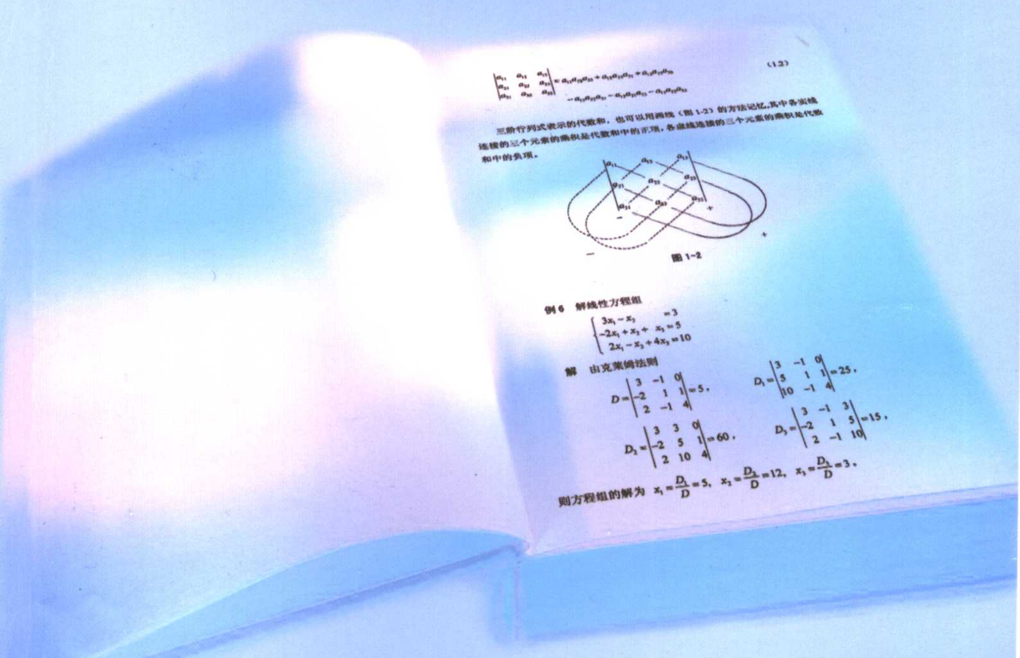
全国高协组织教材研究与编写委员会审定

线性代数

主编 刘晓俊 李春萍



中国广播电视出版社
CHINA RADIO & TELEVISION PUBLISHING HOUSE

全国高协组织教材研究与编写委员会审定

线性代数

主　编　刘晓俊　李春萍
副主编　张文良　陈爱江
王宏艳

中国广播电视出版社
CHINA RADIO & TELEVISION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（C I P）数据

线性代数 / 刘晓俊，李春萍主编．—北京：中国广播电视出版社，2007.2

ISBN 978-7-5043-5235-4

Ⅰ．线… Ⅱ．①刘… ②李… Ⅲ．线性代数 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 019600 号

线性代数

主　　编：	刘晓俊　李春萍
责任编辑：	王　萱
封面设计：	张　元
监　　印：	赵　宁
出版发行：	中国广播电视出版社
电　　话：	86093580　86093583
社　　址：	北京市西城区真武庙二条 9 号（邮政编码　100045）
经　　销：	全国各地新华书店
印　　刷：	山东省临沂市第二印刷厂
开　　本：	850 毫米×1168 毫米　1/32
字　　数：	202（千）字
印　　张：	7.5
版　　次：	2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：	ISBN 978-7-5043-5235-4
定　　价：	15.00 元

前 言

线性代数是一门重要的基础课，它所涉及的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用于众多领域，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法更显重要。考虑到经济类高职高专院校教学的特点和规律，为了适应今后经济类高职高专院校教育发展的需要，我们集多年教学实践经验及教材编写经验之所成，编写了这本线性代数教材。本教材概念清楚，重点突出，层次清晰，说理浅显，例题丰富。内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型等。在编写过程中，我们特别注意了以下几点：

