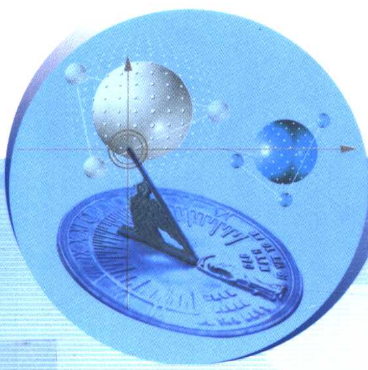
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济数学基础
——微积分

JINGJISHUXUEJICHU
WEIJIFEN

主编　黄惠青



PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI

经济科学出版社
Economic Science Press

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济数学基础

——微积分

主编 黄惠青

经济科学出版社

责任编辑：王　丹
责任校对：董蔚挺
版式设计：代小卫
技术编辑：李长建

经济数学基础——微积分

主编　黄惠青

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100036

总编室电话：88191217　发行部电话：88191540

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

北京密兴印刷厂印刷

华丰装订厂装订

787×1092　16 开　21 印张　380000 字

2007 年 6 月第一版　2007 年 6 月第一次印刷

ISBN 978-7-5058-6265-4/F·5526　定价：29.00 元

(图书出现印装问题，本社负责调换)

内容简介

本教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。它是在1998年出版的《经济数学基础——微积分》一书的基础上，经过多年的教学实践，并广泛搜集读者及同仁对本教材的意见和建议之下编写而成的。

本教材充分考虑高职高专经济管理类各专业及成人高校经济管理类各专业的教学特点和实际需求，本着“服务专业，够用为度”的原则，采用简单易懂的语言，系统地介绍了微积分的基本概念、基本理论、基本方法及其在经济管理中的应用。

本教材内容翔实，例题丰富，语言流畅，可读性强，易教易学。

本教材每小节均配有一定数量的练习题，每章还配有A、B两类综合题。为了便于读者的学习，我们还专门编写了配套的学习指导书，除了对各章的内容进行归纳总结外，对本教材的全部练习和习题做了详尽解答。

本教材可作为高等职业技术学院、高等专科学校的经济管理类各专业以及各类成人高校经济管理类各专业的高等数学教材，也适用于读者自学。

前　　言

QIAN YAN

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。它是在1998年出版的《经济数学基础——微积分》一书的基础上，依照教育主管部门制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》及成人高校财经类专业《经济应用数学基础教学大纲》的要求重新编写而成的。编写时，在保持原教材优点的基础上，我们充分考虑到高职高专及成人高校的教学特点和实际需求，注重使用者的主客观条件，本着“服务专业，够用为度”的原则，在内容安排及表现形式上做了一定的调整，使之更具内容翔实，重点突出，难易结合，通俗易懂、易教易学的特点。

本书的主要内容包括：一元函数的微积分、多元函数的微积分以及级数中的数项级数部分。

本书具有如下特色：

1. 系统性强。本书力图在80～100课时内让读者完整、系统地了解微积分学中的重要概念、理论和基本方法，从而建立正确的数学概念和数学思想。

2. 淡化抽象的概念和理论。例如，我们采用描述性的语言给出了极限的定义，使之更加易懂、易学、易记。在理论上，以学生容易理解和不影响教学体系为尺度，尽可能采用几何直观的方式启发学生。很多定理我们只给出了结论或结果，一些算法也直接给出公式或结论，避免了繁琐的推导和演算。

3. 可读性强。本书尽可能采用通俗易懂的语言代替抽象的数学语言，使之读起来流畅易懂，尤其适合业余读者自学。

4. 突出实际应用。本书结合经济管理类专业的实际，给出了大量的具有实际意义的例题和习题，以帮助读者学会用数学方法描述、分析进而用量化的方法解决经济管理中的一些基本问题。

5. 例题丰富。本书各章节都配备了大量的例题，并对一些重要的计算问题进行总结，归纳出具体的解题步骤，使之易教易学。

6. 习题量大。全书配有较多、较全面的习题，所选习题按教学大纲的要

求都具有针对性和代表性。除每小节配有一定数量的练习题以便读者对该节基础知识的掌握和基本方法的训练外，每章还配有A、B两类题。其中A类题是综合题，B类题是适应各类考试的标准化试题，供学习完一章后总结、复习、提高之用。

7. 配套指导。为了便于读者的自习，我们还专门编写了配套的学习指导书。内容包括各章的学习重点和难点以及全书的练习和习题的详尽解答。

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校的经济管理类各专业以及各类成人高校经济管理类各专业的高等数学教材，也适用于读者自学。考虑到各专业的授课学时不同，对学时少的专业，书中加有*标记的内容可根据实际情况选用或不用。

