21世纪高等学校本科数学规划教材

高等数学学习辅导

（理工类）上册

Advanced Mathematics Guidance

東北大學出版社
Northeastern University Press

21 世纪高等学校本科数学规划教材

高等数学学习辅导

Advanced Mathematics Guidance

（理 工 类）

上 册

东北大学出版社

·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导（理工类）上册/熊静宜，李友国，王学理主编．—沈阳：东北大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-81102-379-4

Ⅰ．高… Ⅱ．①熊… ②李… ③王… Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 129831 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：12.25

字　　数：366 千字

出版时间：2007 年 8 月第 1 版

印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：刘乃义　刘宗玉　　　责任校对：文　浩

封面设计：唐敏智　　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-379-4　　　定　价：20.00 元

前　言

大学数学是高等院校理工、经管等各类学生必修的基础课，又是“考研”的统考科目，所以一直深受学生们的重视．作为多年工作在大学数学教学第一线的教师，我们深知学生们对数学课的重视程度，以及对一本好的数学辅导书的渴求．对于刚刚走入大学校门的新生来说，一是对大学自主学习的学习方式不太适应，二是大学数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心．正是出于这些考虑，我们以东北大学出版社出版的“21世纪高等学校本科数学规划教材”为蓝本，编写出与其配套的学习辅导书．但同时这套数学辅导书又是从各自体系、内容出发，相对独立，因此也可以供使用其他教材的学生使用．编写这套数学辅导书的目的是让学生熟悉自主学习思路，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对所学课程的学习进行全面指导，力求取得“用时少，成绩好”之效果．

本书为“21世纪高等学校本科数学规划教材”中《高等数学（理工类）上册》的辅导书，全书共六章，每章均有内容精要、归类解析、习题详解、同步测试四部分，具体是：

1．内容精要　包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式．

2．归类解析　是将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧．

3．习题详解　对教材中出现的所有习题均给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用．

4．同步测试　每章都安排同步测试题一套，用时2小时．同步测试的目的在于巩固所学知识，并找出差距．

由于作者水平有限，书中可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教．如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一定作用的话，我们将深感欣慰．

作　者

2007年2月

《高等数学学习辅导（理工类）上册》编写人员

主　　　　编：熊静宜　李友国　王学理

副　主　编：刘彦凯　杨万必　樊　石

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王　萍　许海洋　费罗曼

目　　录

第一章　函数的极限与连续

一、内容精要

(一) 主要定义

1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合(简称集)，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

2. 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 f: $X\rightarrow Y$，其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的象，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 则称为元素 y(在映射 f 下)的一个原象.

3. 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 f: $D\rightarrow\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$.

4. 如果存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$在 X 上无界.

5. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a)，记作 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}x_n=a$.

极限不存在时，则称 $\{x_n\}$ 发散.

6. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}f(x)=A$.

注　在此定义中，若将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则 A 称为 $f(x)$当 $x\rightarrow x_0-0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\rightarrow x_0-0}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

类似地可以定义右极限 $f(x_0+0)$.

7. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$当 $x\rightarrow\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}f(x)=A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}f(x)=A$ 的定义.

8. 如果 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$是当 $x\rightarrow x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}f(x)=\infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$ 等的定义.

注　当 $x\rightarrow x_0$ 和 $x\rightarrow\infty$ 结论都成立时，以后简记作“lim”. 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

9. 若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的高阶无穷小，记作

$\alpha(x)=o(\beta(x))$. 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的低阶无穷小. 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的同阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

10. 函数最简单性态

(1) 若 $f(x)=f(-x)$，$x\in(-l, l)$，则称 $f(x)$为偶函数.

(2) 若 $f(x)=-f(-x)$，$x\in(-l, l)$，则称 $f(x)$为奇函数.

(3) 若 $f(x+T)=f(x)$，$x\in(-\infty, +\infty)$，则称 $f(x)$为周期函数，使等式成立的最小的正 T 值称为周期.

(4) 若 $\forall x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$为 D 上的单调增加函数. 类似地可以定义单调减少函数.

