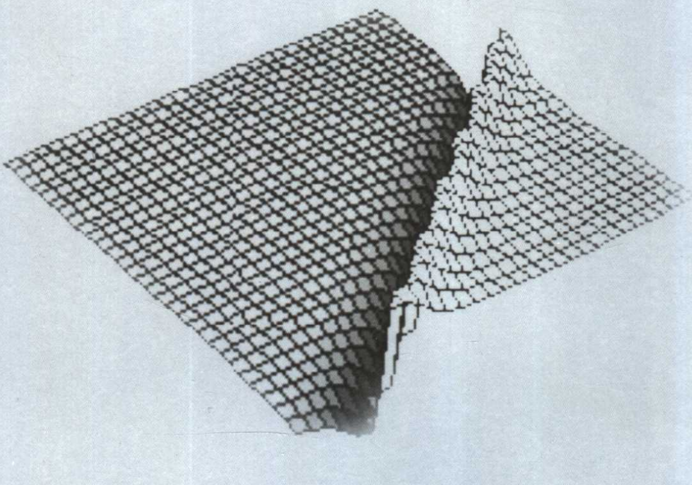
孤立子理论与可积系统

董焕河　张玉峰　著



中国科学技术出版社

孤立子理论与可积系统

董焕河　　张玉峰　　著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

孤立子理论与可积系统/董焕河,张玉峰著. —北京:中国科学技术出版社,2006.7

ISBN 7-5046-4409-9

Ⅰ.孤... Ⅱ.①董... ②张... Ⅲ.孤立子-研究 Ⅳ.O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071928 号

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081

电话:010-62103210 传真:010-62183872

http//www.kipbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京长宁印刷有限公司印刷

*

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 印张:9 字数:200 千字

2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

印数:1-500 册 定价:31.00 元

内容简介

本书介绍了作者近年来在孤立子和可积系统方面的部分研究成果. 全书共分六章, 第一章介绍了孤立子理论的产生、发展以及研究概述; 第二章介绍了 C-D 可积系统及其应用; 第三章介绍了 Backlund 变换及其有关问题; 第四章介绍了非线性发展方程的相似约化; 第五章介绍了非线性演化方程族的生成及其可积系; 第六章介绍了孤立子系统的 Hamilton 结构. 本书附录部分, 我们提供了 100 多个常见的偏微分方程, 以供读者参考. 本书可以作为数学或物理专业的高年级大学生和研究生教材, 也可供专业研究人员参考使用.

前　言

非线性问题在数学和力学中早已存在，从前人们只能对具体问题采取特殊的技巧或算法个别地解决，没有认识到它们之间的内在联系，不能用解析方法一般地处理.20 世纪 60 年代以后，随着非线性现象的深入研究，人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的反散射方法，这就启发人们去寻找各门自然科学的非线性现象的共性及其定量的研究方法，从而建立一门新的交叉学科 —— 非线性科学.

科学家迄今已经发现，非线性现象的三大普适类：混沌 (chaos)、孤立子 (soliton)、分形 (fractal)，并且在此基础上建立非线性科学的三大理论. 同时，非线性科学揭示了更普遍的、既确定又随机的混沌现象及其特有的规律性 (有的科学家称为“混沌序”或“分形序”，本文称之为非线性规律)，以及确定性现象、随机现象、混沌现象的转化关系.

因此，有的科学家认为，混沌学的创立是 20 世纪物理学的第三次革命；分形几何是继微积分以来的又一次革命；孤立子理论预示着物理学与数学的统一. 正因为非线性科学具有革命性意义，所以，它一出现就引起学术界的重视，现在对非线性科学的研究方兴未艾.

自 20 世纪 60 年代以来，孤立子理论与非线性可积系统的研究一直受到中外科学家的充分重视. 孤立子理论及非线性可积系统不仅被迅速应用于物理学中的场论、流体力学、非线性光学等分支，而且也被迅速应用于生物、化学、材料、天体、通信等自然科学的各个领域. 到目前为止，人们已发现许多的 (1+1) 维和 (2+1) 维的数学物理模型是可以用反散射变换 (IST) 方法求解的. 在反散射变换方法建立以后，人们又发现对于所研究的 (1+1) 维和 (2+1) 维的数学物理模型还存在着许多有趣的性质，如：无穷多守恒律和无穷多对称、双 (多) 哈密顿结构等. 目前已有许多长篇评述文章和书总结了这方面的发展，

