

兰州交通大学面向二十一世纪系列教材

电磁场与 电磁波

● 李锦屏 高继森 孙春霞 编



兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

兰州交通大学面向二十一世纪系列教材

电磁场与 电磁波

李锦屏 高继森 孙春霞 编

江苏工业学院图书馆
藏书章

 兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/李锦屏编著. —兰州: 兰州大学出版社, 2007. 1

ISBN 978—7—311—02913—5

I. 电… II. 李… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 008932 号

电磁场与电磁波

李锦屏 高继森 孙春霞 编

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8617156 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州交通大学印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:14.5

2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷

字数:347 千字 印数:1~1500 册

ISBN 978—7—311—02913—5 定价:28.00 元

前 言

自 1873 年麦克斯韦建立电磁场基本方程以来,电磁场理论已经经历了一百多年的历史,成为研究通信工程、电子工程及电气工程等各类电磁场问题的基础。随着科学技术的发展,电磁场理论的应用研究已涉及到微波技术、光纤通信、天线与雷达、电磁成像、电磁兼容及电机与电器设备的计算机辅助设计等领域。

电磁场与电磁波是本科教学的技术基础课。在高等教学、大学物理中的电磁学和电路课程的基础上,学习本课程将使学生对源与场的关系以及电磁波在空间传播的基本规律有更深入和完整的理解,对电磁波的产生、辐射、传播及电磁理论在各方面的应用有一定的了解。

全书共八章。为便于学习,第一章先复习矢量分析的基本知识,力求简明实用,为以后学习奠定教学基础。第二、第三章讨论静态场,论述了静电场恒定电流的电场和磁场的基本概念和计算方法及其应用。第四章讨论了静态场边值问题的解法,以加强基础,学会场问题的基本处理方法。第五章介绍时变电磁场的基本理论,论述了麦克斯韦方程组,以此为基础介绍了时变电磁场的基本属性、运动规律和计算方法。第六章讨论了在无界均匀媒质中平面电磁波的传播特性与传播参数以及有重要实际应用的电磁波极化特性。第七章介绍了导行电磁波的特性,并介绍了波导、同轴线、谐振腔及传输线的特点及应用。第八章讨论了电磁波的辐射及其应用问题,介绍了天线的辐射及基本参数,以及学习电磁辐射的基本处理方法。全书各章配有习题,书中有附录和部分习题参考答案。教学中可结合专业情况及其它具体情况对教材内容适当取舍。

本书由李锦屏、高继森、孙春霞共同编写,李锦屏任主编并统编全稿。在编写过程中,得到了兰州交通大学电信基础教研室全体教师的支持和帮助,在此向他们表示诚挚的感谢!并向本书引用的参考文献的作者们致以敬意!

由于编者水平有限,书中难免存在错漏或不当之处,切望使用本书的师生及读者们批评指正。

目 录

第一章 矢量分析	(1)
1.1 矢量代数	(1)
1.1.1 标量和矢量	(1)
1.1.2 矢量的加法和减法	(1)
1.1.3 矢量的乘法	(2)
1.1.4 矢量的求导	(3)
1.2 三种常用的正交坐标系	(3)
1.2.1 直角坐标系	(3)
1.2.2 圆柱坐标系	(5)
1.2.3 球坐标系	(6)
1.3 标量的梯度	(8)
1.3.1 标量场的等值面	(9)
1.3.2 方向导数	(9)
1.3.3 梯度	(10)
1.4 矢量场的通量与散度	(11)
1.4.1 矢量场的矢量线	(12)
1.4.2 通量	(12)
1.4.3 散度	(13)
1.4.4 散度定理	(14)
1.5 矢量场的环流与旋度	(15)
1.5.1 环流	(15)
1.5.2 旋度	(16)
1.5.3 斯托克斯定理	(17)
1.6 亥姆霍兹定理	(18)
习题一	(19)
第二章 静电场	(22)
2.1 电场强度与电位函数	(22)
2.1.1 库仑定律	(22)
2.1.2 电场强度	(22)
2.1.3 电位函数	(25)
2.1.4 电偶极子	(26)
2.2 静电场的基本方程	(27)
2.2.1 电通(量)和电通(量)密度	(27)
2.2.2 高斯定律	(27)
2.2.3 电场强度的环量	(28)
2.3 电介质的极化	(29)