参加本书编写的有：中央财经大学的黄惠青、贺今、王义东、孙昭旭。黄惠青任主编，贺今、王义东任副主编。

由于我们水平所限，教材中难免存在不妥之处，恳请使用本教材的师生多提宝贵意见，以便我们再版时改进。

编者

2007年6月

目录

Weiyifen　　　　Contents

第一章　函　　数

微积分又称为高等数学（微积分是高等数学的简称）．与研究以常量为主的初等数学不同，微积分研究的对象是变量，而函数是涉及变量最主要的概念．学习微积分这门课程，首先要从研究函数的概念及性质入手．

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

在自然现象和社会生产中常常会遇到各种各样的量，其中有些量的数值是不变的，例如地球的直径、地球与月球的距离、长度单位 1 米、时间单位 1 秒，等等．这些量称为常量，**即在某一过程中不起变化，保持同一数值的量称为常量**．习惯上用 a、b、c 等字母表示．**在某一过程中发生变化，可以取不同数值的量称为变量**．例如变速运动的速度、某些商品的价格、股市中的指数，等等．习惯上变量用 x、y、z 等字母表示．

二、函数的概念

在观察一个具体的变化过程中会发现，一个变量的变化通常不是孤立的，而是伴随着其他变量的变化而变化的．这些变量之间相互联系、相互对应，遵循着一定的变化规律．请看下面的例子．

例 1. 正方体体积 V 随边长 x 的变化而变化，其变化规律为 $V=x^3$．

例 2. 圆心在原点半径为 a 的圆上的每一点 (x, y) 满足关系式 $x^2+y^2=a^2$．

例 3. 研究一根铜线的电阻 R 与温度 t 的关系时，通过实验得下列表格：

表 1－1 中列出了变量 t 与变量 R 对应的数值，同时反映了两个变量的对应关系．

表 1—1

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R	76.3	77.8	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

例 4. 某种产品的总成本 C 与总产量 Q 的关系，如图 1—1 所示：

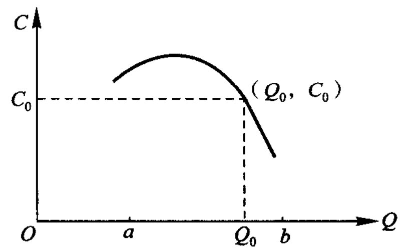


图 1—1

Q 在 $[a, b]$ 上任取一个具体数值 Q_0，从而在曲线上得到点 (Q_0, C_0). 这样，根据图 1—1 的曲线体现出来的对应规律，就确定了 Q 与 C 的对应关系.

抛开以上各例的实际意义，我们可以发现以上四个例子中各有两个变量，其中一个变量在一定范围内的变化可以引起另一个变量的变化，且该变量在其变化范围内每取一个值时，另一个变量也就有惟一的数值与之对应，两个变量的这种对应关系就是函数的本质.

定义 1.1 设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在其变化范围内所取的每一个值，变量 y 按一定的规则总有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作：

$$y=f(x),$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，f 称为对应关系.

在函数 $y=f(x)$ 中，函数 y（因变量）就是通过对应关系 f 与自变量联系到一起的. 自变量通常使用字母 x，t，r，p，q 等表示，因变量或函数通常使用 y，z 来表示，对应关系通常用 f，g，φ，ψ 等表示，即函数可记为 $f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 等.

定义 1.2 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，记为 D，对应的函数 $f(x)$ 的取值范围称为函数的值域，记为 Z.

自变量根据取值的不同可以划分为离散型与连续型变量.

定义 1.3 只能取自然数或者只能跳跃式地取值的变量称为离散型变量，

可以取任意实数的变量称为连续型变量.

如例 3 中的自变量就是离散型变量，而例 1、例 2 和例 4 中自变量都属于连续型变量.

根据函数的定义，我们要求自变量在定义域内每取定一个值时，函数 y 总有惟一确定的值与之对应，这种函数称为单值函数. 如例 1、例 3 和例 4，但有时对于自变量的一个取值，函数可以有多个值与之对应，这种函数称为多值函数，如例 2 经变形后可得到 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，此处 y 就是多值函数. 但是只要对变量加以某种限制，多值函数仍能成为单值函数. 如例 2 若规定 $y>0$，仍可以成为单值函数. 在本书中，如无特别说明，所研究的函数均指单值函数.

三、函数的表示法

函数的表示法是指表示函数对应规律的方法.

函数的表示法有三种形式：

1. 解析法

用数学式子表示自变量与因变量的对应关系，即变量之间的对应规律由解析式表示，这种方法称为公式法，又称为解析法，这样的数学公式称为函数表达式，又称为函数的解析表达式，如例 1 和例 2. 解析法便于运算和分析，微积分主要讨论用解析法表示的函数.

2. 图像法

用一条平面曲线表示自变量与因变量的对应关系，即变量之间的对应规律由图形表示的方法称为图像法. 平面曲线称为函数的图像，它是函数关系的几何表示，如例 4，图像表示法把函数中的变量关系通过图形直观地表示出来.

