

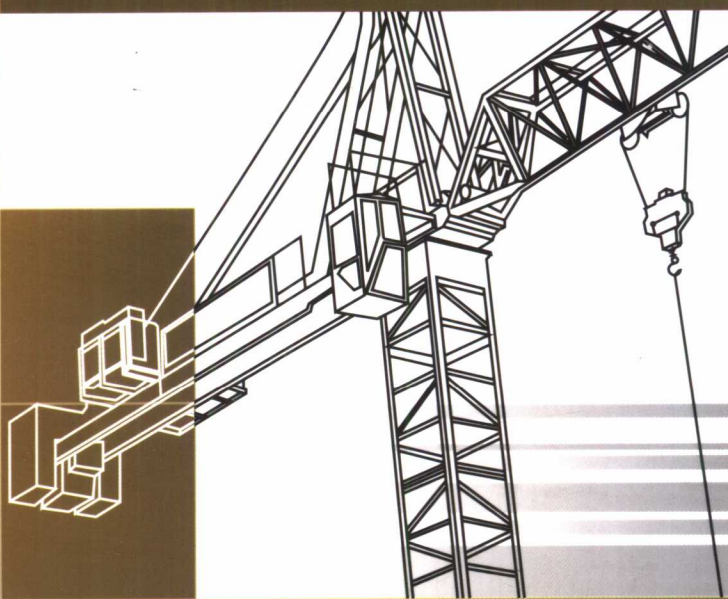


21st CENTURY

实用规划教材

21世纪全国应用型本科

土木建筑系列 实用规划教材



有限单元法

主 编	丁 科	陈月顺
副主编	童智能	刘建军
主 审	周金枝	

41.82
5-2



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材

有 限 单 元 法

主 编	丁 科	陈月顺
副主编	童智能	刘建军
主 审	周金枝	



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书主要介绍了有限元方法的基本理论和方法。全书按照由浅入深、由简单到复杂的原则,介绍了杆系结构、平面问题、空间轴对称问题、薄板弯曲问题、结构振动问题的有限元理论与分析方法。为了便于学生对相关知识的回顾与应用,书后附录还介绍了矩阵的基本知识、线性方程组的计算方法以及弹性理论的有关知识。

本书着重于基本概念、原理和方法的阐述,并通过一定数量的例题和应用实例以加深学生对书中的内容的理解。每章之后均有一定量的习题,可供课外选用或参考。

本书可以作为土木、水利、机械等工科专业本科学生学习有限元方法的教材,也可作为科技工作者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法/丁科,陈月顺主编. —北京:北京大学出版社, 2006.1

(21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材)

ISBN 7-301-10435-9

I. 有… II. ① 丁… ② 陈… III. 有限单元法—高等学校—教材 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 158919 号

书 名: 有限单元法

著作责任者: 丁科 陈月顺 主编

策 划 编 辑: 吴迪 李昱涛

责 任 编 辑: 黄平山

标 准 书 号: ISBN 7-301-10435-9/TU · 0020

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> <http://www.pup6.com>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667

电 子 信 箱: pup_6@163.com

排 版 者: 北京东方人华北大彩印中心 电话: 62754190

印 刷 者: 河北涿县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 11.25 印张 249 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 17.00 元

《21 世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材》

专家编审委员会

主 任 彭少民

副主任 (按拼音顺序排名)

陈伯望 金康宁 李 忱 李 杰

罗迎社 彭 刚 许成祥 杨 勤

俞 晓 袁海庆 周先雁

委 员 (按拼音顺序排名)

邓寿昌 付晓灵 何放龙 何培玲

李晓目 李学罡 刘 杰 刘建军

刘文生 罗 章 石建军 许 明

严 兵 张泽平 张仲先

丛书总序

我国高等教育发展迅速,全日制高等学校每年招生人数至2004年已达到420万人,毛入学率19%,步入国际公认的高等教育“大众化”阶段。面临这大规模的扩招,教育事业的发展与改革坚持以人为本的两个主体:一是学生,一是教师。教学质量的提高是在这两个主体上的反映,教材则是两个主体的媒介,属于教学的载体。

教育部曾在第三次新建本科院校教学工作研讨会上指出:“一些高校办学定位不明,盲目追求上层次、上规格,导致人才培养规格盲目拔高,培养模式趋同。高校学生中‘升本热’、‘考硕热’、‘考博热’持续升温,应试学习倾向仍然比较普遍,导致各层次人才培养目标难于全面实现,大学生知识结构不够合理,动手能力弱,实际工作能力不强。”而作为知识传承载体的教材,在高等教育的发展过程中起着至关重要的作用,但目前教材建设却远远滞后于应用型人才培养的步伐,许多应用型本科院校一直沿用偏重于研究型的教材,缺乏针对性强的实用教材。