(5) 如果存在 $M>0$，对任何 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 上有界，否则称为无界.

11. 若 $y=f(x)$在 x_0 处有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，此处 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

若记 $\Delta x=x-x_0$，则连续定义可以写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不连续时称为间断.

12. 若 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义 (x_0 可以除外)，则具有下列条件之一者即为间断：

(1) $f(x)$在 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

x_0 称为间断点. 具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点. 极限存在的间断点称为可去间断点.

13. 符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

14. 邻域 $U(a, \delta)=\{x\mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$；

去心邻域 $\mathring{U}(a, \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta, \delta>0\}$.

15. 基本初等函数与初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数；由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及复合而得到的，且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

16. 取整函数：设 x 为任一实数，则不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记为$[x]$.

17. 双曲函数：双曲正弦函数为 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，双曲余弦函数为 $\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，双曲正切函数为 $\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(二) 主要结论

1. 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)+g(x)]=A+B,$$

$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

2. 极限存在准则

准则Ⅰ　单调有界数列必有极限.

准则Ⅱ　若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

注　准则Ⅱ亦称夹逼准则，对于函数也成立.

3. 在同一变化过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注　(1) 等价无穷小具有传递性：设 α，β，γ 为同一变化过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程中，若 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$，$\beta\sim\tilde{\beta}$，且 $\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4. $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，此处 $\lim\alpha(x)=0$.

5. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

6. 若在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0$ ($f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$ ($A\leqslant 0$).

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$ ($A<0$)，则必有 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，使在此邻域中 $f(x)>0$ ($f(x)<0$).

注　若 $A=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，此时结论亦真.

8. 若极限存在，则其值必然唯一.

9. 初等函数在其定义区间上连续.

10. 闭区间上连续函数必然有下列性质：

(1) 有最大值与最小值；

(2) 有界；

(3) 满足介值定理，即任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值；

(4) 满足零点定理，即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(三) 结论补充

1. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2. 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

3. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

注　以上三条中的 $\varphi(x)\neq 0$.

4. 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6. 当 $x\to 0$ 时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x},$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,\quad x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\quad a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,\ a\neq 1).$$

注 由 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$ 立刻得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

7. 若

$$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0,$$

且

$$\alpha(x)\sim A(x),\ \beta(x)\sim B(x),$$

则有

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{A(x)}{B(x)}$$

和

$$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}.$$

注 分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不能取 0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

10. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

11. 设 $\lim g(x)=B\neq 0$，则有

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=B\lim f(x),\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{B}\lim f(x).$$

12. **海涅(Heine)定理** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 的充要条件是对任意数列 $\{u_n\}$ ($u_n\neq a$，$n=1,2,\cdots$)，当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(u_n)=b$.

13. 在同一极限过程中，若 $f(x)=o(g(x))$，则 $f(x)+g(x)\sim g(x)$.

14. 设 $y=f(x)$ 是连续函数，则 $y=|f(x)|$ 也是连续函数.

15. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续函数，则

$$\varphi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\},\quad \psi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$$

也都是连续函数.

二、归类解析

(一) 函数的简单性态

1. 函数的定义域

【例 1-1】 求 $f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x^2-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x\neq\pm 1,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $x\geqslant -3$ 且 $x\neq\pm 1$.

【例 1-2】 求 $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{x}{2}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ -1\leqslant \dfrac{x}{2}\leqslant 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2, \\ -2\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 所求函数的定义域为 $x=\pm 2$.

【例 1-3】 求 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+2}{3}+\sqrt{\sin\pi x}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases} \left|\dfrac{x+2}{3}\right|\leqslant 1, \\ \sin\pi x\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\leqslant x\leqslant 1, \\ 2k\pi\leqslant \pi x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in\mathbf{Z}), \end{cases}$ 故 $f(x)$ 的定义域为 $\{-5\}\cup[-4,\ -3]\cup[-2,\ -1]\cup[0,\ 1]$.

2. 函数的求法

【例 1-4】 设 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

【证】 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2}{t^2}+2t^2+5t+\dfrac{5}{t}=f(t)$.