3. 列表法

把自变量的一系列取值与对应的因变量列成表格，由此来表示自变量与函数的关系，称为列表法，离散型变量通常用这种表示法，如例 3，再如三角函数表等.

在本教材中，我们主要使用函数的解析法表示函数，而图像法和列表法只作为必要补充.

当函数关系由解析式表达时，确定函数的定义域通常考虑两种情况：一是确定使这一表达式有意义的自变量取值的全体；二是对实际问题，应根据问题的实际意义来确定.

四、反函数

在函数关系中，自变量处主导地位，因变量（函数）是因自变量的变化而

变化的量，处于从属地位，但是这种地位是可以交换的，即 y 也可以作为自变量，这时 x 就是 y 的函数.

例如，函数 $y=f(x)=x^3$，由此式解出 x，得 $x=\sqrt[3]{y}$，此时若把 y 看做自变量，x 看做因变量，则由 $x=\sqrt[3]{y}$所确定的函数称为 $y=f(x)=x^3$ 的反函数. 习惯上，仍用 x 表示自变量，y 表示因变量，通常把 $x=\sqrt[3]{y}$改写作 $y=\sqrt[3]{x}$. 由图1—2 知，函数 $y=f(x)=x^3$ 与其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

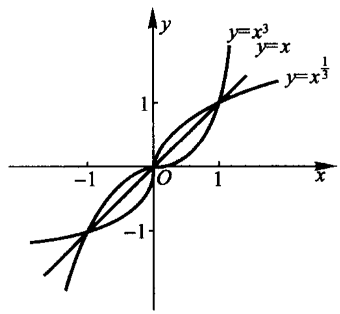


图 1—2

一般地，关于反函数有如下定义.

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$，由此解析表达式，经过解方程用 y 表示 x，得到 x 为 y 的函数，则称这个新函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

由定义可知，当 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 时，那么 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数自然就是 $y=f(x)$，即 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 这时变量 x 与变量 y 是一一对应的. $y=f(x)$ 的定义域是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域，$y=f(x)$的值域是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

按习惯写法，将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 与 x 互换，函数 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$.

有时也把相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说的原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 5. 求 $y=2x+1$ 的反函数.

解： 首先，由已知式解出 x，

$$x=\frac{y-1}{2},$$

其次，将上式中的 x 与 y 互换，得到按习惯记法的反函数

$$y=\frac{x-1}{2}.$$

例 6. 求 $y=\frac{3x+2}{2x-1}$的反函数.

解： 由 $y=\frac{3x+2}{2x-1}$解出 x，有

$$(2x-1)y=3x+2,$$

或

$$(2y-3)x=y+2,$$

由此有

$$x=\frac{y+2}{2y-3}.$$

将上式中的 x 与 y 互换，得到 $y=\frac{3x+2}{2x-1}$的反函数 $y=\frac{x+2}{2x-3}$.

一个函数如果存在反函数，其自变量与因变量必符合一一对应的函数关系.

例如，$y=\sin x$ 在整个定义域（$-\infty$，$+\infty$）上 x 和 y 不是一一对应的，不存在反函数，而在定义域的部分区间 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上，x 和 y 形成一一对应关系，故存在反函数 $x=\sin^{-1}y$，通常记作 $y=\arcsin x$，称为反正弦函数，反正弦函数的定义域是 $[-1,\ 1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. 同理，余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）的部分区间 $[0,\ \pi]$ 上，x 和 y 形成一一对应关系，存在反函数. $y=\cos x$ 的反函数是 $y=\arccos x$，它的定义域是 $[-1,\ 1]$，值域是 $[0,\ \pi]$.

练习 1—1

1. 判断下列各题中 y 是否为 x 的函数：

(1) $y=\lg x^2$；　　(2) $y=\lg(-x^2)$；

(3) $y>x$；　　(4) $y=\sqrt{x}+\lg(-x)$.

2. 作出下列函数的图形：

(1) $y=3x+4$；　　(2) $y=\frac{1}{x-1}$；　　(3) $y=\sin x$；

(4) $y=\sqrt{x}$；　　(5) $y=x^2+1$；　　(6) $y=\lg x$；

(7) $y=2^x$；　　(8) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x-1}$；

(3) $y=\frac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=1+\ln(x+3)$；

(5) $y=2^{x-1}$.

§1.2　函数的定义域和函数值

函数的定义域可以用集合来表示，也可以用区间来表示. 区间就是数轴上的一个子集. 区间可分成有限区间和无限区间两大类，其中有限区间包括：

(1) 开区间 (a, b)，即数集 $\{x|a<x<b\}$；

(2) 闭区间 $[a, b]$，即数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 左开右闭区间 $(a, b]$，即数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$；

(4) 左闭右开区间 $[a, b)$，即数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$.

