展，在各个科学领域，如控制理论，信息与科学技术，优化理论，力学，经济管理，金融等学科，都有着十分重要的应用．矩阵方法已成为现代科技领域不可或缺的研究工具．目前，我国的工科院校已把“矩阵分析及应用”作为各专业硕士研究生的学位课．因此，学习和掌握矩阵的理论和方法对于工科研究生来说是十分必要的．

本书是作者在多年为工科硕士研究生讲授该门课程的基础上，参考国内外有关教材，结合工科的特点和需要，经过整理、修改和充实后编写而成的．

本书既介绍了矩阵的基础理论，也注重矩阵理论的应用．同时吸收了近年来国内外的最新研究成果．在基本理论的论述上力求简洁，对个别理论不苛求推导；基本方法的介绍兼顾应用背景和具体应用，并多用例题加以说明，便于读者掌握．为此，在内容的编排和取舍上，与以往的教材皆有不同．本书选材合理，内容新颖，结构严谨，循序渐进，通俗易懂，简明适用．读者只需具备线性代数和高等数学的知识，即可阅读本书．

本书内容分为七章，可以分为两个阶段，第一阶段介绍线性空间与线性变换，内积空间，矩阵的标准形，这些是线性代数内容的衔接与延伸；第二阶段介绍向量范数与矩阵范数及应用、矩阵的分解，矩阵函数及应用，特征值的估计、广义逆矩阵等．这些内容是根据目前工科硕士研究生的实际需要而精心挑选的．每章配备了一定数量的习题，便于读者进一步加深对内容的理解．

本书由曾祥金（第 3、5、6 章）、吴华安（第 1、2、4、7 章）共同编写，最后由曾祥金对全书进行统稿．

在本书的编写和出版过程中，得到武汉大学出版社理工事业部李汉保编辑的大力支持，在此深表感谢．作者还要感谢数学系吴传生教授，本书的出版是和他的帮助分不开的．

限于作者水平，书中难免有纰漏之处，敬请广大读者和专家指正．

作　者

2007 年 5 月 20 日

目　录

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间的概念源自我们所熟悉的向量及其相关运算性质. 将类似的具有共同运算规律的数学对象进行一般的数学描述就得到抽象的线性空间的定义. 因此，线性空间的理论在自然科学、工程技术，特别是数学的其他领域都有着广泛的应用.

§1.1　线性空间的基本概念

在线性代数中，为研究齐次线性方程组的解的结构，我们学习了实向量空间的基本理论. 在工程技术和科学计算以及数学领域的不同场合，有许多集合本身所伴随的运算具有与实向量空间中的运算相同的本质特征，因而我们有必要将实向量空间的理论进行推广.

我们首先约定，以后所称的数域 F，是指实数域或复数域. 在抽象代数中，数域是指至少包含 0 和 1 的数集，在该集中进行的数的和、差、积和商(除数不为 0) 的运算是封闭的.

定义 1.1　设 V 是一个非空集合，其中的元素称为向量，F 是数域，其中的数称为纯量. 在 V 中有向量的加法，使得对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有和向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$. 对每个纯量 $x\in F$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有纯量积 $x\boldsymbol{\alpha}\in V$. 如果

关于向量加法有运算律：

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

(iii) 存在零向量 $\mathbf{0}\in V$，使得对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

(iv) 对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

关于纯量积有运算律：$x,y\in F$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$

(v) $x(y\boldsymbol{\alpha})=(xy)\boldsymbol{\alpha}$.

(vi) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

(vii) $x(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=x\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta}$.

(viii) $(x+y)\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\alpha}$.

则称 V 是 F 上的一个线性空间(或向量空间).

例 1　在线性代数中定义的实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 关于通常的实向量的加法运算和

实数乘向量的数乘运算构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间.