【例 1-5】 若 $f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求

(1) $f(g(x))$； (2) $g(f(x))$； (3) $f(x^2)$； (4) $g(x-1)$.

【解】 (1) $f(g(x))=\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)^2=\left(\dfrac{1-x-1}{x+1}\right)^2=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$；

(2) $g(f(x))=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$；

(3) $f(x^2)=(x^2-1)^2$；

(4) $g(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)+1}=\dfrac{1}{x}$.

【例 1-6】 设 $f(x)$ 满足关系式

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}, \qquad ①$$

求 $f(x)$.

【解】 在所给方程中以 $\dfrac{1}{x}$ 替代 x，得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x+x^2}, \qquad ②$$

以 $x^2\times$②$-2\times$①，得

$$-3f(x)=\frac{-3x}{x+1},$$

从而

$$f(x)=\frac{x}{x+1}.$$

【例 1-7】 已知 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【解】

$$f(f(x))=\begin{cases} 1+f(x), & f(x)<0, \\ 1, & f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

先求 $f(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)<0$ 的区域. 由 $f(x)\geqslant 0$，得 $1+x\geqslant 0$，于是 $x\geqslant -1$；由 $f(x)<0$，得 $1+x<0$，于是 $x<-1$. 所以

$$f(f(x))=\begin{cases} 1+f(x), & x<-1, \\ 1, & x\geqslant -1. \end{cases}$$

又当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x$，故

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

【例 1-8】 欲做一容积为 300m^3 的无盖金属圆柱筒，筒底单位造价是筒壁单位造价的 2 倍，给出筒的总造价与半径的函数关系.

【解】 设周围单位造价为 a，则底面单位造价为 $2a$. 设底面半径为 r，高为 h，则由已知条件有 $\pi r^2h=300$. 设总造价为 y，则

$$y=2a\pi r^2+a\cdot 2\pi rh=2a\pi r^2+2a\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}=2a\pi r^2+\frac{600a}{r}\quad (r\in(0,\ +\infty)).$$

3. 函数的最简单性态

【例 1-9】 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

【证】 $f(-x)=\log_a[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\log_a\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$,

化简后得
$$f(-x)=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$
证毕.

【例 1-10】 证明 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【证】 取 $h>0$，有
$$f(x+h)-f(x)=2^{x+h-1}-2^{x-1}=2^{x-1}(2^h-1),$$
故
$$f(x+h)-f(x)>0,$$
即
$$f(x+h)>f(x),\quad x+h>x,$$
故 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【例 1-11】 求函数 $y=1+\cos\pi x$ 的周期.

【解】 余弦函数的周期为 2π，故 $\cos(\pi x+2\pi)=\cos\pi x$，即 $\cos\pi(x+2)=\cos\pi x$，从而函数 $y=1+\cos\pi x$ 的周期为 2.

(二) 函数的连续性

1. 函数间断点的判定

【例 1-12】 讨论下列函数的连续性，如有间断点，指出其类型：

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-x+1, & x>0.\end{cases}$$

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+1)=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x+1)=1,$

而 $f(0)=0$，即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\neq f(0)$，故 $x=0$ 为函数的间断点，属于第一类间断点，可去型.

【例 1-13】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$的间断点类型.

【解】 当 $x=1$ 时，函数无定义，当 $x=0$ 时，函数也无定义，而函数在 $x=0$，$x=1$ 附近有定义，故 $x=0$，$x=1$ 是函数的间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$的无穷间断点，属于第二类间断点. 又因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=0,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=1,$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$的跳跃间断点，属于第一类间断点.

【例 1-14】 求函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant1,\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的连续区间.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}|x-1|=2,\quad \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$

故 $x=-1$ 是 $f(x)$的跳跃间断点，属于第一类间断点. 又因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}|x-1|=0,\quad f(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

故 $f(x)$在 $x=1$ 处连续. 因此，函数的连续区间是$(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$.

2. 利用连续性确定常数

【例 1-15】 当 a 取何值时，$f(x)=\begin{cases}a+x, & x\leqslant0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 为连续函数?