无限区间包括：

(1) $[a, +\infty)$，即数集 $\{x|a\leqslant x<+\infty\}$；

(2) $(a, +\infty)$，即数集 $\{x|a<x<+\infty\}$；

(3) $(-\infty, b)$，即数集 $\{x|-\infty<x<b\}$；

(4) $(-\infty, b]$，即数集 $\{x|-\infty<x\leqslant b\}$；

(5) $(-\infty, +\infty)$，即数集 $\{x|-\infty<x<+\infty\}$，即为整个数轴.

在数轴上的子集中有一个特殊的子集——邻域.

定义 1.5　设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的集合为 a 的 δ 邻域，点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径.

实际上，点 a 的 δ 邻域就是以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$.

在点 a 的 δ 邻域中去掉中心点 a，则此集合称为 a 的 δ 空心邻域或去心邻域，用区间表示为 $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$.

如前所述，当函数关系由解析式表达时，函数的定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合.

例 1. 求 $y=\frac{1}{x^2-5x+4}$ 的定义域.

解：要使解析式有意义，应使分式的分母不为零，即

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)\neq 0,$$

所以

$$x\neq 1,\ x\neq 4,$$

因此函数定义域 $D=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 4)\cup(4,\ +\infty)$.

例 2. 求 $y=\lg(x^2-9)$ 的定义域.

解：要使解析式有意义，应使对数的真数大于零，即 $x^2-9>0$，由此得 $x^2>9$，即 $x<-3$ 或 $x>3$，因此函数定义域 $D=(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$.

例 3. 求 $y=\dfrac{1}{x+2}-\sqrt[4]{16-x^2}$ 的定义域.

解：为使分母不为零，故 $x\neq -2$，为保证偶次根号下被开方数为正数或零，必须有 $16-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 16$，因此有 $-4\leqslant x\leqslant 4$，于是函数的定义域为 $[-4,\ -2)\cup(-2,\ 4]$.

例 4. 求 $y=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\lg(x-2)}$ 的定义域.

解：对 $\sqrt{x^2+1}$，x 的取值范围为 $(-\infty,\ +\infty)$，对 $\dfrac{1}{\lg(x-2)}$，由于 $\lg(x-2)$ 不能等于零，并且 $(x-2)>0$，所以 x 的取值应满足条件 $x\neq 3$ 和 $x>2$.

综上所述，函数的定义域为 $(2,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.

定义 1.6　若两个函数的定义域相同，且解析式也相同，则称这两个函数相同.

例 5. 判断函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)}$ 和 $y=x-1$ 是否相同.

解：由于 $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$，而 $y=x-1$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，两个函数的定义域不同，所以两个函数是不相同的函数.

反过来，只要定义域和解析表达式相同，便是相同的函数. 这时与变量采用的字母无关. 例如：$y=x^2+2x-1$ 与 $z=u^2+2u-1$ 是完全相同的函数.

对一个函数 $y=f(x)$，当其自变量 x 在定义域内取某一数值 x_0 时，对应的函数值记作 $y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$，这时称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义. $y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$ 表示在 $f(x)$ 的表达式中，凡有 x 的地方都用 x_0 替代所得到的数值.

例 6. 设 $f(x)=x^2-\lg(x+1)+7$，求：$f(0)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解：$f(0)=0^2-\lg(0+1)+7=7$，

$$f(-x)=(-x)^2-\lg(-x+1)+7=x^2-\lg(1-x)+7,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\lg\left(\frac{1}{x}+1\right)+7=\frac{1}{x^2}-\lg(1+x)+\lg x+7.$$

例 7. 若 $f(x+1)=x^2+6x-2$，求 $f(x)$.

解： 设 $x+1=t$，则 $x=t-1$，因此

$$f(x+1)=f(t)=(t-1)^2+6(t-1)-2=t^2+4t-7,$$

即

$$f(x)=x^2+4x-7.$$

例 8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求：$f(x-5)$，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的定义域.

解： 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以，要使 $f(x-5)$ 有意义，必须

$$0\leqslant x-5\leqslant 1，即\ 5\leqslant x\leqslant 6.$$

故 $f(x-5)$ 的定义域为 $[5,6]$.

要使 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)$有意义，必须使得

$$\begin{cases}0\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 1,\\ 0\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\quad 同时成立,$$

所以，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的定义域为一点$\frac{1}{2}$.

例 9. 函数 $y=f(x)$ 由点 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值改变了多少？

解： 因为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值为 $f(x_0)$，在点 $x_0+\Delta x$ 的函数值为 $f(x_0+\Delta x)$，所以函数值改变了：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的改变量.

练习 1—2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+1}$；

(3) $y=\frac{1}{1-e^x}$；　　(4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{9-x^2}}$；