2.4	静电场的边界条件	(32)
2.5	导体系统的电容	(33)
2.6	静电场的能量	(37)
2.7	静电力	(39)
	习题二	(41)
第三章	恒定电流的电场和磁场	(44)
3.1	恒定电流的电场	(44)
3.1.1	微分形式的欧姆定律和焦耳定律	(44)
3.1.2	恒定电场的基本方程	(47)
3.1.3	恒定电场的边界条件	(48)
3.1.4	接地电阻	(50)
3.2	磁感应强度	(52)
3.3	恒定磁场的基本方程	(54)
3.3.1	磁通连续性原理	(54)
3.3.2	安培环路定律	(55)
3.4	介质的磁化	(57)
3.4.1	磁偶极子	(57)
3.4.2	磁化强度	(57)
3.4.3	磁化电流	(58)
3.5	磁介质的场方程	(59)
3.6	恒定磁场的边界条件	(61)
3.7	矢量磁位和标量磁位	(63)
3.8	自感和互感	(67)
3.9	磁场能量与力	(70)
	习题三	(73)
第四章	静态场的解	(76)
4.1	边值问题的类型	(76)
4.2	惟一性定理	(77)
4.3	镜像法	(78)
4.3.1	接地导体平面的镜像	(78)
4.3.2	导体球面的镜像	(80)
4.3.3	导体圆柱面的镜像	(82)
4.3.4	介质平面的镜像	(84)
4.4	分离变量法	(87)
4.4.1	直角坐标系中的分离变量法	(87)
4.4.2	圆柱坐标系中的分离变量法	(90)
4.4.3	球坐标系中的分离变量法	(93)
4.5	有限差分法	(95)
4.5.1	有限差分方程	(95)
4.5.2	差分方程的求解方法	(96)

习题四	(98)
第五章 时变电磁场	(100)
5.1 电磁感应定律	(100)
5.2 位移电流	(101)
5.3 麦克斯韦方程组	(104)
5.3.1 麦克斯韦方程组的积分形式	(104)
5.3.2 麦克斯韦方程组的微分形式	(105)
5.3.3 媒质的本构关系	(105)
5.4 电磁场的边界条件	(108)
5.4.1 一般情况	(108)
5.4.2 两种特殊情况	(111)
5.5 电磁能量守恒定律	(112)
5.6 波动方程	(115)
5.7 电磁场的位函数	(116)
5.7.1 矢量位和标量位	(116)
5.7.2 达朗贝尔方程	(117)
5.8 时谐电磁场	(117)
5.8.1 时谐电磁场的复数表示	(118)
5.8.2 复矢量的麦克斯韦方程	(119)
5.8.3 复电容率和复磁导率	(120)
5.8.4 亥姆霍兹方程	(121)
5.8.5 时谐场的位函数	(121)
5.8.6 平均能量密度和平均能流密度矢量	(122)
习题五	(124)
第六章 正弦平面电磁波	(127)
6.1 理想介质中的均匀平面波	(127)
6.2 波的极化特性	(131)
6.3 损耗媒质中的均匀平面波	(133)
6.4 对平面分界面的垂直入射	(136)
6.5 对平面分界面的斜入射	(141)
6.6 相速和群速	(146)
习题六	(148)
第七章 导行电磁波	(151)
7.1 导行电磁波概论	(152)
7.1.1 TEM 波	(153)
7.1.2 TM 波和 TE 波	(154)
7.2 矩形波导	(155)
7.2.1 矩形波导中的场分布	(155)
7.2.2 矩形波导中波的传播特性	(157)
7.2.3 矩形波导中的主模	(161)