近年来,我国房地产行业已经成为国民经济的支柱产业之一,随着本世纪我国城市化的大趋势,土木建筑行业对实用型人才的需求还将持续增加。为了满足相关应用型本科院校培养应用型人才的教学需求,从2004年10月北京大学出版社第六事业部就开始策划本套丛书,并派出10多位编辑分赴全国近30个省份调研了两百多所院校的课程改革与教材建设的情况。在此基础上,规划出了涵盖“大土建”六个专业——土木工程、工程管理、建筑学、城市规划、给排水、建筑环境与设备工程的基础课程及专业主干课程的系列教材。通过2005年1月份在湖南大学的组稿会和2005年4月份在三峡大学的审纲会,在来自全国各地几十所高校的知名专家、教授的共同努力下,不但成立了本丛书的编审委员会,还规划出了首批包括土木工程、工程管理及建筑环境与设备工程等专业方向的40多个选题,再经过各位主编老师和参编老师的艰苦努力,并在北京大学出版社各级领导的关心和第六事业部的各位编辑辛勤劳动下,首批教材终于2006年春季学期前夕陆续出版发行了。

在首批教材的编写出版过程中,得到了越来越多的来自全国各地相关兄弟院校的领导和专家的大力支持。于是,在顺利运作第一批土建教材的鼓舞下,北京大学出版社联合全国七十多家开设有土木建筑相关专业的高校,于2005年11月26日在长沙中南林学院召开了《21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材》(第二批)组稿会,规划了①建筑学专业;②城市规划专业;③建筑环境与设备工程专业;④给排水工程专业;⑤土木工程专业道路、桥梁、地下、岩土、矿山课群组近60多个选题。至此,北京大学出版社规划的“大土木建筑系列教材”已经涵盖了“大土建”的6个专业,是近年来全国高等教育出版界唯一一套完全覆盖“大土建”六个专业方向的系列教材,并将于2007年全部出版发行。

我国高等学校土木建筑专业的教育,在国家教育部和建设部的指导下,经土木建筑专业指导委员会六年来的研讨,已经形成了宽口径“大土建”的专业发展模式,明确了土木建筑专业教育的培养目标、培养方案和毕业生基本规格,从宽口径的视角,要求毕业生能从事土木工程的设计、施工与管理工作。业务范围涉及房屋建筑、隧道与地下建筑、公路

与城市道路、铁道工程与桥梁、矿山建筑等,并且制定一整套课程教学大纲。本系列教材就是根据最新的培养方案和课程教学大纲,由一批长期在教学第一线从事教学并有多年工程经验和丰富教学经验的教师担任主编,以定位“应用型人才培养”为目标而编撰,具有以下特点:

(1) 按照宽口径土木工程专业培养方案,注重提高学生综合素质和创新能力,注重加强学生专业基础知识和优化基本理论知识结构,不刻意追求理论研究型教材深度,内容取舍少而精,向培养土木工程师从事设计、施工与管理的应用方向拓展。

(2) 在理解土木工程相关学科的基础上,深入研究各课程之间的相互关系,各课程教材既要反映本学科发展水平,保证教材自身体系的完整性,又要尽量避免内容的重复。

(3) 培养学生,单靠专门的设计技巧训练和运用现成的方法,要取得专门实践的成功是不够的,因为这些方法随科学技术的发展经常在改变。为了了解并和这些迅速发展的方法同步,教材的编撰侧重培养学生透析理解教材中的基本理论、基本特性和性能,又同时熟悉现行设计方法的理论依据和工程背景,以不变应万变,这是本系列教材力图涵盖的两个方面。

(4) 我国颁发的现行有关土木工程类的规范及规程,系1999~2002年完成的修订,内容有较大的取舍和更新,反映了我国土木工程设计与施工技术的发展。作为应用型教材,为培养学生毕业后获得注册执业资格,在内容上涉及不少相关规范条文和算例。但并不是规范条文的释义。

(5) 当代土木工程设计,越来越多地使用计算机程序或采用通用性的商业软件,有些结构特殊要求,则由工程师自行编写程序。本系列的相关工程结构课程的教材中,在阐述真实结构、简化计算模型、数学表达式之间的关系的基础上,给出了设计方法的详细步骤,这些步骤均可容易地转换成工程结构的流程图,有助于培养学生编写计算机程序。

