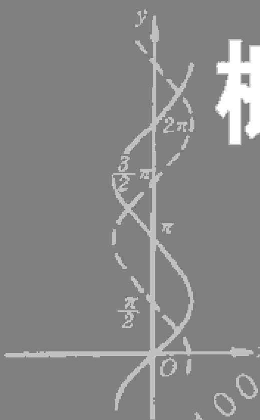
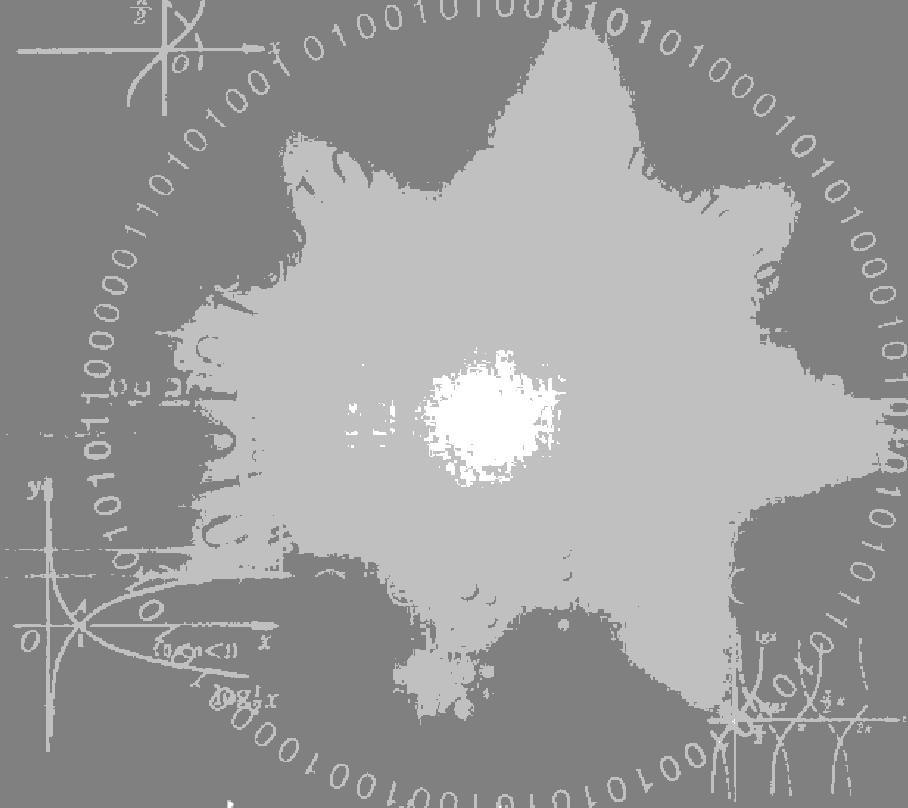
国家自然科学基金（天元基金）资助项目（10626014）



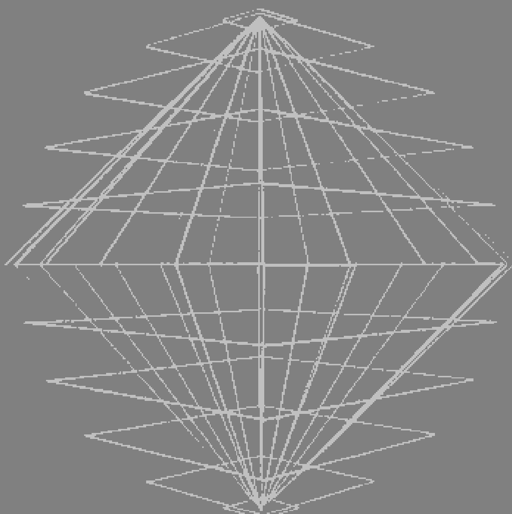
概周期型函数

姚慧丽　著



東北林業大學出版社

责任编辑　姜俊清
封面设计　魏丽娜



ISBN 978-7-81076-985-3

9 787810 769853 >

国家自然科学基金（天元基金）资助项目（10626014）

概周期型函数

姚慧丽　著

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

概周期型函数/姚慧丽著．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2007.3
ISBN 978－7－81076－985－3

Ⅰ．概… Ⅱ．姚… Ⅲ．周期函数 Ⅳ．O174.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 033925 号

