导学大全

重点疑难 破解指南
中考升学 助您成功

最新教材 名师导学

初中

数学

第四册

上海远东出版社

初中数学导学大全

（第四册）上

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社

责任编辑　曹兴根
封面设计　汤智勇　赵小卫

初中数学导学大全

（第四册）

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社出版发行

（上海冠生园路 393 号　邮政编码 200233）

新华书店经销　海峰印务公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张 13　千字 299

1997 年 8 月第 1 版　　1997 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—21000

ISBN 7—80613—610—X/G・519　定价：15.00 元

前　言

在学习数学知识时，如何深入领会教科书中的数学思想精髓？如何在解题练习中演算得法，事半功倍，从而在多类考试中具有竞争力？当前在由应试教学向素质教学的转轨中，如何着眼于能力培养？显然，同学们除了认真学习教科书之外，还必须有合适的强化"三基"训练的辅导读物相伴随.

目前，全国正在深入进行中学课程改革与教材建设.我们按国家教委颁布的教学大纲，参考《九年义务教育四年制初级中学数学教科书》，《全日制普通高级中学数学教科书》和上海市及部分省市新教材，编写了与此相匹配的本套丛书(初中四册，高中三册)，可供我国各地区学生使用.

本套丛书内容以基础知识、基本技能为主体.既照顾到知识点的整体覆盖，又做到重点内容突出，并加以具体指导，使之能为同学们提供最优化的学习方法，帮助同学们提高思维能力和综合解题能力，取得最佳的学习效果.同时，本丛书也是教师准备教案、布置学生作业、帮助学生复习迎考的实用参考书.

丛书各册编排以章、节、目为单位，与教材完全同步.设有"教纲要求"，"重点、难点及学习指导"，"范例精选"，"达纲五星级同步测试题"与"阶段测试"或期中、期末试卷，并附参考答案或提示.

每一册各节内容由以下部分组成：

一、教纲要求　明确教学大纲中每节内容的具体教学目标，大多用了解、理解、掌握和灵活运用来阐述从低到高达纲的四个

层次.其具体含义为:(1)了解:对知识的含义有感性的、初步的认识,能够说出这一知识是什么,能够(或会)在有关的问题中识别它.(2)理解:对概念和规律(定律、定理、公式、法则等)达到了理性认识,知道它是怎样得出来的,它与其他概念和规律之间的联系,有什么用途.(3)掌握:在理解的基础上,通过练习,形成技能,能够(或会)用它去解决一些问题.(4)灵活运用:指能够综合运用知识并达到熟练灵活的程度,从而形成了能力.

二、重点、难点及学习指导 除了指出本节重点与难点以外,还对重点与难点作了简明扼要的分析,启发同学们将知识进行疏理、归纳、巩固与应用.目的是帮助同学们进一步掌握这些重点或难点的内容.

三、范例精选 选用例题的标准是不求难、不求偏,着重于配合重点内容,在每一道范例之后,都有"分析"、"说明"等栏,既有就题论题的分析,也有据此例的结论、方法进一步引申而作的点评.

四、达纲五星级同步测试题 选用题目涉及的内容不仅有完整的覆盖面,而且数量充足.类型有判断题、选择题、填空题、解答题、证明题等,注重选题的基础性及典型性,绝大部分内容适合大多数同学的水平.其次,注重选题的难易层次性,在每道习题前标有不同的星级,以示其难易程度,星级越高,说明题目难度越大.四星级以上的习题供同学们开展课外活动研究或供学有余力的同学选用.同时,也注重了选题的应用性,有的内容涉及操作及识图、画图;有的内容涉及日常生活或生产实际应用.此外,还对解题所需的时间作了约略规定,供同学们参考.

五、参考答案 对于有一定难度或技巧的题目,除了给出答案外,还作了一些提示或给出完整的解答过程,供同学们解题时参考.

六、数学中考的要求、复习方法和解题方法 指导初中学生系统复习，全面总结初中阶段数学知识，提高学生的基本技能，帮助学生顺利地通过数学的会考、中考. 书后还附有中考模拟试卷及部分地区的中考试卷，供学生复习后进行自我测试.

本套丛书由一些长期在教学第一线的教师和研究人员精心编写而成. 虽尽力追求完美，但在编写过程中有一些问题很难作定论，如教学顺序问题. 由于各地存在着差异，即使同一个地区不同的学校也会有所不同. 看来解决此问题的最好方法，就是同时拥有我们编写的每一册书.