7.2.4 矩形波导中的传输功率	(166)
7.3 圆柱形波导	(166)
7.3.1 圆柱形波导中的场分布	(167)
7.3.2 圆柱形波导中波的传播特性	(169)
7.3.3 圆柱形波导中波的三种典型模式	(170)
7.4 同轴波导	(172)
7.4.1 同轴波导中的 TEM 波	(173)
7.4.2 同轴波导中的高次模	(174)
7.5 谐振腔	(175)
7.6 传输线	(178)
7.6.1 传输线方程及其解	(179)
7.6.2 传输线的特性参数	(182)
7.6.3 传输线的工作参数	(183)
7.6.4 传输线的工作状态	(186)
习题七	(188)
第八章 电磁辐射	(190)
8.1 滞后位	(190)
8.2 电偶极子的辐射	(191)
8.2.1 电偶极子的近区场	(193)
8.2.2 电偶极子的远区场	(194)
8.3 电与磁的对偶性	(196)
8.4 磁偶极子的辐射	(197)
8.5 天线的基本参数	(199)
8.6 对称天线	(203)
8.6.1 对称天线上的电流分布	(203)
8.6.2 对称天线的辐射场	(204)
8.6.3 半波对称天线	(205)
8.7 天线阵	(206)
8.7.1 方向图相乘原理	(206)
8.7.2 均匀直线阵	(207)
8.8 口径场辐射	(208)
8.8.1 惠更斯元的辐射	(209)
8.8.2 平面口径的辐射	(210)
习题八	(213)
附 录	(215)
部分习题参考答案	(217)
参考文献	(223)

第一章 矢量分析

许多科学和技术问题中,常常要研究某些物理量(如电位、电场强度、磁场强度等)在空间的分布和变化规律。为此,引入了场的概念。如果每一时刻,一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值,则称在此空间中确定了该物理量的场。

电磁场是分布在三维空间的矢量场,矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述,而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。本章首先介绍标量场和矢量场的概念,然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律,在此基础上介绍亥姆霍兹定理。

1.1 矢量代数

1.1.1 标量和矢量

数学上,任一代数数量 a 都可称为标量。在物理学中,任一代数数量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义的标量,即所谓的物理量,如电压 u 、电荷量 Q 、质量 m 、能量 W 等都是标量。

一般的三维空间内某一点 P 处存在的一个既有大小又有方向特性的量称为矢量。本书中用黑体字母表示矢量,例如 $\mathbf{A}$,而用 A 来表示矢量 $\mathbf{A}$ 的大小(或 A 的模)。矢量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义的矢量,如电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 、磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 、作用力矢量 $\mathbf{F}$ 、速度矢量 $\mathbf{v}$ 等。

一个矢量 $\mathbf{A}$ 可用一条有方向的线段来表示,线段的长度表示矢量 $\mathbf{A}$ 的模 A ,箭头指向表示矢量 $\mathbf{A}$ 的方向,如图 1.1.1 所示。

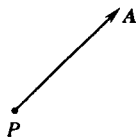


图 1.1.1 P 点处的矢量

一个模为 1 的矢量称为单位矢量。本书中用 $\mathbf{e}_A$ 表示与矢量 $\mathbf{A}$ 同方向的单位矢量,显然

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1.1)$$

而矢量 $\mathbf{A}$ 则可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_A A \quad (1.1.2)$$

1.1.2 矢量的加法和减法

两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相加,其和是另一个矢量 $\mathbf{D}$ 。矢量 $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可按平行四边形法则得到:从同一点画出矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$,构成一个平行四边形,其对角线矢量

即为矢量 D , 如图 1.1.2 所示。

矢量的加法服从交换律和结合律

$$A + B = B + A \quad (\text{交换律}) \quad (1.1.3)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{结合律}) \quad (1.1.4)$$