如国际上 Ablowitz 和 Clarkson 的《孤立子、非线性发展方程和逆散射》, 国内谷超豪院士等著的《孤子理论及其应用》等文献. 然而, 到现在为止, 人们对非线性系统完全可积性的本质仍然还没有完全了解. 人们称一个非线性系统是可积的时候, 必须指明是在什么意义下的可积, 如:IST 可积 (在可以用反散射方法求解意义下的可积);Lax 可积 (在具有 Lax 对意义下的可积); Painlev é可积 (在具有 Painlev é性质意义下的可积); 在具有无穷多守恒律 (或具有无穷多对称) 意义下的可积等等. 也就是说, 到现在为止人们还没有真正给出完全可积的合适定义. 寻求可积系统一直是孤立子理论中的一项重要研究课题, 其中用 loop 代数的子代数设计等谱问题, 由相应 Lax 对的相容性可以导出 (1+1) 维孤子方程族, 如 TC 族、AKNS 族、WKI 族等. 特别是利用变分方法导出了著名的迹恒等式, 由此给出了求 (1+1) 维孤子方程族的 Hamilton 结构的方法. 最近屠规彰教授在对 loop 代数分析的基础上提出了从等谱问题出发获得方程族及其 Hamilton 结构的方法 —— 屠格式, 人们已获得了很多有意义的可积系. 但该格式中取的 loop 代数的基仅仅含有三类基元, 导出的方程族含有两个因变数, 三个的较少. 我们通过恰当构造 loop 代数的各种子代数获得了一些具有物理意义的可积 Hamilton 方程, 得到的方程族含有四个因变数, 然而这种方法所取的基元的阶数一般需要分别确定, 不宜作普遍的推广应用. 如果选取形式比较简单的 loop 代数的子代数, 含有多个位势、多个分量, 且使各基元的阶数一致，从等谱问题入手, 按屠格式给出新的可积族及其 Hamilton 结构，我们利用 loop 代数的子代数建立含多个位势函数分量的可积孤立子方程族, 以便对已有的著名方程族如 AKNS 族、KN 族、WKI 族等作统一表示. 另外, 对 loop 代数的子代数中的换位运算作线性叠加, 又可获得一批 loop 代数, 同样可设计出几类等谱问题. 由这些等谱问题通过求解静态零曲率方程得到时间等谱阵中元素间的递推关系. 再通过取适当修正项获得多个位势、多个分量的可积孤子方程族. 这里可能遇到的问题是不同的等谱问题会导出同一类孤子族.

本书的主要内容是由作者近年来在可积系统方面的一系列研究成果构成，书中许多成果刊登在国内外重要期刊上.

本书的整理和出版，自始至终得到了山东科技大学信息科学与工程学院院领导的支持和帮助，并提出了许多很好的建议，在此深表谢意. 梁向前、刘西奎、王新赠、张宁等老师和李柱、刘斌两位研究生在书稿整理、文字录入等方面做了不少的工作，在此一并表示感谢. 由于我们水平有限，书中不当之处，敬请读者批评指正.

作 者

2006 年 1 月于青岛

目 录

第一章 绪论

可积系统理论是孤立子理论中的重要研究课题，在可积系统研究中我国学者已经取得了很多研究成果. 谷超豪院士领导的“非线性科学”曾被列为我国攀登项目. 由于精确描述物理现象的非线性理论是科学发展的必然趋势，其中将不可避免地经常涉及十分复杂且精确的代数与微分等非数值运算，因此，借助计算机的大容量、高速度的特点，用精确的符号计算，机械化地实现数学功能非常必要，其中关键是建立适合于所考虑问题的构造性的代数算法，从而在计算机上实现，导致问题的机械化算法.

1.1 孤立子理论的产生及其发展

孤立子又称为孤立波，它是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解以及与其相应的物理现象. 用物理语言来说，这些性质是：① 能量比较集中于一个较窄小的区域；② 两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象 (即波形和波速能恢复到原状). 因此可以说，孤立子具有粒子和波的许多性能，在自然界有一定的普遍性. 比如，天上涡旋星系的密度波、海上冲击波、等离子体、分子系统、生物系统、光纤中光的传播、非线性传输线、磁学、流体动力学以及基本粒子等都与孤立子休戚相关. 孤立子理论自 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal 对孤立子命名后，得到了迅速发展，其发展可分为以下三个阶段.