参加本书撰稿的有：杨水木·代数第十四章；鲍小曼·代数第十五章；王永利·代数第十六章；刘幼章·平面几何第六章；朱思源·平面几何第七章；施全汝·数学中考的要求、复习方法和解题方法；叶素华、王才苗、鲍小曼、杨水木、刘幼章、施全汝还编写了六套"中考模拟试卷"，书后的部分地区中考试卷均由陈振宣老师提供.

全书由陈振宣、杨象富两位老师主编.

目　　录

代　　数

平 面 几 何

代　　数

第十四章　解直角三角形

第一节　锐角三角函数

一、教纲要求

1．知道锐角三角函数(三角比)的概念，能够正确地用 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$tg\alpha$、$ctg\alpha$ 表示直角三角形中两条边的比．

2．熟记 $0°$、$30°$、$45°$、$60°$、$90°$特殊角的三角函数值，会计算含有特殊角三角函数的式子的值，会由一个特殊角三角函数值直接说(写)出这个锐角的大小．

3．会正确地使用正弦和余弦表、正切和余切表和计算器，由已知锐角求它的三角函数值，由已知锐角的某种三角函数值求这个锐角的大小．

二、重点、难点及学习指导

1．重点：锐角三角函数的概念，特殊角的三角函数值和正弦和余弦表、正切和余切表的查法．

2．难点：(1) 锐角三角函数的概念．解决这个难点的关键是如何在一个直角三角形中，找出锐角 α 的对边、α 的邻边和斜边．(2)正弦和余弦表、正切和余切表的查法．解决这个难点的关键是正确理解 $0°\sim90°$间正弦、余弦、正切和余切的变化规律．

3．学习指导：

(1) 锐角三角函数的概念

如图 14-1，设 α 为直角三角形的一个锐角，则

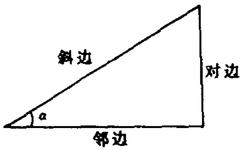

图 14-1

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}}.$$

（tg 国家标准为 tan，ctg 国家标准为 cot.）

锐角三角函数值只与角的大小有关，而与直角三角形三边的长短无关. 如图 14-2 中，

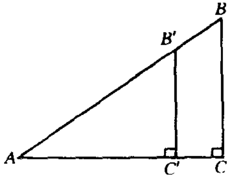

图 14-2

$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$，

有 $\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{AB'}{AB}$，

故 $\sin A=\dfrac{B'C'}{AB'}=\dfrac{BC}{AB}$.

对于 $\cos A$、$\mathrm{tg}A$、$\mathrm{ctg}A$ 也类似.

（2）一些特殊角的三角函数值

角度 α / 三角函数值 / 三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

（3）正弦和余弦表、正切和余切表的查法

当角度在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间变化时，正弦、正切的值随着角度的增

大(或减小)而增大(或减小);余弦、余切的值随着角度的增大(或减小)而减小(或增大).因此,在查正弦表、正切表时,“角大值加,角小值减”,或者“值大角加,值小角减”;查余弦表、余切表时,“角大值减,角小值加”,或者“值大角减,值小角加”.

(4) 几组重要的三角函数公式

① 同角三角函数的几个关系式

平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

或 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

商数关系 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

倒数关系 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

② 余角三角函数的关系:

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha,\ \mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha.$$

初学解三角函数的问题时,要画出图形,帮助思考,防止差错,且运算常常与勾股定理结合在一起,请读者注意根式运算的有关性质.

三、范例精选

例1 已知 Rt△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,如图 14-3 所示,(Rt 国家标准为 Rt)分别写出$\angle A$、$\angle B$ 的四个三角函数值.

解 由勾股定理得

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}.$$

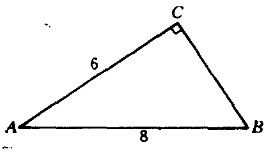

图 14-3

根据锐角三角函数的定义,可得

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7};$$

$$\sin B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7},$$

$$\operatorname{ctg}B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

评析 求角 B 的四个三角函数时，也可直接利用余角三角函数的关系式写出结果，如 $\sin B=\sin(90°-A)=\cos A=\frac{3}{4}$ 等.

例 2 已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与正半轴 Ox 重合，终边经过点 $P(2,4)$，求角 α 的四个三角函数值.