矢量的减法定义为

$$A - B = A + (-B) \quad (1.1.5)$$

式中 $-B$ 的大小与 B 的大小相等, 但方向与 B 相反, 如图 1.1.3 所示。

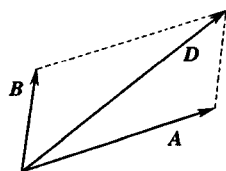


图 1.1.2 矢量的加法

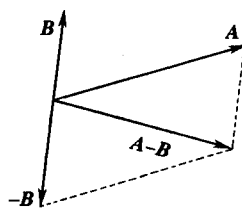


图 1.1.3 矢量的减法

1.1.3 矢量的乘法

一个标准量 k 与一个矢量 A 的乘积 kA 仍为一个矢量, 其大小为 $|k|A$ 。若 $k > 0$, 则 kA 与 A 同方向; 若 $k < 0$, 则 kA 与 A 反方向。

两个矢量 A 与 B 的乘积有两种: 点积(或标积) $A \cdot B$ 和叉积(或矢积) $A \times B$ 。

两个矢量 A 与 B 的点积 $A \cdot B$ 是一个标量, 定义为矢量 A 和 B 的大小与它们之间较小的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 的余弦之积, 如图 1.1.4 所示, 即

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.1.6)$$

矢量的点积服从交换律和分配律

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (\text{交换律}) \quad (1.1.7)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{分配律}) \quad (1.1.8)$$

两个矢量 A 与 B 的叉积 $A \times B$ 是一个矢量, 它垂直于包含矢量 A 和 B 的平面, 其大小定义为 $AB \sin \theta$, 方向为当右手四个手指从矢量 A 到 B 旋转 θ 时大拇指的方向 e_n , 如图 1.1.5 所示, 即

$$A \times B = e_n AB \sin \theta \quad (1.1.9)$$

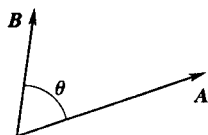


图 1.1.4 矢量 A 与 B 的夹角

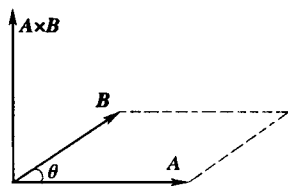


图 1.1.5 矢量 A 与 B 的叉积

根据叉积的定义, 显然有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.1.10)$$

因此,叉积不服从交换律,但叉积服从分配律

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (1.1.11)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的点积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为标量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.1.12)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的叉积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为矢量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1.13)$$

1.1.4 矢量的求导

若 $\mathbf{A}$ 的每个分量都是变量 t 的函数,则称 $\mathbf{A}$ 是变量 t 的矢函数,记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{e}_x + A_y(t)\mathbf{e}_y + A_z(t)\mathbf{e}_z \quad (1.1.14)$$

那么,若极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

存在,则称它为矢函数 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ 的导数,记为

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dA_y(t)}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dA_z(t)}{dt}\mathbf{e}_z \quad (1.1.15)$$

n 阶导数记为 $d^n\mathbf{A}/dt^n$,对 $\mathbf{A}(t)$ 的每个分量求 n 阶导数即可。矢函数的导数仍是一个矢量。

若矢函数 $\mathbf{A}$ 是多变量矢函数,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t_1, t_2, \dots, t_n) = A_x(t_1, t_2, \dots, t_n)\mathbf{e}_x + A_y(t_1, t_2, \dots, t_n)\mathbf{e}_y + A_z(t_1, t_2, \dots, t_n)\mathbf{e}_z \quad (1.1.16)$$

则 $\mathbf{A}$ 对任意变量 t_i 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_i} = \frac{\partial A_x}{\partial t_i}\mathbf{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial t_i}\mathbf{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial t_i}\mathbf{e}_z \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.17)$$

高阶偏导数、混合偏导数的求法类似,对矢函数的各分量分别进行操作即可。矢函数的偏导数仍是一个矢量。

1.2 三种常用的正交坐标系

为了考察物理量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系。在电磁场理论中,最常用的坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

