军地两用大中专系列教材

数　学

李桠楠　吴筱宁　师东河　编

陕西旅游出版社

（陕）新登字 012 号

责任编辑：戴笑诺

责任监制：刘青海

军地两用大中专教材

数　　学

李桂楠　吴筱宁　师东河　编

陕 西 旅 游 出 版 社 出 版 发 行
（西安市长安路 32 号　邮政编码 710061）
新华书店经销　陕西省军区古城印刷厂印刷
850×1168 毫米　32 开本　11.875 印张　360 千字
1999 年 5 月第 1 版　1999 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—5000 册
ISBN 7—5418—1308—7/G·336
定价：15.00 元

军地两用大中专教材

编 委 会

前　言

本书是根据中等专业学校数学教学大纲的精神，结合部队战士在职学习的实际，参照中国人民解放军军队院校招生统考《数学复习指要》中对于基础知识、基本方法和基本能力的要求编写的。其主导思想是紧紧围绕重要的“知识点”，对其进行简明扼要的阐述和分析，并通过精选例题、认真剖析，讲清知识点的应用，再选取有代表性的习题对知识点进行巩固和加深，以期达到灵活运用的目的，重在培养和提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书有以下三个特点：

一是内容丰富、编排合理。全书涵盖了高中数学的所有知识点，但篇幅却不足其一半。在编写时除注意数学本身的系统性、逻辑性外，始终坚持“以必需、够用为度”的原则，对内容进行了合理的取舍，在分析讲解理论时不追求复杂的推理和论证，对繁琐的计算进行了精心地简化，从而使教材内容更加集中和精练。

二是通俗易懂、便于自学。书中叙述简洁明了，对知识点和能力要点的分析直接、明朗，便于读者接受。例题选择典型、精当，富有代表性；习题配备难易适度，数量适中；章后配有小结和复习参考题，有利于巩固和加深所学知识。

三是军地两用、学考皆宜。本书编者在部队院校执教多年，并多次参加军队院校的招生阅卷工作，了解战士，深知战士学习中的实际困难和问题所在，在本书编写过程中对战士的学习和升学需

求给予了较多关注，从而使本书不仅适合军地两用，而且更能满足战士在职学习和报考军校的双重需要。

全书内容共分三大部分：第一部分，代数（第一至八章）；第二部分，立体几何（第九至十章）；第三部分，平面解析几何（第十一至十三章）。

本书可作为军地两用及各类成人中专学校的教材，也可作为部队文化教育的基本教材，对立志自学成才者及准备报考军校的战士，更是十分有益的学习参考书和复习资料。

由于时间仓促，编校失误之处一定难免，恳请专家、同行及读者朋友批评指正。

编　者

一九九九年三月

目　　录

第一部分　代　数

第二部分　立体几何

第三部分　平面解析几何

第一部分 代 数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一 集合

1.1 集合

考察下面的几组对象:(1)1,2,3,4,5;(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点;(3) 所有的直角三角形;(4) 某坦克团所有的坦克.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些物体组成的. 我们说,每一组对象的全体形成一个**集合**(简称集). 集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**. 例如,(1) 是由数 1,2,3,4,5 组成的集合,其中的对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**,上面的集合(1)、(4) 都是有限集;含有无限个元素的集合叫做**无限集**,上面的集合(2)、(3) 都是无限集.

对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的. 这就是说,任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素. 例如,对于由所有直角三角形组成的集合,内角分别为 30°,60°,90° 的三角形,是这个集合的元素,而内角分别为 40°,60°,80° 的三角形就不是这个集合的元素.

对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的. 这就是说,集合中的任何两个元素都是不同的对象;相同的对象归入任何一个

集合时，只能算作这个集合的一个元素，因此集合中的元素是没有重复现象的.

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法，把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**. 例如，由数 1,2,3,4,5 组成的集合，可以表示为

$$\{1,2,3,4,5\}.$$

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序.