第一阶段，主要是在 19 世纪.1844 年 9 月 Scott Russell 在英国科学促进会第 14 次会议上作了题为《论波动》的报告，记述了他沿着河道骑马追踪一种奇特的水波现象：1834 年 8 月，他在骑马沿着运河旅游时，偶然发现在狭窄的河道中行走的船突然停下时，被船体带动的水团积聚在船头并剧烈的翻动着. 不久，一个滚圆光滑且轮廓分明的巨大孤立波峰开始形成，并急速离开船头向前运动. 在行进中波的形状及其速度并无明显的变化，以后高度逐渐下降. 由此引进了孤立波的概念. 他进一步提出，这种孤立波实际上是流体力学方程的一个

稳定解. 但限于当时数学理论和科学水平的限制, 无法从理论上给予孤立波以圆满的解释.10 年之后,Russell 在线水槽中做了一些实验, 用多种方法激发看到了相同的现象, 但 Russell 的学说并未能成功地使当时的物理学家信服, 从 Lord Rayleigh 在 1876 年发表的论文看到, 孤立波问题引起了当时物理学家的极大争论, 直到 1895 年,Korteweg 和 de Vries 导出了著名的 KdV 方程, 解释了 Russell 的浅水波. 与此同时, 在 1876-1882 年发现了 Bäcklund 变换, 成为后来发展孤立子理论的重要基础.

第二阶段, 大致在 1955 ~ 1975 年间.1955 年,Fermi,Pasta, Ulam(FPU) 用计算机计算了一维非线性晶格在各个震动模之间的转换, 发现在时间足够长时能量又似乎回到了开始的分布. 由于 FPU 问题是在频域内考察的, 因此未能发现孤波解. 后来 Toda 研究了这种模式的非线性振动, 得到了孤波解, 使 FPU 问题得到圆满解答, 从而激发起人们对孤立子的研究兴趣.

1962 年,Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于基本粒子研究, 结果表明: 这个方程具有孤立波, 即使碰撞后二个孤立波仍保持着原来的形状和速度.1965 年,Zabusky 和 Kruskal 命名孤立子 (soliton). 他们借助计算机详细考察了等离子体中孤立波的互相碰撞过程, 进一步证实了这类孤立波相互作用后不改变波形的论断, 由此他们命名孤立波为孤立子, 从此孤立子作为应用科学中的新概念诞生了, 并第一次出现在文献上.1967 年 Gardner，Greene，Kruskal 和 Miura 发明了求解 KdV 方程的逆散射方法, 这一发现不仅对应用技术提供了崭新的方法和概念, 而且对数学自身的发展也有深远的影响.1973 年, Scott，Chu，Mclaughlin 发表综述文章, 在电子、光学界普及了孤子知识; 同年 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在;1975 年,Krumhansl 和 Schieffer 开始研究孤波的统计力学.

第三阶段，1973 年至今, 把孤子概念及理论广泛应用于物理学、生物学、天文学的每个领域. 同时, 开展了高维孤子的研究.1980 年非线性效应专刊《Physica D》问世, 与此同时光纤中的孤子已在实验中产生出来.

目前,“孤立子”一词虽然被广泛应用, 但是还没有一般形式的定义. 数学中将孤立子理解为非线性演化方程局部化的行波解. 此外, 孤立子也是各种各样的, 除常见的钟状和扭状孤立子外, 还有包络孤子、正孤子、反孤子、呼吸孤子以及它们叠加形成的孤立子.

1.2 孤立子理论研究概述

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分, 它所包含的内容和研究方法比较丰富, 国内外学者从不同方面进行了比较系统的研究, 特别是近十几年来研究人员不断扩大, 所取得的成果令人瞩目, 下面我们从几个方面做一下概述.