如图 1.2.1 所示,直角坐标系中的三个坐标变量是 x 、 y 和 z ,它们的变化范围分别是

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$$

空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三个坐标曲面 $x = x_0$ 、 $y = y_0$ 和 $z = z_0$ 的交点。

在直角坐标系中,过空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 分别是 x 、 y 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.2.1)$$

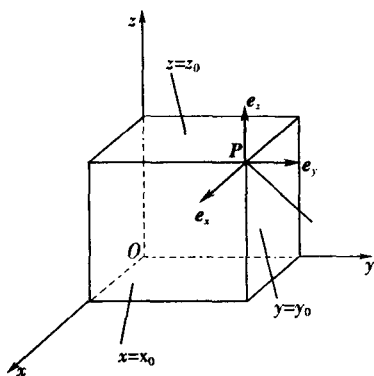


图 1.2.1 直角坐标系

任一矢量 A 在直角坐标系中可表示为

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.2.2)$$

其中 A_x 、 A_y 和 A_z 分别是矢量 A 在 e_x 、 e_y 和 e_z 方向上的投影。该矢量的模为 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ 。

A 的单位矢量为

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{A}{A} = \frac{A_x}{A} e_x + \frac{A_y}{A} e_y + \frac{A_z}{A} e_z \\ &= \cos\alpha e_x + \cos\beta e_y + \cos\gamma e_z \end{aligned}$$

$\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为 A 的方向余弦。 α 、 β 、 γ 分别是 A 与 x 、 y 、 z 轴正向的夹角,如图 1.2.2 所示。

两个矢量 $A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ 与 $B = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$ 的和等于对应分量之和,即

图 1.2.2 直角坐标系中矢量的分解

$$A + B = e_x (A_x + B_x) + e_y (A_y + B_y) + e_z (A_z + B_z) \quad (1.2.3)$$

A 与 B 的点积为

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

A 与 B 的叉积为

$$\begin{aligned} A \times B &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

在直角坐标系中,位置矢量

$$r = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1.2.6)$$

其微分为

$$dr = e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad (1.2.7)$$

而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_x = dydz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy \quad (1.2.8)$$

体积元为

$$dV = dx dy dz \quad (1.2.9)$$

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1.2.3 所示,圆柱坐标系中的三个坐标变量是 ρ, ϕ 和 z , 它们的变化范围分别是

$$0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$$

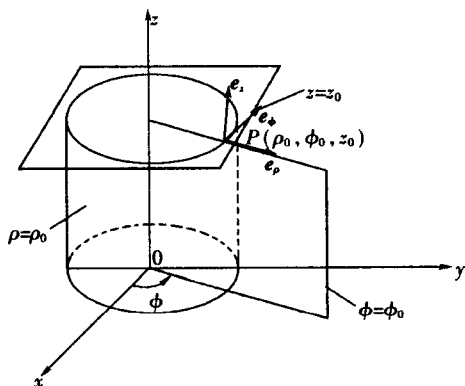


图 1.2.3 圆柱坐标系

空间任一点 $P(\rho_0, \phi_0, z_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点: $\rho = \rho_0$ 的圆柱面、包含 z 轴并与 xz 平面构成夹角为 $\phi = \phi_0$ 的半平面、 $z = z_0$ 的平面。

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan(y/x), z = z \quad (1.2.10)$$

或

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z \quad (1.2.11)$$

在圆柱坐标系中,过空间任一点 $P(\rho, \phi, z)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 e_ρ, e_ϕ 和 e_z 分别是 ρ, ϕ 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则,即

$$e_\rho \times e_\phi = e_z, e_\phi \times e_z = e_\rho, e_z \times e_\rho = e_\phi \quad (1.2.12)$$