(6) 按照科学发展观,从可持续发展的观念,根据课程特点,反映学科现代新理论、新技术、新材料、新工艺,以社会发展和科技进步的新近成果充实、更新教材内容,尽最大可能在教材中增加了这方面的信息量。同时考虑开发音像、电子、网络等多媒体教学形式,以提高教学效果和效率。

衷心感谢本套系列教材的各位编著者,没有他们在教学第一线的教改和工程第一线的辛勤实践,要出版如此规模的系列实用教材是不可能的。同时感谢北京大学出版社为我们广大编著者提供了广阔的平台,为我们进一步提高本专业领域的教学质量和教学水平提供了很好的条件。

我们真诚希望使用本系列教材的教师和学生,不吝指正,随时给我们提出宝贵的意见,以期进一步对本系列教材进行修订、完善。

本系列教材配套的PPT电子教案在出版社相关网站上提供下载。

《21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材》

专家编审委员会

2006年1月

前 言

有限元方法作为一种数值计算方法已经在土木、机械、航空航天、热传导、电磁场、原子工程、生物医学工程等众多学科领域得到了广泛应用,成为人们进行科学研究、工程计算、工程设计等的重要手段。

本书可以作为土木、水利、机械等工科专业本科学生学习有限元方法的教材。本书依次介绍了杆系结构、平面问题、空间轴对称问题、平板弯曲问题、结构振动问题的有限元方法。在编写时力求概念清晰、简明扼要、系统性强,遵循由简单到复杂、由浅入深的原则。

本书共分7章,各章的主要内容简单介绍如下:

第1章主要介绍有限单元法的概念,利用有限单元法分析问题的基本思想,有限单元法的历史发展过程和发展趋势,有限单元法在实践工作中的应用,并对目前常用的有限单元分析软件进行了简单的介绍。

第2章以杆系结构为例,介绍了有限单元法的分析步骤。主要分析了单元刚度矩阵的建立方法,局部坐标系下的单元矩阵转换为整体坐标系下单元矩阵的方法,以及如何由单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵,等效结点荷载的求取方法,如何用计算机实现对平面结构的有限单元分析。

第3章结合平面三角形单元和矩形单元这两种基本单元对弹性力学平面问题的有限元方法进行了介绍。从位移场的选取、单元刚度矩阵的建立、等效结点荷载的计算、整体分析等方面详细介绍了有限元方法的分析过程。同时,对平面问题的程序设计方法进行了介绍,并对程序结构进行了分析。

第4章简单介绍了运用三角形单元对空间轴对称问题进行有限元分析的方法和过程,包括位移函数的选取、单元刚度矩阵的建立等。

第5章介绍了平面等参单元和空间轴对称等参单元。

第6章就平板弯曲问题的有限元分析进行了介绍。其中分别运用三角形单元、矩形单元、八结点四边形等参单元等单元划分形式对平板弯曲问题进行了介绍,包括位移模式、单元分析、整体分析、等效结点荷载计算等方面。

第7章介绍了结构的振动问题,包括结构振动方程的建立、结构振动的特性与应用、结构动力响应的有限元分析等内容。

为了便于学生对以往知识的回顾与应用,本书最后还介绍了矩阵的基本知识、线性方程组的计算方法以及弹性理论的有关知识。

根据教学实践的需要,全部讲授本书大约需要60学时(包括约16学时的上机实验)。各学校可以根据自己的实际情况并结合各专业的特点讲授其中的部分内容。

由于编者水平有限,书中缺点、错误在所难免,恳切期望读者予以批评指正,在此深表感谢!

编 者

2006年1月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 有限元方法概述	1
1.2 有限元方法的发展历史	2
1.3 有限元方法的分析过程及应用	3
1.3.1 有限元方法的特性	3
1.3.2 有限元方法的分析过程	4
1.3.3 有限元方法的应用	4
1.4 常用的有限元软件简介	5
第 2 章 杆系结构的有限元法分析	9
2.1 概述	9
2.2 局部坐标系中的杆单元分析	11
2.2.1 拉压杆单元	11
2.2.2 扭转杆单元	13
2.2.3 只计弯曲的杆单元	14
2.2.4 平面一般杆件单元	15
2.2.5 空间杆件单元	17
2.2.6 单元刚度矩阵的性质	19
2.3 杆系结构的整体分析	20
2.3.1 平面问题坐标变换矩阵	20
2.3.2 空间问题坐标变换矩阵	22
2.3.3 杆系结构的整体分析	24
2.4 等效结点荷载和边界条件的处理	30
2.4.1 非结点荷载的处理	30
2.4.2 边界条件的处理	32
2.5 杆系结构分析算例	33
2.6 程序设计方法	40
2.6.1 结构化与模块化程序设计方法	40
2.6.2 杆系结构基本处理模块	43
习题	44
第 3 章 弹性力学平面问题的有限元分析	49
3.1 平面问题有限元模型及单元划分	49
3.2 平面三角形单元	50
3.2.1 位移函数选取	50