第一，充分注意体现高职高专教育的特点，以“必需”、“够用”为度，尽量减少繁琐的理论推导，突出其实用性，为学生学习后续课程奠定基础。同时考虑到学生继续深造的需要，又尽可能地注意内容的系统性和完整性。另外，还有意安排了一些超出专科教学大纲的重要内容，打上*号供有兴趣有余力的学生自学参考，同时也可作为大学本科学生的选学内容。

第二，为适应高校素质教育的需要，本教材在注重实用性的同时，还致力于培养学生的科学素养，提高学生的逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力。

第三，注重各层次例题与内容间的相互搭配，努力做到既有广泛的涉及面，又重点突出：有些旨在巩固基本概念和基本运算，以帮助学生正确理解概念及运算法则；有些旨在澄清初学者易犯之错误，帮助学生明辨是非；有些旨在介绍常用的技巧方法，帮助学生掌握解题技巧。一些题目还给出了一题多解，以求使学生

开阔思路，活跃思维。

第四，每章之后都备有练习题，书末有习题参考答案。习题分为 A、B 两部分：习题 A 主要是为了使学生掌握基本概念和运算法则，让学生通过练习进一步理解和掌握有关知识及其相互的联系，从而能举一反三，触类旁通，对基本概念理解得更准确，对运算技巧掌握得更熟练。习题 B 是在搜集了大量近年来全国和部分省份专升本或专接本的真题的基础上，经过精心筛选而设计的，学生通过 B 组习题的练习可达到巩固、悟新与提高的目的；同时也便于学生自我检验对相应章节所学内容掌握的程度，了解专升本或专接本线性代数考试的动态，为今后继续深造奠定扎实的数学基础。

本书可作为大学专科教材，也可作为大学本科教材。作为专科教材，可只学习不带*号的章节；而作为本科教材，则需选学带*号的章节。另外，本教材也可作为参加自学考试者的自学参考书。

本书在编写过程中得到了学校有关方面的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

本书由刘晓俊、李春萍任主编，参加编写的有（以姓氏笔画为序）王宏艳、王洪梅、尹亮亮、刘晓俊、刘晓霞、许明、李春萍、张文良、张玉敏、陈爱江、金鑫、武萌、贾培佩。

由于编者水平所限，本书如有疏漏乃至错误之处，恳请读者批评指正。

2007 年 1 月

目 录

第一章 行列式 1

§1.1 n阶行列式 1

§1.2 行列式的性质 10

§1.3 行列式的展开 15

§1.4 克莱姆法则 23

习题一 29

第二章 矩 阵 41

§2.1 矩阵的概念 41

§2.2 矩阵的运算 45

§2.3 几种特殊矩阵 56

§2.4 分块矩阵 63

§2.5 逆矩阵 67

§2.6 矩阵的初等变换 77

§2.7 矩阵的秩 84

习题二 90

第三章 线性方程组 105

§3.1 线性方程组的消元解法 105

§3.2 向量组的线性相关性与向量的秩 119

§3.3 线性方程组解的结构 132

*§3.4　投入产出数学模型 143
习题三 152
第四章　矩阵的特征值 163
§4.1　矩阵的特征值与特征向量 163
§4.2　相似矩阵 169
*§4.3　实对称矩阵的特征值和特征向量 174
习题四 182
*第五章　二次型 188
§5.1　二次型与对称矩阵 188
§5.2　二次型与对称矩阵的标准形 193
§5.3　正定二次型 202
习题五 206
习题参考答案 212

第一章　行列式

行列式是求解线性方程组以及研究矩阵、向量组线性相关性的一种工具，在自然科学、工程技术和经济管理中有着广泛的应用。

§1.1　*n* 阶行列式

在中学代数课中，通过消元法可以得到二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$。为便于表示，我们引进行列式的概念及符号。

一、二阶、三阶行列式

我们用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

二阶行列式表示的代数和，可以用画线（图 1-1）的方法记忆，即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积。