责任编辑：姜俊清
封面设计：魏蔚娜

NEFUP

概周期型函数
Gaizhouqixing Hanshu
姚慧丽 著

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨市工大节能印刷厂印装
开本 850×1168 1/32 印张 4.125 字数 100 千字
2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册
ISBN 978-7-81076-985-3
O·82 定价：15.00 元

前　言

概周期型函数理论是由丹麦数学家 H. Bohr 在研究傅立叶级数时于 1925～1926 年提出的[1]。众所周知，全体周期函数在任何范数下都构不成 Banach 空间，而概周期函数全体由上确界范数，则构成了一个具体的 Banach 空间。这就意味着概周期函数比周期函数的应用要广泛得多。随后，H. Bohr 的工作由 S. Bochner，J. Von Neumann 等人进行了实质性的深人研究[2－4]。概周期函数的经典理论，又在几个方面得到了推广。其中一个主要方面，就是概周期型函数，与之相关的是函数的遍历性。而且概周期型函数其他数学分支中都有重要的应用，如群论[5]、微分方程[5]、发展方程及谱理论[6]等。

鉴于概周期型函数理论在数学中的上述地位，结合作者多年来的教学研究与科学研究的实际，本书主要研究了概周期型函数在几类微分方程和延迟积分方程的应用，以及伪概周期函数在傅立叶展开逆问题上的应用。

为了使读者不借助其他文献就能读懂本书，本书第一章介绍了概周期型函数的基本理论；第二章主要介绍几类概周期型微分方程；第三章主要介绍一类延迟积分方程的概周期型解；第四章介绍了伪概周期函数在在傅立叶展开逆问题上的应用；第五章介绍了一类差分差分方程的渐近概周期序列期。

本专著是笔者多年来教学研究与科学研究的结晶，但限于作者的能力，可能有些地方心有余而力不足，仍有不成熟的数学思想与方法，因此，谨请读者批评指正。

本书在撰写过程中得到了哈尔滨理工大学应用科学学院和应用数学系有关领导的大力支持，对于在本书撰写和出版过程中给予帮助的同志在此一并表示由衷的感谢。

姚慧丽
2006年12月
于哈尔滨理工大学应用数学系

目 录

第一章 概周期型函数

本章中，主要介绍四种函数空间。这四种函数空间有一些共同的性质。因此，在许多领域它们都有类似的应用。本书特别使我们感兴趣的是在微分方程和积分方程领域。与此同时，我们也能看到它们之间的本质差别。另外，本章主要是为了让读者能独立地阅读此书而介绍的基本知识，因此对一些基本结论，只介绍内容，而省略证明，对证明感兴趣的读者可参看文献[7]。

§1 概周期函数

在这节中，我们将给出概周期函数的一些经典结果。首先，介绍实轴 R 上的数值概周期函数。之后，为了把这些函数应用到微分方程中，介绍关于 $t\in R$ 且一致对 n 维复空间的紧子集的概周期函数。最后，简单介绍 Banach 值的概周期函数。

一、数值概周期函数

本书中，R 表示整个实轴，$\mathbf{C}$ 表示复数集，$C(R)$ 表示 R 上的所有有界的、连续的、复值函数全体。对每个 $f\in C(\mathbf{R})$，定义其范数为 $\|f\|=\sup_{t\in R}|f(t)|$，则 $C(R)$ 构成一个 Banach 空间。一个函数空间 F 称作 C^* 代数是指如果 F 是一个 Banach 空间并且在函数乘法和共轭运算下是闭的。显然 $C(R)$ 是一个 C^* 代数。

一个三角多项式下列形式的函数

$$S(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k e^{i\lambda_k t}$$

这里，$\lambda_k\in\mathbf{R}$，$c_k\in\mathbf{C}$。

定义 1.1 一个函数 $f\in C(R)$ 称作是概周期的是指如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个三角多项式 S_ε 满足

$$\|f-S_\varepsilon\|<\varepsilon$$

用 $AP(R)$ 表示这样函数的全体。

虽然 $ce^{i\lambda t}$ 的函数都是周期的,但和函数 $c_1e^{i\lambda_1 t}+c_2e^{i\lambda_2 t}$ 当 λ_1 和 λ_2 的比不是有理数时却不是周期的。因此一个三角多项式不一定为周期函数。由于 R 上的周期函数类不构成线性空间,这就使得周期函数在应用上受到限制。