3.2.2 单元应变场的表达	52
3.2.3 单元应力场的表达	53
3.2.4 单元刚度矩阵	53
3.2.5 等效结点荷载	55
3.2.6 整体刚度矩阵	57
3.2.7 约束条件的处理	59
3.3 平面矩形单元	61
3.3.1 单元位移场	61
3.3.2 单元应变场	62
3.3.3 单元应力场	63
3.3.4 单元刚度矩阵	63
3.4 平面问题程序设计	64
3.4.1 对称性及其利用	65
3.4.2 带宽与结点编号	67
3.4.3 程序结构	68
习题	71
第4章 空间轴对称问题有限元分析	74
4.1 概 述	74
4.2 三角形单元	75
4.2.1 位移函数的选取	75
4.2.2 单元刚度矩阵	76
4.2.3 等效结点荷载的计算	78
习题	78
第5章 等参单元	80
5.1 等参单元的概念	80
5.2 平面等参单元	81
5.2.1 直四边形等参单元	81
5.2.2 曲四边形等参单元	83
5.3 空间轴对称等参单元	85
5.3.1 单元刚度矩阵	85
5.3.2 等效结点荷载计算	87
习题	87
第6章 平板弯曲问题的有限元分析	90
6.1 薄板受弯分析的基本方程	90
6.1.1 基本假设	90
6.1.2 几何方程	90
6.1.3 物理方程	92

6.2 三角形单元	94
6.2.1 位移模式问题	94
6.2.2 面积坐标下的位移模式	95
6.2.3 单元分析	98
6.3 矩形板单元	101
6.3.1 结点位移与结点力	101
6.3.2 位移模式	102
6.3.3 应力分析	105
6.3.4 单元刚度矩阵	106
6.3.5 等效结点荷载的计算	107
6.4 八结点四边形等参单元	108
6.4.1 八结点 Hencky 板单元的位移模式	108
6.4.2 八结点板单元的构成	109
习题	111
第 7 章 结构振动问题的有限元分析	113
7.1 概述	113
7.2 结构振动方程	114
7.2.1 单元的运动方程	114
7.2.2 结构的动力方程	116
7.3 结构振动的特性及其应用	116
7.3.1 集中质量矩阵	117
7.3.2 一致质量矩阵	119
7.3.3 堆聚质量矩阵	121
7.3.4 阻尼矩阵	122
7.3.5 运动方程的简化	122
7.4 结构振动固有频率和动力响应的有限元法	124
7.4.1 特征问题	124
7.4.2 振型的性质	125
7.4.3 动力响应振动分析法	126
7.5 结构动力分析实例	129
习题	131
附录 A 矩阵的基本知识	135
A.1 矩阵的定义和几种特殊的矩阵	35
A.2 矩阵代数与矩阵的转置	137
A.3 矩阵的秩数与初等变换	140
A.4 方阵的逆矩阵	142
A.5 分块矩阵及其运算	144

附录 B 线性代数方程组的计算方法	148
B.1 Cramer 法则和矩阵方法	148
B.2 Gauss 消去法	149
B.3 Gauss 主元素消去法	154
B.4 Gauss-Jordan 消去法	156
附录 C 弹性理论有关方程的矩阵表示	159
C.1 运动方程(内力与体积力的关系)	159
C.2 几何方程(应变与位移的关系)	159
C.3 本构关系(物理方程——应力与应变的关系)	160
C.4 变形协调方程	161
C.5 边界条件	162
C.6 势能驻值原理	162
参考文献	166

第 1 章 绪 论

教学提示：有限单元法（本书称为“有限元方法”）是绝大多数科学研究和工程计算领域求解非线性问题的一种被广泛应用的有效手段。其实质是将复杂的连续体划分为有限多个简单的单元体，通过化整为零，再集零为整的思想对复杂问题进行分析。本章介绍了有限元方法分析问题的基本思想、有限元方法的发展过程和发展趋势、有限元方法在实际工作中的应用。