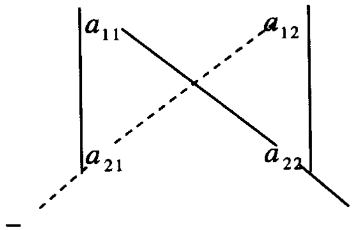


图 1—1

类似地，我们用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示代数和

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.2}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线（图 1-2）的方法记忆，其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项。

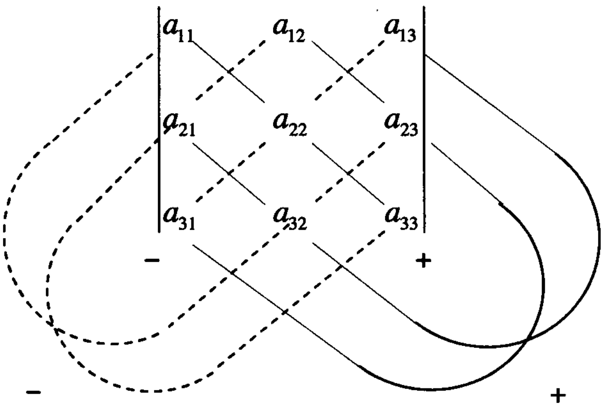


图 1-2

例 1 计算$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4\times 3-(-1)\times 5=17$

例 2 设$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问 （1）当λ为何值时，$D=0$；

（2）当λ为何值时，$D\neq 0$。

解 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$

（1）当$\lambda=0$或$\lambda=3$时，$D=0$

（2）当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 3$时，$D\neq 0$

例 3 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 1 + 2\times 5\times(-2) + 4\times 3\times 0$$
$$-4\times 0\times(-2) - 2\times 3\times 1 - 1\times 5\times 0$$
$$= -26$$

例 4 a, b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解 若要 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 0$，则 a 与 b 必须同时等于零，因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零。

例 5 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$，

$a^2-1>0$当且仅当$|a|>1$。因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0 \text{ 的充分必要条件是} |a|>1\text{。}$$

二、n 阶行列式

1．排列与逆序

定义 1.1 由n个不同数码$1,2,\cdots,n$组成的有序数组$i_1i_2\cdots i_n$，称为一个n级排列。

例如，1234，2431 都是 4 级排列，25413 是一个 5 级排列。

定义 1.2 在一个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$中，如果有较小的数i_t排在较大的数i_s后面$(i_s>i_t)$，那么称i_s与i_t构成一个逆序。一个n级排列中逆序数的总数称为此排列的逆序数，记为$N(i_1i_2\cdots i_n)$。

例 1 求排列 23541 的逆序数。

解 在排列 23541 中，2 的后面比 2 小的数是 1，故 2 的逆序数是 1；3 的后面比 3 小的数是 1，故 3 的逆序数是 1；5 的后面比 5 小的数是 4 和 1，故 5 的逆序数为 2；4 的后面比 4 小的数是 1，故 4 的逆序数为 1。于是，这个排列的逆序数为

$$N(23541)=1+1+2+1=5\text{。}$$

我们规定自然数按照由小到大的顺序的排列$1,2,\cdots,n$为一个标准排列。

定义 1.3 若排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数$N(i_1i_2\cdots i_n)$是奇数，则称此排列为奇排列，若是偶数，则称为偶排列。

定义 1.4 在排列中，将它的两个元素i_s与i_t对调，其他元素

不变，这种作出新排列的变换叫做一个对换，记为对换(i_s, i_t)。将相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