从上面的定义看,$AP(R)$ 是三角多项式在 $C(R)$ 中的完备化空间,因此 $AP(R)$ 自然成为我们的研究的对象。因为三角多项式全体构成的集合在函数的乘法和共轭运算下是闭的,因此 $AP(R)$ 也是。

对 R 上的函数 f,由 $s\in R$ 产生的平移函数 R_sf 定义为

$$R_sf(t)=f(t+s),\text{对所有的 } t\in R$$

我们称一个函数集 F 是平移不变的是指 $\{R_sf: f\in F, s\in R\}\subset F$。注意到三角多项式全体构成的集合是平移不变的且对任意的 $f,g\in C(R)$ 有

$$\|R_sf-R_sg\|\leqslant\|f-g\|$$

结合上面的讨论有下面的结果。

定理 1.1 $AP(R)$ 是 $C(R)$ 的包含常数函数的 C^*-代数,而且是平移不变的。

推论 1.1 $AP(R)$ 中的函数 f 在 R 上是一致连续的。

推论 1.2 设 $f\in AP(R)$ 满足它的导数 f' 在 R 上是一致连续的,则有 $f'\in AP(R)$。

定理 1.2 如果 $f\in AP(R)$,则极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a}f(t)\,dt$$

一致关于 $a\in R$ 存在。另外,极限与 a 无关。

定义 1.2 让 $f\in C(R)$，如果极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,\mathrm{d}t$$

存在，则称此极限为 f 的平均，并且记为 $M(f)$。

如果 $f\in AP(R)$，则平均 $M(f)$ 也可以用 $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\,\mathrm{d}t$ 来计算。

下面的两个定理在概周期函数理论方面是很重要的，由于它们，使得傅立叶分析问题可以在 $AP(R)$ 上展开。

定理 1.3 让 $f\in AP(R)$，则存在至多可数的 λ 满足 $\alpha(\lambda)\neq 0$，这里 $\alpha(\lambda)=M(fe^{-i\lambda})$。

对函数 $f\in AP(R)$，集合

$$\mathrm{Freq}(f)=\{\lambda\in R:\alpha(\lambda)\neq 0\}$$

称为 f 的频率集。Frep(f) 中的元素称为 f 的傅立叶指数，$\alpha(\lambda)$ 称为 f 的傅立叶系数。由定理 1.3 知，Freq(f) 是可数集。让 Freq$(f)=\{\lambda_k\}$ 以及 $A_k=\alpha(\lambda_k)$。这样 f 有一个相对应的傅立叶级数

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{\lambda_k t}。$$

定理 1.4 如果 $f\in AP(R)$，则 Parsval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|^2=M(|f|^2)$$

成立。

接下来我们将给出概周期函数的一些等价定义。首先，先说明一些记号。序列 $\{\alpha_n\}$ 用 α 表示。如果 $\beta=\{\beta_n\}$，则 $\beta\subset\alpha$ 意味着 β 是 α 的一个子列。记 $\alpha+\beta=\{\alpha_n+\beta_n\}$；$-\alpha=\{-\alpha_n\}$；并且 α 和 β 是 β' 和 α' 各自的公共子列是指对给定的 $n(k)$ 满足 $\alpha_k=a'_{n(k)}$，$\beta_k=\beta'_{n(k)}$。算子 T 定义为 $T_\alpha f=g$，是指 $g(t)=\lim\limits_{n\to\infty}R_{\alpha_n}f(t)$，并且只有极限存在时才这样写。

定理 1.5 对 $f\in C(R)$，下列陈述是等价的。

(1)$f\in AP(R)$;

(2)对每对序列α'和β',存在各自的公共的子列$\alpha\subset\alpha',\beta\subset\beta'$满足

$$T_{\alpha+\beta}f(t)=T_{\alpha}T_{\beta}f(t)\quad(t\in R)$$

(3)f是正规的,也就是集合$\{R_sf: s\in R\}$在$\mathbf{C}(R)$中是相对紧的;