教学要求：本章要求学生了解有限元法的基本思想，有限元方法的发展过程和发展趋势，掌握有限元方法分析问题的基本过程，并对目前常用的有限元分析软件有一定的了解。

1.1 有限元方法概述

有限元方法（Finite Element Method）是力学、数学物理学、计算方法、计算机技术等多种学科综合发展和结合的产物。在人类研究自然界的三大科学研究方法（理论分析、科学实验、科学计算）中，对于大多数新型领域，由于科学理论和科学实验的局限性，科学计算成为一种最重要的研究手段。在大多数工程研究领域，有限元方法是进行科学计算的极为重要的方法之一；利用有限元方法几乎可以对任意复杂的工程结构进行分析，获取结构的各种机械性能信息，对工程结构进行评判，对工程事故进行分析。如 1990 年 10 月，美国波音公司开始在计算机上对新型客机 B-777 进行无纸化设计，仅用三年多时间，在 1994 年 4 月，第一架 B-777 飞机就试飞成功了。在 B-777 的结构设计和评判过程中，就大量采用了有限元方法这一重要手段，并在设计过程中起到了极为关键的作用。

人们对各种力学问题进行分析、求解，其方法归结起来可以分为解析法（Analytical Method）和数值法（Numeric Method）。如果给定一个问题，通过一定的推导可以用具体的表达式来获得问题的解答，这样的求解方法就称为解析法。但由于实际结构物的复杂性，除了少数非常简单的问题外，绝大多数科学研究和工程计算问题用解析法求解是非常困难的。因此，数值法求解便成为了一种不可替代的广泛应用的方法，并得到了不断的发展，如有限元方法、有限差分法、边界元方法等都属于数值求解方法。其中有限元方法是 20 世纪中期伴随着计算机技术的发展而迅速发展起来的一种数值分析方法，它的数学逻辑严谨，物理概念清晰，应用非常广泛，能灵活处理和求解各种复杂的问题。有限元方法采用矩阵形式来表达基本公式，便于计算机编程，这些优点赋予了它强大的生命力。

有限元方法的实质是将复杂的连续体划分为有限多个简单的单元体（如图 1.1 所示），化无限自由度问题为有限自由度问题，将连续场函数的（偏）微分方程的求解问题转化成有限个参数的代数方程组的求解问题。用有限元方法分析工程结构问题时，将一个理想体离散化后，如何保证其数值解的收敛性和稳定性是有限元理论讨论的主要内容之一，而数值解的收敛性与单元的划分及单元形状有关。在求解过程中，通常以位移为基本变量，使

用虚位移原理或最小势能原理来求解。

有限元方法的基本思想是先化整为零、再积零为整，也就是把一个连续体人为分割成有限个单元；即把一个结构看成由若干通过结点相连的单元组成的整体，先进行单元分析，然后再把这些单元组合起来代表原来的结构进行整体分析。从数学的角度来看，有限元方法是把一个偏微分方程化成一个代数方程组，然后利用计算机进行求解的方法。由于有限元法采用了矩阵算法，因此借助计算机便可以快速地算出结果。

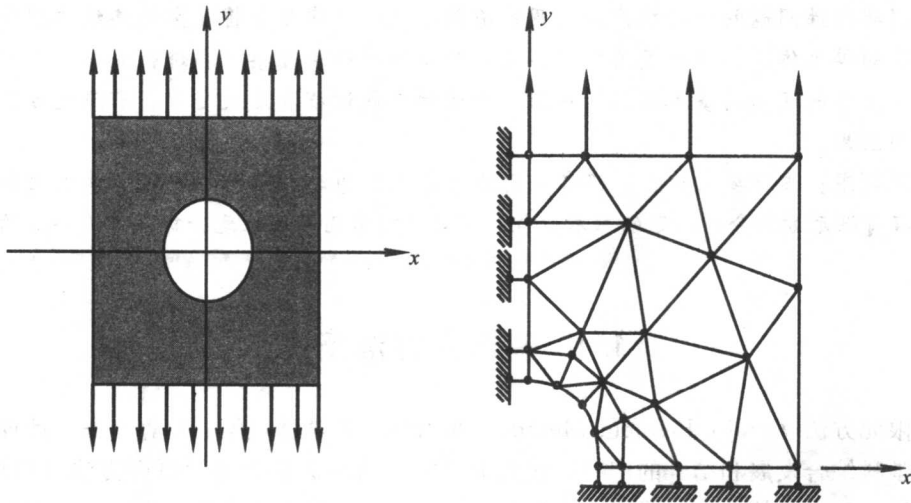


图 1.1 单元划分示意图

1.2 有限元方法的发展历史

有限元方法基本思想的提出，通常认为始于 20 世纪 40 年代。其实早在公元 3 世纪的时候，我国数学家刘徽提出的用割元法求圆周长的方法就是有限元基本思想的体现。经典结构力学求解刚架内力的位移法，将刚架看成是由有限个在结点处连接的杆件单元组成，先研究每个杆件单元，最后将其组合进行综合分析。这种先离散、后整合的方法便是有限元方法的基本思想。