例 2 设 $R[x]_n$ 表示次数小于 n 的多项式的全体(且包含零多项式)对于多项式的加法和数与多项式的乘法构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 3 设全体 $m\times n$ 复矩阵所成之集为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 按照矩阵的加法和数乘矩阵的运算构成 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

例 4 在全体收敛的实数数列所成的集合 l^∞ 中,对任意的 $\boldsymbol{a}=\{a_n\}\in l^\infty,\boldsymbol{b}=\{b_n\}\in l^\infty,\lambda\in\mathbf{R}$,定义

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_n+b_n\},\quad \lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_n\}$$

则容易由收敛数列的运算性质验证 l^∞ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 5 定义在闭区间[0,1]上的全体连续实函数在函数的乘法和数乘函数的运算下成为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

线性空间的例子还可以举很多,不过需要指出的是当一个给定的非空集合在规定的运算下构成线性空间时,可能在另外规定的运算下不能成为线性空间.例如在 $\mathbf{R}^2$ 中定义

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1-1,a_2+b_2),\quad \lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2)$$

则当 $\lambda\neq 1$ 时,

$$\lambda[(a_1,a_2)+(b_1,b_2)]=\lambda(a_1+b_1-1,a_2+b_2)=(\lambda a_1+\lambda b_1-\lambda,\lambda a_2+\lambda b_2),$$

$$\lambda(a_1,a_2)+\lambda(b_1,b_2)=(\lambda a_1+\lambda b_1-1,\lambda a_2+\lambda b_2).$$

以上两式不相等,说明线性空间定义中的运算公理(ⅶ)不满足.所以 $\mathbf{R}^2$ 关于以上的运算不是线性空间.

由线性空间的定义可以证明:线性空间 V 中的零向量是惟一的;V 中每个元素的负向量也是惟一的.并且有以下一些基本性质:

性质 1.1 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},x\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

性质 1.2 当 $x\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,则 $x=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

性质 1.3 $x(-\boldsymbol{\alpha})=-x\boldsymbol{\alpha}=(-x)\boldsymbol{\alpha}$.

性质 1.4 $(x-y)\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}-y\boldsymbol{\alpha}$.

性质 1.5 $x(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=x\boldsymbol{\alpha}-x\boldsymbol{\beta}$.

证 我们只证明性质 1.3 和性质 1.4,其余的留作习题.

根据性质 1.1,我们有

$$x\boldsymbol{\alpha}+x(-\boldsymbol{\alpha})=x[\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})]=x\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

这说明 $x(-\boldsymbol{\alpha})$ 是 $x\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,故 $x(-\boldsymbol{\alpha})=-x\boldsymbol{\alpha}$.同理可证 $(-x)\boldsymbol{\alpha}=-x\boldsymbol{\alpha}$.这就证明了性质 1.3 成立.

为证性质 1.4,首先可以定义向量的减法.对给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$,若存在向量 $\boldsymbol{\gamma}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$,则称向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差,记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.由于 $\boldsymbol{\beta}+[\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})]=\boldsymbol{\alpha}+[\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})]=\boldsymbol{\alpha}$,所以有

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

由性质 1.3，在 $(-y)\boldsymbol{\alpha}=-y\boldsymbol{\alpha}$ 两边同加 $x\boldsymbol{\alpha}$，得

$$x\boldsymbol{\alpha}-y\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}+(-y\boldsymbol{\alpha})=x\boldsymbol{\alpha}+(-y)\boldsymbol{\alpha}=(x-y)\boldsymbol{\alpha}.$$

所以性质 1.4 成立. □

对于给定的线性空间 V 来说，V 的非空子集中的元素作为 V 的成员自然也继承了 V 中定义的向量加法和纯量积运算，因而也可能成为一个线性空间.

定义 1.2　如果向量空间 V 的子集 U 在 V 中规定的向量加法和纯量积运算下是一个向量空间，则称 U 是 V 的子空间.

向量空间的任意子集并不是都能成为子空间的. 比如，对于例 1 中的向量空间 $\mathbf{R}^n$，取子集

$$U=\{(1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_2,a_3,\cdots,a_n\in\mathbf{R}\}.$$

由于

$$(1,a_1,a_2,\cdots,a_n)+(1,b_1,b_2,\cdots,b_n)=(2,a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\notin U,$$

所以 U 就不是线性空间.

向量空间的子集是否为向量空间，可以用下面的判断法则.

定理 1.1　设 V 是数域 F 上的向量空间，U 是 V 的一个非空子集. 则 U 是 V 的子空间的充分必要条件是

(ⅰ) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in U$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in U$.

(ⅱ) 对任意的 $x\in F,\boldsymbol{\alpha}\in U$，有 $x\boldsymbol{\alpha}\in U$.