(4)对每个$\varepsilon>0$,存在数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足

$$\min\{\ \|R\ a_if-R_sf\|\ \}<\varepsilon\quad(s\in R)$$

(5)对每个$\varepsilon>0$,都存在一个数$l_\varepsilon>0$满足长度为l_ε的任意区间内,都存在数τ使下式成立:

$$\|f-R_\tau f\|<\varepsilon$$

数τ称为f的ε-平移数。

推论1.3 设$f\in AP(R)$满足$\inf\limits_{t\in R}|f(t)|>0$,则$f^{-1}\in AP(R)$。

推论1.4 设$f\in AP(R)$。对任意的$\varepsilon>0$,存在数$l>0$和$\delta>0$满足R内长度为l的任一区间内都含有长度为δ的子区间,且这个子区间内的所有数都是f的ε-平移数。

定理1.6 不同的概周期函数的傅立叶级数是不同的。

二、一致概周期函数

前面,我们考虑的是定义在R上的概周期函数。为了把概周期函数应用到微分方程中,我们必须扩大函数的定义域。设Ω表示n维复空间,$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\Omega$,$\mathrm{C}(\Omega\times R)$表示$\Omega\times R$上的有界的,连续复值函数全体构成的空间。以下$K$表示$\Omega$的任意紧子集。

定义1.4 一个函数$f\in\mathrm{C}(\Omega\times R)$称作关于$t\in R$且一致对于$Z\in K$($K$是$\Omega$的任意紧子集)是概周期的,是指对任意的$\varepsilon>0$,都存在一个相对稠子集$P_\varepsilon$满足

$$|f(Z,t+\tau)-f(Z,t)|<\varepsilon,t\in R,\tau\in P_\varepsilon,Z\in K$$

用 $AP(\Omega\times R)$ 表示这样函数全体。为了方便,称这样的函数为一致概周期的。

设 $J\in\{R,R^+\}$,J 的一个子集 P 称为在 J 中是相对稠的,是指存在一个数 $l>0$ 满足

$$[a,a+l]\cap P\neq\Phi,a\in J$$

定理 1.7　若 $f\in AP(\Omega\times R)$,则 f 在 $\Omega\times R$ 上是一致连续的。

定理 1.8　设 $f\in AP(\Omega\times R)$,对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的紧子集 $K\subset\Omega$,存在数 $l>0$ 和 $\delta>0$ 满足 R 内长度为 l 的任一区间内都含有长度为 δ 的子区间,且这个子区间内的所有数都是 f 的 ε-平移数。

定理 1.9　设 $f\in C(\Omega\times R)$,则 $f\in AP(\Omega\times R)$ 当且仅当 f 是正规的,也就是集合 $\{R_sf:s\in R\}$ 在 $C(K\times R)$ 中是相对紧的。这里 $R_sf(Z,t)=f(Z,t+s)$ 对所有的 $(Z,t)\in(\Omega\times R)$。

对 $H=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in C(R)^n$,假设对所有的 $t\in R,H(t)\in\Omega$。定义为:$H\times l:R\to\Omega\times R$ 为:

$$H\times l(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t),t)\quad(t\in R)。$$

定理 1.10　设 $f\in C(\Omega\times R)$ 关于 $t\in R$ 且一致对于 $Z\in K$(K 是 Ω 的任意紧子集)是概周期的。若 $H\in AP(R)^n$ 且当 $t\in R$ 时 $H(t)\in\Omega$,则有 $f\circ(H\times l)\in AP(R)$。

三、向量值的概周期函数

设 X 是一个 Banach 空间,$C(R,X)$ 表示从 R 到 X 的有界连续且带有上确界的函数全体构成的空间。一个函数 $f\in C(R,X)$ 称作概周期的,是指对每个 $\varepsilon>0$,都存在一个数 $l_\varepsilon>0$ 满足长度为 l_ε 的任意区间内,都存在数 τ 使下式成立:

$$\|f-R_\tau f\|<\varepsilon$$

用 $AP(R,X)$ 表示所有这样函数的全体。上面的数 τ 称为 f 的 ε-平移数。

函数 $S\in C(R,X)$ 称作三角多项式是指如果存在 $x_k\in X,\lambda_k\in R,k=1,2,\cdots,n$ 满足

$$S(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k e^{i\lambda_k t}(t\in R)$$