1941 年，雷尼柯夫 (Hrenikoff) 首次提出用框架方法求解力学问题，但这种方法仅限于用杆系结构来构造离散模型。1943 年，柯兰特 (Courant) 发表了一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文，第一次假设挠曲函数在一个划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数。这是第一次用有限元方法处理连续体问题。

20 世纪 50 年代，由于航空事业的飞速发展，对飞机结构提出了愈来愈高的要求，这就需要更精确的设计和计算。1955 年，德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文，奠定了有限元方法的理论基础。1956 年，特纳 (Turner)、克拉夫 (Clough)、马丁 (Martin) 和托普 (Top) 等将刚架分析中的位移法扩展到弹性力学平面问题，并用于飞机的结构分析和设计，系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式，并求得了平面应力问题的正确解答。他们的研究工作开始了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段。

1960年,克拉夫(Clough)在处理剖面弹性问题时,第一次提出并使用“有限元方法”的名称,使人们进一步认识到这一方法的特性和功效。此后,大量学者、专家开始使用这一离散方法来处理结构分析、流体分析、热传导、电磁学等复杂问题。从1963年到1964年,贝塞林(Besseling)、卞学璜(T. H. Pian)等人的研究工作表明,有限元方法实际上是弹性力学变分原理中瑞雷—里兹法的一种形式,从而在理论上为有限元方法奠定了数学基础。但与变分原理相比,有限元方法更为灵活,适应性更强,计算精度更高。这一成果也大大刺激了变分原理的研究和发展,先后出现了一系列基于变分原理的新型有限元模型,如混合元、非协调元、广义协调元等。1967年,Zienkiewicz和Cheung出版了第一本关于有限元分析的专著。

20世纪70年代后,随着计算机技术和软件技术的发展,有限元方法进入了发展的高速期。在这一时期,人们对有限元方法进行了深入研究,涉及内容包括数学和力学领域所依据的理论,单元划分的原则,形函数的选取,数值计算方法及误差分析、收敛性和稳定性研究,计算机软件开发,非线性问题,大变形问题等。1972年,Oden出版了第一本处理非线性连续体的专著。在有限元方法发展过程中,我国科技工作者也做出过杰出贡献,并得到了国际学术界的认可,如胡昌海提出了广义变分原理,钱伟长最先研究了拉格朗日乘子法与广义变分原理之间的关系,冯康研究了有限元方法的精度和收敛性问题,钱令希研究了余能原理等。

随着有限元方法不断发展和完善,目前已成为一门成熟的学科,并已扩展到其他研究领域,成为了科技工作者解决实际问题的有力工具。

1.3 有限元方法的分析过程及应用

有限元方法从20世纪40年代开始至今,已经过60多年的发展和创新,其应用领域不断扩大,已由最初的杆件结构问题扩展到了弹性力学、粘弹性力学、塑性力学问题,由平面问题扩展到空间问题,由静力学问题扩展到动力学稳定性分析问题,由线性问题到非线性问题,从固体力学到流体力学、空气动力学、热力学、电磁学等问题。现在,有限元方法已成为科技工作者进行科学研究、解决工程技术问题的强有力的工具。

1.3.1 有限元方法的特性

(1) 对于复杂几何形态构件的适应性。由于有限元方法的单元划分在空间上可以是一维、二维、三维,并且可以有不同形状,如二维单元可以为三角形、四边形,三维单元可以是四面体、五面体、六面体等,同时各种单元可以有不同连接形式。因此,实际应用中遇到的任何复杂结构或构造都可以离散为有限个单元组成的集合体。

(2) 对各种构型问题都有可适应性。有限元方法已由最初的杆件结构问题发展到目前的弹塑性问题、粘弹塑性问题、动力问题,可以应用于流体力学、热力学、电磁学、空气动力学问题,并且可以解决复杂的非线性问题。

(3) 理论基础的可靠性。有限元方法的理论基础是变分原理、能量守恒原理,它们在数学上、物理上都得到了可靠的证明。只要研究问题的数学模型建立适当,实现有限元方程的算法稳定收敛,则求得的解是真实可靠的。