证　若 U 是向量空间 V 的子空间，则根据线性空间的定义，在 U 中的向量加法与纯量积运算是封闭的，故条件(ⅰ)和条件(ⅱ)是成立的.

反之，当条件(ⅰ)和条件(ⅱ)成立时，由 U 中向量的加法运算和纯量积运算的封闭性可知，在 V 中成立的关于这两种运算的八条运算律在 U 中也成立，因而 U 是 F 上的线性空间，从而是 V 的子空间. □

例 6　在几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中取过原点的直线

$$L=\{(x,y,z)\mid x=at,y=bt,z=ct,-\infty<t<+\infty\}$$

容易验证 L 是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

$\mathbf{R}^3$ 中不经过原点的直线不是子空间，因其不含零向量.

例 7　设 V 是一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，则 $W=\{x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s\mid x_i\in F\}$ 是 V 的子空间. 称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间，记为

$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$$

例 8　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量构成 $\mathbf{R}^n$ 的子空间. 我们将这个子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核，记为 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$.

令

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{Ax}\in\mathbf{R}^m\mid x\in\mathbf{R}^n\}$$

则 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的像.

§1.2 基、坐标及其变换

在线性代数中,我们有关于向量的线性组合、线性相关与线性无关的定义与相关结论,这些定义都可以推广到一般线性空间,而对应的结论也可以证明在线性空间都是成立的.

定义 1.3 设 V 是数域 F 的线性空间,如果 V 中存在一个有限元素集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(2) V 中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

则$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 称为 V 的一组基,并称 V 为 n 维线性空间,记为 $n=\dim V$.

当$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的基时,对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,必有 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in F$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

此时,我们称 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标.

以下定理表明,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在给定基下的坐标是惟一确定的.

定理 1.2 设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 的基,则 V 的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由基元素惟一表示.

证 若

$$x=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$(\lambda_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_n-y_n)\boldsymbol{\alpha}_n=0.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性无关性可知 $\lambda_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$. □

线性空间的零子空间的维数规定为 0. 如果一个线性空间中有任意多个线性无关的元素,则称该线性空间为无限维线性空间. 本书只讨论有限维线性空间.

例如,$\mathbf{R}^n$ 是 n 维线性空间,

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

就是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

在线性空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中,取 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为第 i 行,第 j 列元素为 1,其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵,$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$,则$\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 就是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的一组基.

容易证明,n 维线性空间 V 中的任意 n 个线性无关的向量所成之集必为 V 的一组基. 任意两组基是等价的向量组.

以下定理告诉我们,如何找到有限维线性空间的基.

定理 1.3(基的扩张定理)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(1\leqslant r\leqslant n)$ 是 n 维线性空间 V 中的 r 个线性无关的向量，则必有 V 中的 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 存在，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 成为 V 的基.

证　若 $r=n$，则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 已是 V 的基. 下设 $r<n$，令

$$\begin{aligned}W&=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}\\&=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,x_i\in F,1<i\leqslant r\}\end{aligned}$$

故必有 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\in V$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\overline{\in} W$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性无关. 如若不然，即对每个 $\boldsymbol{\beta}\in V-W$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性无关可知 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，此时就必有 $\boldsymbol{\beta}\in W$. 这与 $\boldsymbol{\beta}$ 的取法矛盾.

如果 $r+1=n$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 V 的基，证明到此结束. 如果 $r+1<n$，我们继续上面的做法，直到找到 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 由于 V 是 n 维线性空间，所以 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 就必为 V 的基. □

现在我们转而讨论向量在不同基下的坐标之间的关系. 为此，先看一个例子.

例 1　在线性空间 $R[x]_3$ 中，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2$，则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $R[x]_3$ 的一个基. 此时，任意

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in R[x]_3$$

在这个基下的坐标就是 $(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$.