Banach 值的概周期函数的性质和数值概周期函数的性质类似。下面简单地进行以下列举。

(1)$f\in AP(R,X)$,则 f 是一致连续的,并且值域 $f(R)$ 在 X 中是相对紧的。

(2)设 $f\in C(R,X)$,则 $f\in AP(R,X)$ 当且仅当 f 是正规的。

(3)$AP(R,X)$ 是 $C(R,X)$ 的一个子空间,且 $AP(R,X)$ 是一个 Banach 空间。

(4)函数 $f(t)=xe^{i\lambda t}\in AP(R,X)$,这里 $x\in X,\lambda\in R$,由(3)知三角多项式在 $AP(R,X)$ 中,$AP(R,X)$ 中的函数可用 $C(R,X)$ 中的三角多项式逼近。

(5)定理 1.5 对向量值的概周期函数也成立。

定理 1.11 设 $f_i\in AP(R,X),i=1,2,\cdots,n$,则对任意的 $\varepsilon>0$,对这些函数存在一个公共的数 $l_\varepsilon>0$ 和公共的 $\varepsilon-$平移数。

§2 渐近概周期函数

设 X 表示一个 Banach 空间。Ω 表示 X 的一个闭子集,$J\in\{R^+,R\}$,并且设 $C(\Omega\times J,X)$,$C(J,X)$ 表示从 $\Omega\times J(J)$ 到 X 带有上确界范数的有界连续函数全体构成的空间。当 $X=\mathbf{C}$ 时,我们省略 $\mathbf{C}$,例如,把 $C(R,\mathbf{C})$ 简记成 $C(R)$。本节中 K 表示 Ω 的任意紧子集。

在上一节中,我们研究的是概周期函数空间 $AP(R)$,$AP(\Omega\times R)$ 和 $AP(R,X)$。这节我们将介绍更广的一种概周期型函数空间。

定义 2.1 一个函数 $f\in C(\Omega\times R,X)$ 称作关于 $t\in R$ 且一致对于 $Z\in K$ 是概周期的，是指对任意的 $\varepsilon>0$，都存在一个相对稠子集 P_ε 满足

$$\|f(x,t+\tau)-f(x,t)\|<\varepsilon,(t\in R,\tau\in P_\varepsilon,x\in K)$$

用 $AP(\Omega\times R,X)$ 表示这样函数全体。为了方便，称这样的函数为一致概周期的。P_ε 中的数称为 f 的 ε - 平移数。

由相对稠子集的定义可得存在有限个 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset R$ 满足

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{P_\varepsilon+a_i\}=R$$

对 $f\in C(\Omega\times R,X)$ 和 $s\in J$，由 s 产生的 f 的平移函数定义为 $R_sf(x,t)=f(x,t+s),x\in\Omega,t\in J$。并且可以证明 $f\in AP(\Omega\times R,X)$ 当且仅当 $\{R_sf:s\in R\}$ 在 $C(K\times R,X)$ 中是相对紧的。

定义 2.2 一个函数 $f\in C(\Omega\times J,X)$ 称作关于 $t\in J$ 且一致对 $Z\in K$ 是渐近概周期的，是指对任意的 $\varepsilon>0$，都存在一个相对稠子集 P_ε 和一个有界子集 C_ε 满足

$$\|f(x,t+\tau)-f(x,t)\|<\varepsilon,(t,t+\tau\in J/C_\varepsilon,\tau\in P_\varepsilon,x\in K)$$

用 $AAP(\Omega\times J,X)$ 表示这样函数全体。为了方便，称这样的函数为一致渐近概周期的。

从上面两个定义可看出，当定义 2.2 中 $C_\varepsilon=\Phi,J=R$ 时渐近概周期函数就降为概周期函数。

定理 2.1 $AAP(\Omega\times J,X)$ 中的函数 f 在 $K\times J$ 上是一致连续的且值域 $f(K\times J)$ 是相对紧的。

如果 $g\in AP(\Omega\times R,X)$，$\phi\in C_0(\Omega\times J,X)$，则函数 $f=g|_J+\phi$ 满足定义 2.2 的条件。相反，下面的定理表明定义 2.2 中的函数有唯一的分解。

定理 2.2 $f\in C(\Omega\times J,X)$ 关于 $t\in J$ 且一致对 $Z\in K$ 是渐近概周期的，当且仅当存在唯一的函数 $g\in AP(\Omega\times R,X)$ 满足

$$f-g|_J\in C_0(\Omega\times J,X)$$

注示:由定理 2.2 知,$f\in AAP(J,X)$ 当且仅当 $f=g|_J+\phi$,这里,$g\in AP(R,X)$,$\phi\in C_0(J,X)$,因此概周期函数的很多性质都可以推广到渐近概周期函数上去。特别,傅立叶分析可以在 $AAP(J,X)$ 上展开。这样有