(4) 计算精度的可信性。只要所研究问题本身是有解的, 在相同条件下随着单元数目的增加, 有限元方法的计算精度将不断提高, 近似解不断趋近于精确解。

(5) 计算的高效性。由于有限元分析的各个步骤可用矩阵形式表示, 所以最终的求解就归结为标准的矩阵代数问题, 将许多复杂的微分、偏微分方程的求解问题转化为求解代数方程组问题, 特别适合于用计算机进行编程计算。

1.3.2 有限元方法的分析过程

1. 结构物的离散化

有限元方法的基础思想是化整为零, 分散分析, 再集零为整。因此, 对一个结构物进行有限元分析的第一步是将其进行离散, 也就是根据求解问题的不同精度要求、效能要求等诸多因素, 将整个结构划分为有限个单元, 单元与单元之间、单元与边界之间通过结点连接。

在进行离散时, 必须注意以下三点: ① 单元类型的选择, 包括单元形状、结点数、结点自由度等几个方面; ② 单元划分应有一定的规律性, 以便于计算自动生成网络, 并且有利于以后对网络进行加密处理; ③ 同一单元应由同一种材料组成。

2. 进行单元分析

单元分析就是将离散化后的每个单元看作一个研究对象, 研究结点位移与结点力之间的关系, 包括以下两方面的内容:

1) 确定单元的位移模式

对于位移型有限元方法, 单元的位移模式就是将单元中任意一点的位移用单元的结点位移来计算, 而单元位移可以表示成结点位移的函数。位移函数的假设是否合理, 直接影响到有限元分析的计算精度、效率和可靠度。

2) 分析单元特性

在建立了单元的位移函数之后, 可以根据应力、应变、位移之间的关系, 利用虚位移原理或最小势能原理, 建立单元杆端力和杆端位移之间的关系, 从而得到单元刚度矩阵。这一步还必须将单元上的荷载等效为结点荷载, 进行单元分析实际上是建立单元刚度矩阵和等效结点荷载矩阵的过程。

3. 整体分析

在确定了每个单元的单元刚度方程之后, 可以将各单元集合成整体结构进行分析, 建立起表示整个结构结点平衡的方程组, 即整体刚度方程。然后引入结构的边界条件, 对方程组进行求解, 得出结点位移, 并进而求出各单元的内力和变形。

1.3.3 有限元方法的应用

经过 60 多年的发展, 有限元方法的应用范围经历了由杆状构件问题发展到弹性力学平面问题, 并进一步扩展到空间问题、板壳问题; 由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题。研究的对象从弹性材料扩展到弹塑性、粘弹性、粘塑性复合

材料问题,由研究小变形问题扩展到研究大变形问题,由简单的线性问题扩展到复杂的非线性问题。从固体力学扩展到流体力学、热传导、电磁学等连续介质领域。可以说,有限元方法作为一种数值计算方法已渗透到了科学、工程的方方面面,成为人们进行科学研究、工程计算、工程设计的重要手段。

如今,有限元方法的应用不只局限在固体力学领域,可以说,有限元法可以解决几乎所有的连续介质和场的问题。在机械工程、土木工程、航空结构、热传导、电磁场、流体力学、流体动力学、地质力学、原子工程和生物医学工程等各个领域得到了越来越广泛的应用。

根据有限元求解问题的性质,可以把它的应用中分为三类:① 平衡问题——不依赖时间的问题,即稳态问题;② 特征值问题——固体力学和流体力学的特征值问题是平衡问题的推广;③ 瞬态问题——即随时间变化的问题。

在工程实践中,有限元分析软件与 CAD 系统的集成应用使设计水平发生了质的飞跃,主要表现在以下几个方面:① 增加了设计功能,减少了设计成本;缩短了设计和分析的循环周期;② 增加了产品和工程的可靠性;③ 采用优化设计,降低了材料的消耗或成本;④ 在产品制造或工程施工前可以预先发现潜在的问题;⑤ 模拟各种试验方案,减少试验时间和经费;⑥ 可以进行机械事故分析,查找事故原因。

在大力推广 CAD 技术的今天,从自行车到航天飞机,所有的设计制造都离不开有限元分析计算,有限元分析在工程设计和分析中将得到越来越广泛的重视。

在结构工程、航空工程等领域,人们常用有限元方法来对梁、板壳进行结构分析,对各种复杂结构进行二维、三维应力分析,研究应力波的传播特性,各种结构对于非周期荷载的动态响应,以及对结构进行稳定性分析、研究结构的固有频率和振型等。

在土力学、岩石力学、基础工程学等领域,有限元方法用来研究填筑和开挖问题、边坡稳定性问题、土壤与结构的相互作用,坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的应力分析,以及研究土壤与结构的动态相互作用,应力波在土壤和岩石中的传播等问题。