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a.

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**. 这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性.

例如，由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点的坐标组成的集合，可以表示为

$$\{(x,y)\mid y=x^2+1\}.$$

集合通常用大写的拉丁字母表示，集合的元素用小写的拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a **不属于** A，记作 $a\notin A$（或 $a\,\bar{\in}\,A$）.

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记作 N；

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 Z；

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 Q；

全体实数的集通常简称**实数集**，记作 R.

为了方便起见，有时还用 Q^+ 表示正有理数集，用 R^- 表示负实数集，等等.

1.2　子集、交集、并集、补集

1. 子集

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），读作"A 包含于 B"（或 B 包含 A）. 例如 $N \subseteq Z, Z \subseteq Q, R \supseteq Q$.

当 A 不是 B 的子集时，可以记作 $A \nsubseteq B$（或 $B \nsupseteq A$），读作"A 不包含于 B（或"B 不包含 A"）.

任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$.

为了方便，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$.

例如：{小于零的正整数} $= \varnothing$. 我们规定，空集是任何集合的子集. 也就是说，对任何一个集的 A，有 $\varnothing \subseteq A$.

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$（或 $B \supset A$）. 例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集，所以 $N \subseteq N$，但 $N \not\subset N$；N 是实数集 R 的真子集，所以 $N \subset R$.

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系可用图 1 — 1 表示.

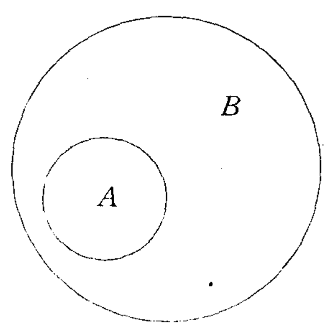


图1 — 1

显然，空集是任何非空集合的真子集.

对于集合 A, B, C，如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$。事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A \subseteq B$. 所以 $x \in B$，又因为 $B \subseteq C$，所以 $x \in C$，从而 $A \subseteq C$.

同样可知，**对于集合 A, B, C，如果 $A \subset B, B \subset C$，那么 $A \subset C$.**

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，称这**两个集合相等**，记作 $A = B$，读作"A 等于 B".

例 1　写出$\{a,b\}$的所有子集及真子集.

解：集合$\{a,b\}$的所有子集是$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，其中$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$是真子集.

2. 交集

由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的**交集**，记作$A\cap B$(可读作"A交B")，即
$A\cap B=\{x|x\in A,且 x\in B\}$.

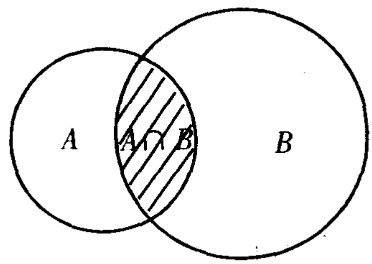


图1－2

图1－2的阴影部分，表示集合A、B的交集$A\cap B$.

例如，6与10的正公约数的集合，可以从求6的正约数的集合与10的正约数的集合的交集而得到，即$\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,5,10\}=\{1,2\}$.

由交集定义容易推出，对任何集合A，B，有

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B=B\cap A.$$

例 2　设$A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<3\}$，求$A\cap B$.

解：
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}\\&=\{x|-2<x<3\}.\end{aligned}$$

例 3　设$A=\{(x,y)|4x+y-6\}$，$B=\{(x,y)|3x+2y=7\}$求$A\cap B$.

解：
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)|4x+y=6\}\cap\{(x,y)|3x+2y=7\}\\&=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}\\&=\{(1,2)\}.\end{aligned}$$

形如$2n(n\in Z)$的整数叫做**偶数**，形如$2n+1(n\in Z)$的整数叫做**奇数**. 全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**，我们再看一个例子.

例 4　已知A为奇数集，B为偶数集，Z为整数集，求$A\cap Z$，

$B\cap Z$, $A\cap B$.