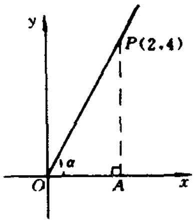

图 14-4

解 如图 14-4，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAP$ 中，

$$OP=\sqrt{OA^2+AP^2}=2\sqrt{5},$$

$$\sin\alpha=\frac{AP}{OP}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{OA}{OP}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\text{tg}\alpha=\dfrac{AP}{OA}=\dfrac{4}{2}=2,\quad \text{ctg}\alpha=\dfrac{OA}{AP}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

评析 一般地，设角 α 的顶点在直角坐标系的原点，始边与正半轴 Ox 重合，终边过点 $P(x,y)$，如图 14-5，则

$$r=OP=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{y}{x},\ \text{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

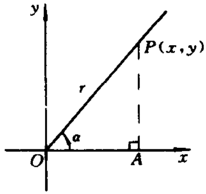

图 14-5

例 3 (选择题)当角 α 是锐角时，$\sin\alpha$ 与 $\text{tg}\alpha$ 的大小关系是 ( ).

(A) $\sin\alpha=\text{tg}\alpha$ (B) $\sin\alpha>\text{tg}\alpha$

(C) $\sin\alpha<\text{tg}\alpha$ (D) 不能确定

解一 取 $\alpha=30^\circ$，有 $\sin 30^\circ<\text{tg}\,30^\circ$. 排除(A)、(B)；再取 $\alpha=45^\circ,60^\circ$，仍有 $\sin 45^\circ<\text{tg}\,45^\circ$，$\sin 60^\circ<\text{tg}\,60^\circ$，故选(C).

解二 $\sin\alpha-\text{tg}\alpha=\sin\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}$,

$\because\ \cos\alpha<1,\quad \therefore\ \cos\alpha-1<0,$

故 $\sin\alpha-\text{tg}\alpha<0$，从而 $\sin\alpha<\text{tg}\alpha$，应选(C).

例 4 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，CD 为斜边 AB 上的高，若 $AD=2$，$DB=8$，则 $\text{tg}A=$ ________.

解一 如图 14-6，由射影定理得

$$CD^2=AD\cdot DB=16,$$

$\therefore\ CD=4.$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$\text{tg}\ A=\dfrac{CD}{AD}=2.$

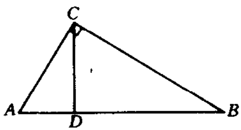

图 14-6

解二 $AC^2=AD\cdot AB=20,$

得 $AC=2\sqrt{5},$

$BC^2 = DB \cdot AB = 80$,

得 $BC = 4\sqrt{5}$,

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = 2$.

解三 由射影定理求得 $CD = 4$,

由$\triangle ACD \backsim \triangle CBD$ 得$\angle BCD = \angle A$,

在 Rt$\triangle CBD$ 中，$\operatorname{tg}\angle BCD = \dfrac{DB}{CD} = 2$,

$\therefore \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\angle BCD = 2$.

评析 当遇到有多个直角三角形的情况时，应选定其中一个，应用平面几何知识，求出它的有关边长，再求三角函数值. 本例中$\angle A$ 的正切值在不同的三角形中有三组，只要任取一组即可求得.

例 5 已知$\triangle ABC$ 的外接圆直径为 2, $BC = \sqrt{3}$, 求角 A 的大小.

解 如图 14-7, 作直径 BD, 连 DC, 则$\angle DCB = 90°$,

在 Rt$\triangle DCB$ 中，

$\sin\angle D = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle D = 60°$.

又$\angle A = \angle D$,

$\therefore \angle A = 60°$.

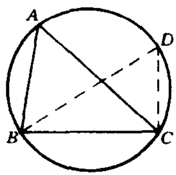

图 14-7

例 6 计算

(1) $2\cos 60° - \operatorname{tg} 45° - \operatorname{ctg} 30°$;

(2) $\dfrac{\cos 30° - \operatorname{ctg} 45°}{\operatorname{tg} 60° - \sin 30°}$;

(3) $\sqrt{(\cos 30° - 1)^2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 45° - \sin 60°}$

$- |\sin 30° - \cos 0°|$.

解 （1）原式$=2\times\frac{1}{2}-1-\sqrt{3}$

$$=-\sqrt{3};$$

（2）原式$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}$

$$=\frac{4-3\sqrt{3}}{11};$$

（3）原式$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left|\frac{1}{2}-1\right|$

$$=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

评析 解答本题的关键是：

（1）熟记特殊角的三角函数值；

（2）掌握算术平方根、绝对值的概念：

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

$$=\begin{cases}a\ , & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0;\end{cases}$$

（3）灵活运用开方运算.如

$$\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2^2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

例 7 查表计算

（1）$\sin 37^\circ 26'$；（2）$\operatorname{ctg} 14^\circ 32'$；