在流体力学、水利工程学等领域,有限元方法用来研究流体的势流、流体的粘性流动、蓄水层和多孔介质中的定常(非定常)渗流、水工结构和大坝,流体在土壤和岩石中的稳态渗流,波在流体中传播,污染的扩散问题。

在电磁学、热传导领域,有限元方法用来研究固体和流体中的稳态温度分布、瞬态热流问题,以及进行二维、三维时变、高频电磁场分析等。

1.4 常用的有限元软件简介

随着现代科学技术的发展,人们正在不断建造更为快速的交通工具、更大规模的建筑物、更大跨度的桥梁、更大功率的发电机组和更为精密的机械设备。这一切都要求工程师在设计阶段就能精确地预测出产品和工程的技术性能,因此需要对结构的静、动力强度以及温度场、流场、电磁场和渗流等技术参数进行分析计算。例如:分析计算高层建筑和大跨度桥梁在地震时所受到的影响,看看是否会发生破坏性事故;分析计算核反应堆的温度场,确定传热和冷却系统是否合理;分析涡轮机叶片内的流体动力学参数以提高其运转效率。这些都可归结为求解物理问题的控制偏微分方程式,但这些问题通过解析计算来解决

往往是不现实的,而通过有限元方法和计算机的结合就能很好地解决这些问题。因此供计算机使用的有限元软件几乎是随着有限元方法同时发展起来的。有限元软件的应用极大地提高了力学学科解决自然科学和工程实际问题的能力,并进一步促进了有限元方法的发展。

有限元软件可以分为通用软件和专用软件两类。通用软件适应性广,规格规范,输入方法简单,有比较成熟齐全的单元库,大多数还提供了二次开发的接口。但通用程序功能再强,对于一些比较特殊的问题,尤其是处于研究阶段的问题,往往显得无能为力;因此,针对某些特定领域、特定问题开发的专用软件,在解决专有问题时显得更为有效。

目前常用的有限元软件有:ANSYS、MARC、ABQUS、NASTRAN、ADINA、ALGOR、SAP、STRAND、FEPC等。

1) ANSYS

ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由美国 ANSYS 公司(世界上最大的有限元分析软件公司之一)开发,它能与多数 CAD 软件接口,实现数据的共享和交换,如 Pro/EngiNeer, NASTRAN, ALGOR, I-DEAS, AutoCAD 等,是现代产品设计领域中的高级 CAD 工具之一。

该软件主要包括三个部分:前处理模块、分析计算模块和后处理模块。前处理模块提供了一个强大的实体建模及网格划分工具,用户可以方便地构造有限元模型;分析计算模块包括结构分析(可进行线性分析、非线性分析和高度非线性分析)、流体动力学分析、电磁场分析、声场分析、压电分析以及多物理场的耦合分析,可模拟多种物理介质的相互作用,具有灵敏度分析及优化分析能力;后处理模块可将计算结果以彩色等值线显示、梯度显示、矢量显示、粒子流迹显示、立体切片显示、透明及半透明显示(可看到结构内部)等图形方式显示出来,也可将计算结果以图表、曲线形式显示或输出。该软件还提供了 100 种以上的单元类型,用来模拟工程中的各种结构和材料。该软件有多种不同版本,可以在从个人计算机到大型计算机等多种计算机设备上运行。

2) MARC

MARC 具有极强的结构分析能力,可以进行各种线性和非线性结构分析,包括:线性/非线性静力分析、模态分析、简谐响应分析、频谱分析、随机振动分析、动力响应分析、自动的静/动力接触、屈曲/失稳、失效和破坏分析等。它提供了丰富的结构单元、连续单元和特殊单元的单元库,几乎每种单元都具有处理大变形几何非线性、材料非线性和包括接触在内的边界条件非线性以及组合的高度非线性的超强能力。

3) ABQUS

ABQUS 是美国 HKS 公司的产品,它是一套先进的通用有限元分析软件,也是功能最强的有限元软件之一,可以分析复杂的固体力学和结构力学系统。ABQUS 有两个主要分析模块:Standard 模块和 Explicit 模块,其中 Standard 分析模块提供了通用的分析能力,如对应力和变形、热交换、质量传递等问题的分析能力;Explicit 分析模块应用了对时间进行显示积分求解的方法,为处理复杂接触问题提供了有力的工具,适合于分析短暂、瞬时的动态事件。

4) MSC 系列产品

美国 MSC 公司是全球最大的工程校验,有限元分析和计算机仿真软件的开发商,该