例如，对排列 21354 施以对换(1, 4)后得到排列 24351。

定理 1.1　一个排列经过一个对换后，奇偶性改变。

例 2　排列 32514 为奇排列，$N(32514)=2+1+2+0=5$；

若对换 2 与 5，变为 35214，$N(35214)=2+3+1+0=6$；

若再对换 5 与 4，变为 34215，$N(34215)=2+2+1+0=5$；

若再对换 3 与 1，变为 14235，$N(14235)=0+2+0+0=2$。

可见，每一个对换都改变了排列的奇偶性。

除了相邻对换外，一般并不意味着逆序数只增加或减少 1，而是对换后的逆序数与原排列的逆序数总相差奇数个。

定理 1.2　n 个数码$(n>1)$共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半。

2．n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

（1）二阶行列式表示所有不同行不同列的两个元素乘积的代数和，两个元素的乘积可以表示为$a_{1j_1}a_{2j_2}$，$j_1 j_2$ 为 2 级排列，当 $j_1 j_2$ 取遍 2 级排列(12, 21)时，即得到二阶行列式的所有项（不包含符号），共为$2!=2$ 项。

三阶行列式表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和，3 个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1\,j_2\,j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1\,j_2\,j_3$ 取遍 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项（不包含符号），共为 $3!=6$ 项。

（2）每一项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。如在上述二阶三阶行列式中，每一项元素中的行标已是标准排列，当列标的逆序数 $N(j_1j_2)$，$N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时，该项符号为正；为奇数时，则该项符号为负。

根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij} $(i, j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排为行，纵排为列，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此，n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

一阶行列式 $|a|$ 就是 a。行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$。由定理 1.2 可知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，且冠以正号的项和冠以负号的项（不算元素本身所带的负号）各占一半。

例 3 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，其中 a_{ii}\neq 0。$$

解 记行列式的一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$D$中有很多项为零，现考察哪些项不为零。

一般项中第一个元素a_{1j_1}取自第一行，但第一行中只有$a_{11}\neq 0$，因而$j_1=1$，即D中只有含a_{11}的那些项可能不为零，其他项均为零；第二个元素a_{2j_2}取自第二行，第二行中有a_{21}和a_{22}不为零，因第一个元素a_{11}已取自第一列，因此第二个元素不能再取自第一列，即不能取a_{21}，所以第二个元素只能取a_{22}，从而$j_2=2$，即D中只有含$a_{11}a_{22}$的那些项可能不为零，其他项均为零；这样推下去，可得$j_3=3,\ j_4=4,\ \cdots,\ j_n=n$，因此$D$中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零，其他均为零，由于$N(12\cdots n)=0$，因此这一项应冠以正号，于是

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

我们把上面形式的行列式称为下三角形行列式。

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\text{，其中 } a_{ii}\neq 0\text{。}$$

特别地

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\text{，其中 } a_{ii}\neq 0\text{，}$$

称为对角形行列式。

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

三角形行列式及对角形行列式的值均等于主对角线上元素的乘积，这一结论在以后行列式计算中可直接应用。

由行列式定义不难得出：一个行列式若有一行（或一列）中的元素皆为零，则此行列式必为零。

例 4 用行列式定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解 用 (i, j) 表示行列式中第 i 行第 j 列交叉点处元素的位置。在所给行列式中第三行和第一列均只有一个非零元素，因此非零项必取(2, 1)和(3, 2)处的元素，取了(2, 1)和(3, 2)后就不能再取(2, 3)和(1, 2)了，而第一行只能取(1, 4)，第四行只能取(4, 3)，因此行列式中只有一项非零，即为 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，每个 $a_{ij}=1$，$N(4123)=3$，该项前为负号。故此行列式等于 -1。

n阶行列式定义中，决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替：

定理 1.3 n阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|$的一般项可记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.4}$$

其中$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$均为n级排列。

例5 若$(-1)^{N(i432k)+N(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$是5阶行列式$\left|a_{ij}\right|$的一项，则$i, j, k$应为何值？此时该项的符号是什么？

解 由行列式定义，每一项中的元素取自不同行不同列，故有$j=3$，且有$i=1$时$k=5$，或$i=5$时$k=1$。

当$i=1, j=3, k=5$时，$N(14325)+N(52314)=9$，该项前为负号，即$-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$；

当$i=5, j=3, k=1$时，$N(54321)+N(52314)=16$，该项前为正号，即$a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$。

§1.2 行列式的性质

将行列式D的行与列互换后得到的行列式，称为D的转置行列式，记为D^T或D'，即若$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则