解：$A\cap Z=\{奇数\}\cap\{整数\}=\{奇数\}=A$,

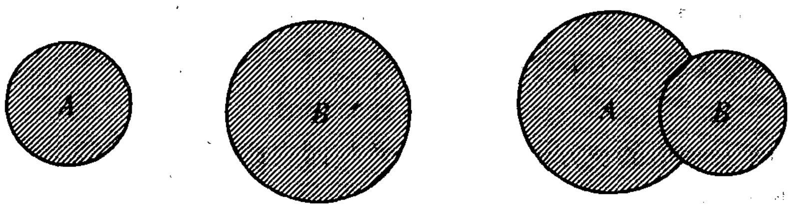
$B\cap Z=\{偶数\}\cap\{整数\}=\{偶数\}=B$,

$A\cap B=\{奇数\}\cap\{偶数\}=\varnothing$.

3. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的**并集**，记作 $A\cup B$（可读作"A 并 B"），即 $A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$.

图 1－3 中的阴影部分，表示集合 A,B 的并集 $A\cup B$.



(1)　　(2)

图1－3

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次，例如，设 $A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，则 $A\cup B$ 应是 $\{3,4,5,6,7,8\}$.

由并集定义容易知道，对于任何集合 A,B，有

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cup B=B\cup A.$$

例 5　设 $A=\{x|-4<x<-\frac{1}{2}\}$，$B=\{x|x\leqslant-4\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：$A\cup B=\{x|-4<x<-\frac{1}{2}\}\cup\{x|x\leqslant-4\}$

$$= \{x \mid x < -\frac{1}{2}\}.$$

$$A \cap B = \{x \mid -4 < x < -\frac{1}{2}\} \cap \{x \mid x \leqslant -4\}$$
$$= \varnothing.$$

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，所讨论的集合往往都是某一给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个**全集**，用符号 I 表示. 也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素. 例如，研究数集时，常常把实数集 R 作为全集.

已知全集 I，集合 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的**补集**，记作 $\overline{A}$（可读作"A 补"），即

$$\overline{A} = \{x \mid x \in I, \text{且 } x \notin A\}.$$

图 1 — 4 中的长方形内表示全集 I，园内表示集合 A，阴影部分表示集合 A 在集合 I 中的补集 $\overline{A}$.

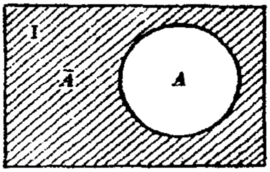


图 1 — 4

由补集定义易知，对任何集合 A，有

$$A \cup \overline{A} = I, A \cap \overline{A} = \varnothing, \overline{\overline{A}} = A,$$

其中 $\overline{\overline{A}}$ 表示 $\overline{A}$ 在 I 中的补集.

例 6　设 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A = \{3,4,5\}$，$B = \{4,7,8\}$，求 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A} \cup \overline{B}$.

解：$\overline{A} = \{1,2,6,7,8\}$，　$\overline{B} = \{1,2,3,5,6\}$，

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,2,6\}$，　$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

习 题 一

1. 在下列各题中分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来：

(1) 组成中国国旗图案的颜色；

(2) 直角坐标系第一象限内所有的点的坐标；

(3) 由 1,2,3 这三个数字中抽出一部分或全部(没有重复)所排成的一切自然数.

2. 写出方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5. \end{cases}$ 的解集并进行化简.

3. 在下列各题中,指出关系式 $A \subseteq B, A \supseteq B, A \subset B, A \supset B$, $A = B$ 中哪些成立:

(1) $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,5,7\}$;

(2) $A = \{1,2,4,8\}$, $B = \{x | x$ 是 8 的正约数$\}$.