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x)=a,\quad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1,\quad f(0)=a,$

故 $a=1$ 时 $f(x)$连续.

【例 1-16】 设 $$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(a+b\sin x)}{\sin^2x},$$

若 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，试求 a，b 的值.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\sin^2x=0$，若要函数在 $x=0$ 处有极限，必有

$$\lim_{x\to0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(a+b\sin x)]=0,$$

则 $1-a=0$，即 $a=1$. 将 $f(x)$的分子有理化，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\sin x+\sin^2x})^2-(1+b\sin x)^2}{\sin^2x[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+(1+b\sin x)]}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-2b)\sin x+(1-b^2)\sin^2x}{\sin^2x[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+(1+b\sin x)]},\end{aligned}$$

若要极限存在，必有 $1-2b=0$，即 $b=\frac{1}{2}$.

【例 1-17】 设 $$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant0,\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0,\end{cases}\quad(a>0)$$

问 a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$的连续点.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2},$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

$$f(0)=\frac{1}{2},$$

故若要 $f(x)$连续，应有$\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$，即$\sqrt{a}=1$，而 $a>0$，故 $a=1$.

【例 1-18】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq1,\ x\neq-2,\\ 2, & x=1\end{cases}$

在 $x=1$ 处连续，试求 a，b 的值.

【解】 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，必有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$，即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2}=2,$$

而
$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{4x^3+a}{2x+1}=\frac{4+a}{3}=2,$$

则 $a=2$.

又必有$\lim\limits_{x\to1}(x^4+2x+b)=0$，故 $b=-3$.

总之，当 $a=2$，$b=-3$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处连续.

3. 其他

【例 1-19】 举例说明初等函数在其定义域内未必连续.

【解】 初等函数在其定义域内不一定连续，例如

$$f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$$

是初等函数，而其定义域为离散点集

$$\{x\,|\,x=n\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\},$$

它处处间断. 值得注意的是，初等函数在其定义区间内是连续的.

【例 1-20】 举例说明两个间断函数的和函数不一定间断.

【解】 试看反例，取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant0.\end{cases}$$

显然，它们在 $x=0$ 处都间断，但是 $f(x)+g(x)=0$ 却在 $x=0$ 处连续. 实际上，两个不连续的函数相加、相减、相乘后，可能连续，也可能不连续.

【例 1-21】 若对于任意正实数 x_1，x_2，都有

$$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

且 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，试证 $f(x)$在任一点 $x_0(x_0>0)$处连续.

【证】 设 $x_1=1$，x_2 为任意正数，则有

$$f(x_2)=f(1\cdot x_2)=f(1)+f(x_2),$$

故 $f(1)=0$. 又由题设 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，有

$$\lim_{\Delta x\to0}f(1+\Delta x)=f(1)=0,$$

于是
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0}f(x_0+\Delta x)&=\lim_{\Delta x\to0}f\left(x_0\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)\right)=f(x_0)+\lim_{\Delta x\to0}f\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)\\&=f(x_0)+f(1)=f(x_0).\end{aligned}$$

证毕.

【例 1-22】 若 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在，试证 $f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

【证】 取 $\varepsilon=1$，存在 X，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$.

而此时 $$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$
当 $x\in[a,\ X]$ 时，$f(x)$ 连续. 由于闭区间上连续函数一定有界，故必有 $k>0$，使 $x\in[a,\ X]$ 时，有 $$|f(x)|\leqslant k.$$
对任何 $x\in[a,\ +\infty)$，取 $M=\max\{k,\ 1\}$，有 $$|f(x)|\leqslant M.$$
因此 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上有界.

(三) 介值定理的应用

【例 1-23】 证明方程 $x^5+x-1=0$ 有且只有一个正根.

【证】 存在性. 令 $f(x)=x^5+x-1$，则显然
$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0.$$
由零点定理，$f(x)=0$ 在 $(0,\ 1)$ 内至少有一个根.