(1)对所有的 $f\in AAP(J,X)$,平均 $M(f)$ 存在;(2)频率集 Frep(f) 是至多可数的,因此对应一个,傅立叶级数:$f(t)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k e^{i\lambda_k t}$;(3)Parserval 等式成立。

下面的引理是把定理 1.10 中的有限维空间推广到 Banach 空间。

引理 2.1 如果 $g\in AP(\Omega\times R,X)$,$G\in AP(R,\Omega)$,则复合函数 $g(G(\cdot),\cdot)\in AP(R,X)$。

定理 2.3 如果 $f\in AAP(\Omega\times J,X)$,且 $F\in AAP(J,\Omega)$,则复合函数 $f(F(\cdot),\cdot)\in AAP(J,X)$。

引理 2.2 假设 $f,f'\in AAP(J,X)$,也就是 $f=g|_J+\phi$,$f'=\alpha|_J+\beta$。这里 $g,\alpha\in AP(R,X)$,$\phi,\beta\in C_0(J,X)$,则 g,α 都是可微的,且 $g'=\alpha$,$\phi'=\alpha$。

定理 2.4 设 $f\in AAP(\Omega\times J,X)$,也就是 $f=g|_J+\phi$,其中 $g\in AP(\Omega\times R,X)$,$\phi\in C_0(\Omega\times J,X)$。考虑下面的方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \tag{1.2.1}$$

$$\frac{dy}{dt}=g(y,t) \tag{1.2.2}$$

如果(1.2.1)有一个渐近概周期解 F,则 F 的概周期部分为式(2.2.2)的解。

下面,我们单独讨论一下 $J=R^+$ 情形的渐近概周期函数。

定理 2.5 设 $f\in C(R^+,X)$,则下列陈述是等价的:

(1)$f\in AAP(R^+,X)$;

(2)$f=g|_{R^+}+\phi$,其中 $g\in AP(R,X)$,$\phi\in C_0(R^+,X)$;

(3)集合$\{R_s f: s\in R^+\}$在$C(R^+,X)$中是相对紧的。

注示:(i)$AAP(J)$中当$J=R^+$时首先是由 Frechet 引入的[8,9]。众所周知,$f\in AAP(R^+,X)$当且仅当$f=g|_{R^+}+\phi$,其中$g\in AP(R,X)$,$\Phi\in C_0(R^+,X)$。

(ii)设$C_0^+(R,X)$是由$\phi\in C(R,X)$且当$t\to+\infty$,$\|\phi(t)\|\to 0$的全体函数ϕ构成的。在后面,我们将介绍函数的历遍性,并且有$AP(R,X)$,$C_0(R^+,X)$和中$C_0(R,X)$中的函数都是历遍的。

§3 弱概周期函数

设X表示一个 Banach 空间。在第一节中,我们知道$f\in \mathbf{C}(R,X)$是概周期的,当且仅当$\{R_s f: s\in R\}$在$\mathbf{C}(R,X)$中是相对紧的。如果$\{R_s f: s\in R\}$是相对弱紧的,我们将得到弱概周期函数。这种类型函数首先是由 E. Eberlein[10]在 1949 年给出的。本节将介绍这种函数。

一、向量值的弱概周期函数

定义 3.1 函数$f\in C(J,X)$称为弱概周期函数是指集合$\{R_s f: s\in J\}$在$C(J,X)$中是相对弱紧的。用 WAP(J,X)表示这样函数全体。

上面定义和$co\{R_s f: s\in J\}$在$C(J,X)$中是相对弱紧的是等价的,也就是说$\overline{co}\{R_s f: s\in J\}$在$C(J,X)$集合在中是弱紧的,这里的闭包是在$C(J,X)$中的弱拓扑下(实际上,在凸的情况下,我们不需要区分范数拓扑和弱拓扑,因为它们是等价的)。

因为在一个 Banach 空间中,弱紧等价于序列紧,所以一个函数$f\in C(J,X)$在 WAP(J,X)中当且仅当对J中的任意的序列$\{s_n\}$,都存在子列$\{s'_n\}$和一个函数$g\in C(J,X)$满足$R_{s'_n}f$弱收敛于