4. 判断下列各式是否正确,并说明理由:

(1) $2 \subset \{x | x \leqslant 10\}$; (5) $\varnothing \not\subset \{x | x \leqslant 10\}$;

(2) $2 \in \{x | x \leqslant 10\}$; (6) $\varnothing \subset \{x | x \leqslant 10\}$;

(3) $\{2\} \subset \{x | x \leqslant 10\}$; (7) $\{4,5,6,7\} \not\subset \{2,3,5,7,11\}$.

(4) $\varnothing \in \{x | x \leqslant 10\}$;

5. 用适当的集合填空:

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	__	__	__
A	__	__	__
B	__	$\underline{B \cap A}$	__

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	__	__	__
A	$\underline{A}$	__	__
B	__	__	__

6. 写出下列不等式的解集并进行化简:

(1) $x^2 + 2x - 8 \leqslant 0$; (2)$x^2 + 8x + 15 > 0$.

7. 设 $S = \{x | x \leqslant 3\}, T = \{x | x < 1\}$. 求 $S \cap T$ 及 $S \cup T$, 并在数轴上表示出来.

8. 用适当的集合填空:

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
$\overline{A}$	___	___	___

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
$\overline{A}$	___	___	___

9. 设 $I=\{x \mid x\in N, 且\ x\leqslant 10\}$，$A=\{1,2,4,5,9\}$，$B=\{4,6,7,8,10\}$，$C=\{3,5,7\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$(A\cap B)\cap C$，$(A\cup B)\cup C$.

10. 设 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,c,d\}$，$B=\{b,d,e\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$，看看求出的后四个集合中有没有相等的集合.

11. 设 $A=\{x \mid x^2-16<0\}$，$B=\{x \mid x^2-4x+3\geqslant 10\}$，$I=R$，求：

(1) $A\cap B$；　　(2) $A\cup B$；

(3) $\overline{A\cap B}$；　　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$.

二　映射与函数

1.3　映射

在初中我们学过对应的例子. 例如，对于任何一个实数 a，数轴上都有唯一的一点 A 和它对应；对于坐标平面内任何一个点 P，都有唯一的有序实数对 (x,y) 和它对应，现在我们学习一种特殊的对应 —— 映射.

设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的**映射**，记作

$$f: A \longrightarrow B$$

如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么，和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的**象**，a叫做b的**原象**.

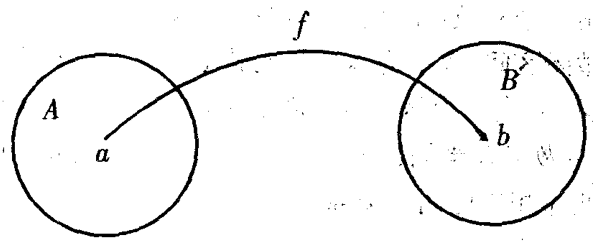


图1—5

1.4　函数

如果在某变化过程中有两个变量x,y，并且对于x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值和它对应，那么y就是x的**函数**，x叫做**自变量**，x的取值范围叫做函数的**定义域**，和x值对应的y的值叫做**函数值**，函数值的集合叫做函数的**值域**.

从映射的概念可以知道，函数实际上就是集合A到集合B的映射，其中A,B都是非空的数集，对于自变量x在定义域A内的任何一个值，在集合B中都有唯一的函数值y和它对应；自变量的值相当于原象，和它对应的函数值相当于象；函数值的集合C就是函数的值域，很明显，$C \subseteq B$.

例如，对于二次函数$y = 2x^2 + 2$，函数的定义域是R，对应法则是“平方乘2加2”，值域是$\{y|y \geqslant 2\}$.

我们把y是x的函数记作$y = f\{x\}$，x在定义域A内取一个确定的值a时，对应的函数值记作$f(a)$.

例如，二次函数$f(x) = x^2 + 2x - 1$，在$x = 0$，$x = 1$，$x = 2$时的函数值分别为$f(0) = -1$，$f(1) = 2$，$f(2) = 7$.

在同时研究两个或多个函数时，要用不同的符号来表示，除