唯一性. 假设 $f(x)=0$ 有两个正根 x_1 和 x_2，那么 $f(x_1)=f(x_2)$，显然 $f(x)$ 在 $[x_1,\ x_2]$（或 $[x_2,\ x_1]$）区间上满足罗尔定理诸条件，故必有 $\xi\in(x_1,\ x_2)$（或 $\xi\in(x_2,\ x_1)$），使 $f'(\xi)=0$，而 $f'(x)=x^4+1>0$，矛盾.

注 对于单调可导函数 $f(x)$，如果 $f(x)=0$ 有根的话，那么根必唯一. 这一事实以后不再证明，只作为一个结论来使用. "罗尔定理"详见第三章.

【例 1-24】 证明方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.

【证】 令 $f(x)=x-2\sin x-1$，则
$$f(0)=-1<0,\ f(3)=2(1-\sin 3)>0,$$
根据零点定理，$f(x)$ 在 $(0,\ 3)$ 内至少有一个零点，即方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.

【例 1-25】 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，则在 a，b 之间存在一点 ξ，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

【证】 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，可知 $F(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $F(a)<0$，$F(b)>0$，由零点定理，存在 $\xi\in(a,\ b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$，$\xi\in(a,\ b)$.

【例 1-26】 证明方程 $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$ 有一个根介于 1 和 2 之间，另一个根介于 2 和 3 之间.

【证】 原方程与方程
$$5(x-2)(x-3)+7(x-1)(x-3)+16(x-1)(x-2)=0\quad(x\neq1,\ x\neq2,\ x\neq3)$$
同解.

设 $$f(x)=5(x-2)(x-3)+7(x-1)(x-3)+16(x-1)(x-2),$$
$f(x)$ 为多项式，处处连续，且 $$f(1)=10,\quad f(2)=-7,\quad f(3)=32,$$
由零点定理可知，在 $(1,\ 2)$ 之间、$(2,\ 3)$ 之间均有根.

【例 1-27】 设有三次方程 $f(x)=x^3-3ax+2b=0$，其中 $a>0$，$b^2<a^3$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个实根.

【证】 由 $a>0$，$b^2<a^3$，得 $$-a\sqrt{a}<b<a\sqrt{a},$$
故 $$x^3-3ax-2a\sqrt{a}<f(x)<x^3-3ax+2a\sqrt{a}$$
或 $$(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})<f(x)<(x-\sqrt{a})^2(x+2\sqrt{a}),$$
因此 $$f(-2\sqrt{a})<0,\quad f(-\sqrt{a})>0,\quad f(\sqrt{a})<0,\quad f(2\sqrt{a})>0,$$

从而方程 $f(x)=0$ 有三个实根.

【例 1-28】 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<c<d<b$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$mf(c)+nf(d)=(n+m)f(\xi).$$

【证法 1】 设 m_0，M_0 为 $f(x)$在$[c,d]$上的最小值和最大值，则有

$$mm_0\leqslant mf(c)\leqslant mM_0, \qquad ①$$

$$mm_0\leqslant nf(d)\leqslant nM_0, \qquad ②$$

① + ②得

$$(m+n)m_0\leqslant mf(c)+nf(d)\leqslant(m+n)M_0,$$

即

$$m_0\leqslant\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant M_0,$$

所以 $\exists\,\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$.

【证法 2】 令

$$\varphi(x)=mf(c)+nf(d)-(m+n)f(x),$$

则

$$\varphi(c)\varphi(d)<0.$$

所以 $\exists\,\xi\in(c,d)\subset(a,b)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

(四) 极限运算

1. 用代数方法求极限

【例 1-29】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

【例 1-30】 求 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

【解】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)[2^2-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(2+\sqrt[3]{x})[2^2-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](\sqrt{1-x}+3)}\\&=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)[2^2-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(2^3+x)(\sqrt{1-x}+3)}\\&=\lim_{x\to-8}\left[-\frac{4-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{1-x}+3}\right]=-\frac{12}{6}=-2.\end{aligned}$$

【例 1-31】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-2)(x-1)}{1-x}=1,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$ 不存在.

【例 1-32】 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\quad(x\neq0)$.