1.2.1 吴方法与非线性演化方程的精确解

著名数学大师陈省身先生曾说过: 我们要做好的数学, 比如说解方程. 众所周知, 正因为代数方程根式求解创立了 Galois 理论, 该理论的巨大成就使数学家将 Galois 理论的思想和方法推广到微分方程, 导致了 Lie 群和 Lie 代数的产生, 近年来 Lie 群在微分方程上的应用取得了重大进展 [4~6]. 解方程不仅促进数学理论的发展, 而且是实际问题的需要, 比如大量的力学问题可归结为求解微分方程 (这里微分方程包括常微分方程和偏微分方程)[7~12]. 构造微分方程的解析解是既非常重要又非常困难的问题. 几百年来许多数学家和力学家做了大量工作, 但仍有大量方程无法求出解析解, 即使已经求出解析解, 也各有各的技巧, 没有统一的方法, 正如 M. Klein 所言, 微分方程求解只是技巧的汇编. 随着计算机科学技术的发展, 我们的目的是用代数方法给出统一的算法, 该算法可以在计算机上实现, 使得尽可能多的解析解能按统一的算法机械化地产生. 基于这种统一化思想, 我们对来自客观实际的孤立子方程 (组) 尽可能地用统一算法模式求解.

我国著名数学家吴文俊院士创立了多项式方程组求解的吴消元法, 它以计算机代数为工具, 给出了初等几何问题的机械化证明, 特别是这种方法可用于微分方程的精确求解. 如构造精确解、Painleve 检验、孤子族的生成及其 Lax 表示、可积系统的约化和分解、寻求对称

群等常涉及到十分复杂的符号计算和推理, 但这些符号计算具有重复性固定的规律, 许多计算复杂冗长，人力难以完成, 正是计算机代数的用武之地 [1].

1992 年, 石赫研究员利用吴方法求解了著名的 Yang-Baxter 方程 [14,15].1997 年, 石研究员利用张鸿庆教授处理 Maxwell 方程的思想 [16], 巧妙地引入一种线性微分变换, 利用吴消元法将复杂的 Yang-Mills 方程约化为三个简单的二阶线性偏微分方程 [14].

近来, 李志斌教授利用吴方法和计算机代数, 在非线性演化方程行波求解方面做了大量有益工作 [17~21]. 他引用了一种直接有效的 Tanh 法 [17,18], 将微分方程求解问题转化为代数方程求解, 沟通了吴方法与微分方程的关系, 成功地得到了一大批非线性演化方程的精确孤立子解. 著名的 Belousov-Zhabotiskii(BZ) 反应扩散方程主要出现于化学物理、生物物理等领域 [22], 其求解形式多种多样, 1996 年，李教授、石赫研究员利用吴方法统一地获得了方程 6 种行波解 [19], 这充分表明了吴方法在寻找微分方程新的精确解方面的巨大作用.

1.2.2 PDEs 的精确解及其若干求法介绍

寻求方程的解 (包括数值解和精确解) 是一个非常古老且很重要的课题. 有时为更准确地研究物体变化的性质, 我们需要寻求其对应方程的精确解. 自从 Russell 发现孤立子及 Korteweg 和他的博士 de Vries 提出 KdV 方程并获得其精确孤波解以来, 孤立子及一大批非线性方程的解的构造引起了人们的极大兴趣. 由于非线性发展方程的自身复杂性, 用现有的方法无法求出其非平凡的解, 即使获得了方程的精确解, 也只是少数的一些解, 无法求出其全部解, 并且对不同类型的方程, 用的方法可能不一样. 至今还没有任何一种方法可以包容其他方法, 除非这种方法能求出所有方程的所有解, 这看起来不太可能. 这就需要人们发现更新、更有效的方法来研究微分方程的求解问题.

虽说 PDEs 的求解技巧性较强, 但也蕴涵着一系列构造精确解的有效方法, 如反散射方法、Darboux 变换法、Hirota 方法、Riemann 问题方法 [22,23]、矩阵投影法 [24]、相似解方法 [25~32]、Painleve 截尾

展开法 [33~36] 等, 随着各种求解方法的出现, 过去难以求解的方程的精确解得到了解决. 而且还发现了许多有重要物理意义的新解 [1].