图 1.2.4 直角坐标系与圆柱坐标系的坐标单位矢量的关系

必须强调指出,圆柱坐标系中的坐标单位矢量 e_ρ 和 e_ϕ 都不是常矢量,因为它们的方向是随空间坐标变化的。由图 1.2.4 可得到 e_ρ, e_ϕ 与 e_x, e_y 之间的变换关系为

$$e_\rho = e_x \cos \phi + e_y \sin \phi, e_\phi = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi \quad (1.2.13)$$

或

$$e_x = e_\rho \cos \phi - e_\phi \sin \phi, e_y = e_\rho \sin \phi + e_\phi \cos \phi \quad (1.2.14)$$

由式(1.2.13)可以看出 e_ρ 和 e_ϕ 是随 ϕ 变化的,且

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi = \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_x \cos \phi - \mathbf{e}_y \sin \phi = -\mathbf{e}_\rho \end{cases} \quad (1.2.15)$$

任一矢量 $\mathbf{A}$ 在圆柱坐标系中可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.2.16)$$

其中 A_ρ 、 A_ϕ 和 A_z 分别是矢量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 和 $\mathbf{e}_z$ 方向上的投影。

矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z$ 与矢量 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\rho B_\rho + \mathbf{e}_\phi B_\phi + \mathbf{e}_z B_z$ 的和为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{e}_\rho (A_\rho + B_\rho) + \mathbf{e}_\phi (A_\phi + B_\phi) + \mathbf{e}_z (A_z + B_z) \quad (1.2.17)$$

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的点积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) \cdot (\mathbf{e}_\rho B_\rho + \mathbf{e}_\phi B_\phi + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) \times (\mathbf{e}_\rho B_\rho + \mathbf{e}_\phi B_\phi + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= \mathbf{e}_\rho (A_\phi B_z - A_z B_\phi) + \mathbf{e}_\phi (A_z B_\rho - A_\rho B_z) + \mathbf{e}_z (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

在圆柱坐标系中,位置矢量为

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho \rho + \mathbf{e}_z z \quad (1.2.20)$$

其微分元是

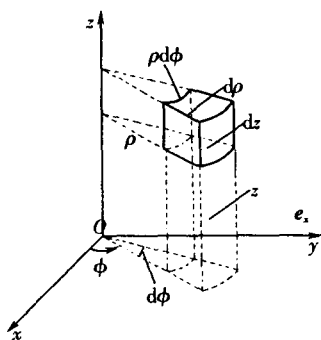


图 1.2.5 圆柱坐标系的长度元、面积元和体积元

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d(\mathbf{e}_\rho \rho) + d(\mathbf{e}_z z) = \mathbf{e}_\rho d\rho + \rho d\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z dz \\ &= \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

它在 ρ 、 ϕ 和 z 增加方向上的微分元分别是 $d\rho$ 、 $\rho d\phi$ 和 dz , 如图 1.2.5 所示。 $d\rho$ 、 $\rho d\phi$ 和 dz 都是长度, 它们各自坐标的微分之比称为度量系数(或拉梅系数), 即

$$h_\rho = \frac{d\rho}{d\rho} = 1, h_\phi = \frac{\rho d\phi}{d\phi} = \rho, h_z = \frac{dz}{dz} = 1 \quad (1.2.22)$$

在圆柱坐标系中,与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_\rho = \rho d\phi dz, dS_\phi = d\rho dz, dS_z = \rho d\rho d\phi \quad (1.2.23)$$

体积元则为

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.2.24)$$

1.2.3 球坐标系

如图 1.2.6 所示,球坐标系中的三个坐标变量是 r 、 θ 和 ϕ , 它们的变化范围分别是

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

空间任一点 $P(r_0, \theta_0, \phi_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点: 球心在 origin、半径 $r = r_0$ 的球面; 顶点在 origin、轴线与 z 轴重合且半顶角 $\theta = \theta_0$ 的正圆锥面; 包含 z 轴并与 xz 平面构成夹角为 $\phi = \phi_0$ 的半平面。

球坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \phi = \arctan(y/x) \quad (1.2.25)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta \quad (1.2.26)$$

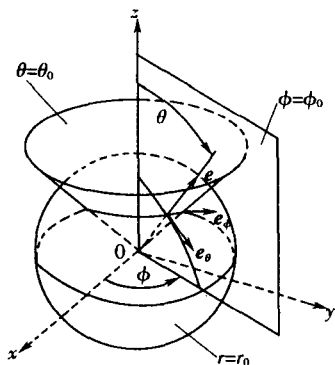


图 1.2.6 球坐标系

在球坐标系中, 过空间任一点 $P(r, \theta, \phi)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 e_r, e_θ 和 e_ϕ 分别是 r, θ 和 ϕ 增加的方向, 且遵循右手螺旋法则, 即

$$e_r \times e_\theta = e_\phi, e_\theta \times e_\phi = e_r, e_\phi \times e_r = e_\theta \quad (1.2.27)$$

它们与 e_x, e_y 和 e_z 之间的变换关系为

$$\begin{cases} e_r = e_x \sin \theta \cos \phi + e_y \sin \theta \sin \phi + e_z \cos \theta \\ e_\theta = e_x \cos \theta \cos \phi + e_y \cos \theta \sin \phi - e_z \sin \theta \\ e_\phi = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi \end{cases} \quad (1.2.28)$$

或

$$\begin{cases} e_x = e_r \sin \theta \cos \phi + e_\theta \cos \theta \cos \phi - e_\phi \sin \phi \\ e_y = e_r \sin \theta \sin \phi + e_\theta \cos \theta \sin \phi + e_\phi \cos \phi \\ e_z = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (1.2.29)$$

球坐标系中的坐标单位矢量 e_r, e_θ 和 e_ϕ 都不是常矢量, 且

$$\begin{cases} \frac{\partial e_r}{\partial \theta} = e_\theta, & \frac{\partial e_r}{\partial \phi} = e_\phi \sin \theta \\ \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_r, & \frac{\partial e_\theta}{\partial \phi} = e_\phi \cos \theta \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial \theta} = 0, & \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} = -e_r \sin \theta - e_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (1.2.30)$$

任一矢量 A 在球坐标系中可表示为

$$A = e_r A_r + e_\theta A_\theta + e_\phi A_\phi \quad (1.2.31)$$

其中 A_r, A_θ 和 A_ϕ 分别是矢量 A 在 e_r, e_θ 和 e_ϕ 方向上的投影。

矢量 $A = e_r A_r + e_\theta A_\theta + e_\phi A_\phi$ 与矢量 $B = e_r B_r + e_\theta B_\theta + e_\phi B_\phi$ 的和为

$$A + B = e_r (A_r + B_r) + e_\theta (A_\theta + B_\theta) + e_\phi (A_\phi + B_\phi) \quad (1.2.32)$$

A 与 B 的点积为

$$A \cdot B = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \quad (1.2.33)$$

A 与 B 的叉积为

$$A \times B = e_r (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta) + e_\theta (A_\phi B_r - A_r B_\phi) + e_\phi (A_r B_\theta - A_\theta B_r)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix} \quad (1.2.34)$$

位置矢量

$$\mathbf{r} = e_r r \quad (1.2.35)$$

其微分元是

$$d\mathbf{r} = d(e_r r) = e_r dr + r d\mathbf{e}_r = e_r dr + e_\theta r d\theta + e_\phi r \sin\theta d\phi \quad (1.2.36)$$

即在球坐标系中沿三个坐标的长度元为 dr 、 $r d\theta$ 和 $r \sin\theta d\phi$ ，如图 1.2.7 所示。度量系数分别为

$$h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin\theta \quad (1.2.37)$$