另取一基 $\boldsymbol{\beta}_1=1,\boldsymbol{\beta}_2=1+x,\boldsymbol{\beta}_3=x^2$，并设

$$f(x)=b_1+b_2(1+x)+b_3x^2=(b_1+b_2)+b_2x+b_3x^2$$

则 $f(x)$ 在这个基下的坐标是 $(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$. 由

$$\begin{cases}b_1+b_2=a_0\\ b_2=a_1\\ b_3=a_2\end{cases}$$

可知

$$b_1=a_0-a_1,b_2=a_1,b_3=a_2.$$

上例说明线性空间的向量在不同基下的坐标是不同的.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V 的两个基，$\boldsymbol{\alpha}\in V$，

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n$$

用矩阵形式写成

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

再设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

我们称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为由基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵. 于是有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

由于向量在给定基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标是惟一的,所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

又因过渡矩阵是可逆的,故由上式得到

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

总结以上的结果,向量在不同基下的坐标之间的关系可以由下述定理给出.

定理 1.4 设线性空间 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 在基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的坐标是$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,从基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$,则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

例 2 已知$\{1,x,x^2,x^3\}$ 是线性空间 $R[x]_4$ 的一个基,$f(x)=a_0+a_1x+$

$a_2x^2+a_3x^3$ 是 $R[x]_4$ 中的任一向量.

(1) 试证：$1,x-x_0,(x-x_0)^2,(x-x_0)^3$ 也是 $R[x]_4$ 的基($x_0\neq 0$)；

(2) 给出 $f(x)$ 在两个基下的坐标关系式.

证　(1) 由于 $R[x]_4$ 是 4 维线性空间，我们只需证明 $1,x-x_0,(x-x_0)^2,(x-x_0)^3$ 线性无关. 为此设

$$\lambda_0+\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(x-x_0)^2+\lambda_3(x-x_0)^3=0$$

对任意 x 都成立，即 x_1,x_2,x_3,x_4 为互不相同的实常数，分别代入上式得

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1(x_1-x_0)+\lambda_2(x_1-x_0)^2+\lambda_3(x_1-x_0)^3=0\\ \lambda_0+\lambda_1(x_2-x_0)+\lambda_2(x_2-x_0)^2+\lambda_3(x_2-x_0)^3=0\\ \lambda_0+\lambda_1(x_3-x_0)+\lambda_2(x_3-x_0)^2+\lambda_3(x_3-x_0)^3=0\\ \lambda_0+\lambda_1(x_4-x_0)+\lambda_2(x_4-x_0)^2+\lambda_3(x_4-x_0)^3=0\end{cases}$$

若将上式看做是关于未知量 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的齐次线性方程组，则因系数矩阵的行列式是 4 阶范德蒙行列式且不等于 0，故该方程组只有零解 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

(2) 设 $f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+b_3(x-x_0)^3$. 根据 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数表示式可知

$$b_0=f(x_0),\quad b_1=f'(x_0),\quad b_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad b_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}$$

若记 $(x^k)^{(n)}\big|_{x=x_0}=(x^k)_0^{(n)}$，则

$$\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3\\ 0 & 1 & \frac{1}{1!}(x^2)'_0 & \frac{1}{1!}(x^3)'_0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2!}(x^3)''_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

例 3　设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 的基，向量组

$$\beta_i=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j,\quad i=1,2,\cdots,m$$

作矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m)$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 线性相关.

证　设 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i=0,\lambda_i\in F,i=1,2,\cdots,n$. 则

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ji}\right)\boldsymbol{\alpha}_j=0$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的，上式表明

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ji}=0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

用矩阵表示就是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}=0$$

即 $\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1+\lambda_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\gamma}_m=0$，反之由上式又可以推导出 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i=0$.

这说明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关的充要条件就是 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 线性相关.

§1.3 子空间的运算与维数定理

前面我们介绍了线性空间的子空间的概念. 这里将要讨论子空间的两种重要运算 —— 交与和.

定理 1.5 设 V_1,V_2 是数域 F 上线性空间 V 的两个子空间，则 $V_1\cap V_2$ 也是 V 的子空间.

证 因为子空间必含 V 的零向量，所以 $V_1\cap V_2$ 至少有一个零向量，从而 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$.

现任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2,\lambda,\mu\in F$. 则因 V_1,V_2 是子空间，故

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\in V_1,\quad \lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\in V_2$$

所以，$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$. 从而 $V_1\cap V_2$ 是 V 的子空间. □

例 1 在 $\mathbf{R}^3$ 中，取 V_1,V_2 是过原点的平面，$V_1\neq V_2$. 则 $V_1\cap V_2$ 就是过原点的一条直线.