1967 年,Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura[37,38] 发现了 KdV 方程反散射方法, 也称为非线性 Fourier 变换法, 利用量子力学中 Shrodinger 方程的特征问题及其反问题关系, 导出了 KdV 方程初值问题的解依赖于线性积分方程的关系, 得到了许多结果, 其中包括任意数目孤立波相互作用的显式解 [1]. Lax 又将上述思想加以推广, 用于一般非线性发展方程的求解问题中; Zakharov 和 Shabat[39] 本质上推广了这一方法, 解决了高阶 KdV 方程等; 屠规彰教授、李翊神教授等 [38,40~42] 更加一般化了这一方法, 并作了许多有代表意义的工作. 同时又开辟了 Bäcklund 变换法的广泛应用性, 由 Bäcklund 变换引出的非线性叠加原理将非线性发展方程的求解问题转化为纯代数运算, 由已知解迭代得到新解 [43~46].

1971 年,Hirota 引入了双线性方法, 为求非线性发展方程的孤子解提供了简单而有效的工具 [47~50]. 1975 年,Wahlquist 和 Estabrook[51] 提出了非线性方程的延拓结构概念, 给出了求 IST 方程的一个更系统的方法 [52,53].

1978 年, 张鸿庆教授 [16] 提出了微分方程求解的算子化方法, 称为 $AC = BD$ 方法. 其具体模式是: 设 $Au = 0$ 为待求解方程,$Dv = 0$ 为会解或易解方程, 对给定的算子 A, 构造算子对 C, D, 使得通过变换 $u = Cv$ 约化为 $Dv = 0, C\ker D = \ker A$, 并称 $Au = 0$ 是 C-D 可积系统. 若 $C \ker D \subset \ker A$, 但 $C \ker D \neq \ker A$, 则称 $Au = 0$ 是部分 C-D 可积系统. 用这种方法成功地求解了一大批力学中的方程 (组) 的精确求解问题 [7,9,10,54,55].

1994 年, 王明亮、李志斌教授提出了齐次平衡法又称为拟解法 [51~61], 成功地解决了一大类非线性发展方程的精确解 [57~67]. 1998 年, 范恩贵博士、张鸿庆教授进一步发展了齐次平衡法, 由此不仅得到了孤波型解, 而且还得到了其他类型的精确解, 比如三角函数形式解、奇性解等. 闫振亚博士、张鸿庆教授又将齐次平衡法再次延拓, 即将一般多项式形式解

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_iv^i(\xi),v'=k(1\pm v^2)\text{ 或 }v'=b_1+b_2v^2$$

改为

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}\cos\omega^{i-1}(\xi)[A_i\sin\omega(\xi)+B_i\cos\omega(\xi)]+a_0,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\sin\omega$$

的形式, 再利用齐次平衡法步骤得到了孤子方程 (组) 的不同形式的精确解 [68,69,70]. 其实, 齐次平衡法仅是 $AC=BD$ 的特例 [71,72].

1.2.3 Bäcklund 变换、Darboux 变换和无穷守恒定律

瑞典数学家 Bäcklund 于 1883 年研究负常数曲率的曲面时, 发现了 Sine-Gordon 方程的解 u 和 $\bar{u}$ 有如下关系:

$$\left(\frac{u-\bar{u}}{2}\right)_x=a\sin\frac{u+\bar{u}}{2},\left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right)_t=a^{-1}\sin\frac{u-\bar{u}}{2}$$

这就是 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换, 该变换给出了从 Sine-Gordon 方程的一个解得到另一个解的一个作法 [44]. 1974 年,Lamb[73] 给出了 Shrödinger 方程的 Bäcklund 变换;1976 年,Wahlquist 和 Estabrook[51] 提出了求非线性发展方程的 Bäcklund 变换的延拓方法, 把 Bäcklund 变换、守恒律及反散射变换统一在一个新概念即拟位势中.

1986 年, 谷超豪院士 [74,75,76] 从 Darboux 阵出发构造了 KdV 族及 AKNS 梯队的 Bäcklund 变换, 从而解决了许多方程族的 Bäcklund 变换问题. 但由于利用 Bäcklund 变换求解是由方程的旧解或者已知解来求新解, 实际运算起来相当繁杂, 从而限制了其应用. 当然互换定理和非线性叠加公式 [77] 能给出解之间的代数运算, 使运算复杂度降低,可由已知解递推得到新解,胡星标教授对此做了很好的研究工作[78~81]. 由于 Bäcklund 变换是由完全可积的非线性偏微分方程组所定义的,所以经典的 Bäcklund 变换的显式表达式一般是难以给出的,但是 Darboux 变换是得出显式解的有效方法[44],使用起来更简便.