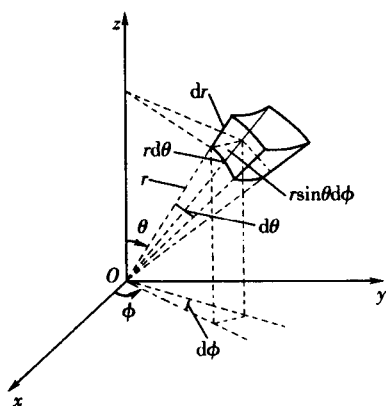


图 1.2.7 球坐标系的长度元、面积元和体积元

在球坐标系中，三个面积元分别为

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi, dS_\theta = r \sin\theta dr d\phi, dS_\phi = r dr d\theta \quad (1.2.38)$$

体积元

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.39)$$

1.3 标量的梯度

如果在一个空间区域中，某物理系统的状态可以用一个空间位置和时间的函数来描述，即每一时刻在区域中每一点它都有一个确定值，则在此区域中就确立了该物理系统的一种场。例如，物体的温度分布即为一个温度场，流体中的压力分布即为一个压力场。场的一个重要属性是它占有一个空间，它把物理状态作为空间和时间的函数来描述，而且，在此空间区域中，除了有限个点或某些表面外，该函数是处处连续的。若物理状态与时间无关，则为静态场；反之，则为动态场或时变场。

若所研究的物理量是一个标量，则该物理量所确定的场称为标量场。例如，温度场、密度场、电位场等都是标量场。在标量场中，各点的场量是随空间位置变化的标量。因此，一个标

量场 u 可以用一个标量函数来表示。例如,在直角坐标系中,可表示为

$$u = u(x, y, z) \quad (1.3.1)$$

1.3.1 标量场的等值面

在研究标量场时,常用等值面形象、直观地描述物理量在空间的分布状况。在标量场中,使标量函数 $u(x, y, z)$ 取得相同数值的点构成一个空间曲面,称为标量场的等值面。例如,在温度场中,由温度相同的点构成等温面;在电场中,由电位相同的点构成等位面。

对任意给定的常数 C , 方程

$$u(x, y, z) = C \quad (1.3.2)$$

就是等值面方程。

不难看出,标量场的等值面具有如下特点:

① 常数 C 取一系列不同的值,就得到一系列不同的等面值,因而形成等值面族;

② 若 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是标量场中的任一点,显然,曲面 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$ 是通过该点的等值面,因此标量场的等值面族充满场所在的整个空间;

③ 由于标量函数 $u(x, y, z)$ 是单值的,一个点只能在一个等值面上,因此标量场的等值面互不相交,如图 1.3.1 所示。



图 1.3.1 等值面

1.3.2 方向导数

标量场 $u(x, y, z)$ 的等值面只描述了场量 u 的分布状况,而研究标量场的另一个重要方面,就是还要研究标量场 $u(x, y, z)$ 在场中任一点的领域内沿各个方向的变化规律。为此,引入了标量场的方向导数和梯度的概念。

1. 方向导数的概念

设 M_0 为标量场 $u(M)$ 中的一点,从点 M_0 出发引一条射线 l ,点 M 是射线 l 上的点,到点 M_0 的距离为 Δl ,如图 1.3.2 所示。当点 M 沿射线 l 趋近于 M_0 (即 $\Delta l \rightarrow 0$) 时,比值 $\frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$ 的极限称为标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数,记作 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$,即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1.3.3)$$

从以上定义可知,方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$ 是标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向对距离的变化率。当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$ 时,标量场 $u(M)$ 沿 l 方向是增加的;当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} < 0$ 时,标量场 $u(M)$ 沿 l 方向是减小的;当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 0$ 时,标量场 $u(M)$ 沿 l 方向无变化。

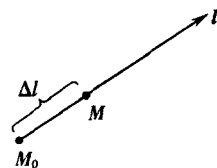


图 1.3.2

方向导数值既与点 M_0 有关,也与 l 方向有关。因此,标量场中,在一个给定点 M_0 处沿不同的 l 方向,其方向导数一般是不同的。