定理 1.6 设 V_1,V_2 是数域 F 上的线性空间 V 的两个子空间，令

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}$$

则 V_1+V_2，也是 V 的子空间.

证 V_1+V_2 显然是非空的. 现在任取 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\in V_1+V_2,\lambda,\mu\in F$，由于 V_1,V_2 是子空间，故 $\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\mu\boldsymbol{\beta}_1\in V_1,\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\beta}_2\in V_2$. 又

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\mu(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\mu\boldsymbol{\beta}_1)+(\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\beta}_2)$$

故 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\mu(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\in V_1+V_2$. 所以，$V_1+V_2$ 是 V 的子空间. □

我们称 V_1+V_2 为子空间 V_1 与 V_2 的和.

不难验证，子空间的和运算有下列运算律：

1.（交换律）　$V_1+V_2=V_2+V_1$；

2.（结合律）　$(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$.

子空间的交与和运算可以推广到有限个子空间的情形.

例 2　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，且

$$V_1=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\},\quad V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$$

则
$$V_1+V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

定义 1.4　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，若 $V_1\cap V_2=\{0\}$，则 V_1+V_2 称为 V_1 与 V_2 的直和，记做 $V_1\oplus V_2$.

定理 1.7　V_1+V_2 是直和，当且仅当对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2$，存在惟一的 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

证　设 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$，若有 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2$ 有两种表示：

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1'+\boldsymbol{\alpha}_2',\quad \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1'\in V_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2'\in V_2.$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1'=\boldsymbol{\alpha}_2'-\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1\cap V_2$$

但 $V_1\cap V_2=\{0\}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2'$.

反之，设每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2$ 只有一种表示. 若 $V_1\cap V_2\neq\{0\}$，取 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，那么

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

上式说明在 V_1+V_2 中有零向量的表示是不惟一的，这与条件矛盾. 故 $V_1\cap V_2=\{0\}$，即 V_1+V_2 是直和. □

定理 1.8　设 V,W 是数域 F 上的两个线性空间，在集 $V\times W$ 上定义向量的加法与数量乘法为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$$
$$\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta})$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}\in W,\lambda\in F$，则 $V\times W$ 也是 F 上的线性空间. 称之为 V 与 W 的积空间.

证　按线性空间的定义验证. □

现在研究子空间及由子空间的运算所产生的空间的维数.

定理 1.9（维数公式）　设 V_1 与 V_2 是数域 F 上线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

证　设 $\dim V_1=n_1,\dim V_2=n_2,\dim(V_1\cap V_2)=m$，我们要证明

$$\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m.$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $V_1\cap V_2$ 的基，由定理 1.3，将其依次扩充为 V_1,V_2 的基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}.$$

即
$$V_1=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\}$$

$$V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\}$$

所以

$$V_1+V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\}$$

设

$$\begin{aligned}&k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+p_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\\&p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+q_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+p_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\\&=-q_1\boldsymbol{\gamma}_1-q_2\boldsymbol{\gamma}_2-\cdots-q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\end{aligned}$$

即有 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$，故可令

$$\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

则

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=-q_1\boldsymbol{\gamma}_1-q_2\boldsymbol{\gamma}_2-\cdots-q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$$

即

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+q_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关知

$$l_1=l_2=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$$

因而 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+p_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，又得

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=p_2=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

这就证明了 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关，因而是 V_1+V_2 的一组基. 于是维数公式成立. □

推论 1.1 V_1+V_2 是直和的充要条件为

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

推论 1.2 设 V_1+V_2 是直和，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1}$ 是 V_1 的基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$ 是 V_2 的基，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$ 是 V_1+V_2 的基.

由此有下述定理.

定理 1.10 设 V_1 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，则一定存在 V 的一个子空间 V_2，使 $V=V_1\oplus V_2$.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V_1 的一组基，将其扩充为 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，令 $V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$.

显然满足直和维数公式，从而有 $V=V_1\oplus V_2$，即 V_2 为所求. □

定理 1.10 表明，有限维线性空间 V 可以作直和分解，且易知这种直和分解不是惟一的.

关于子空间的交与和的概念以及相关定理，可以推广到多个子空间的情形.