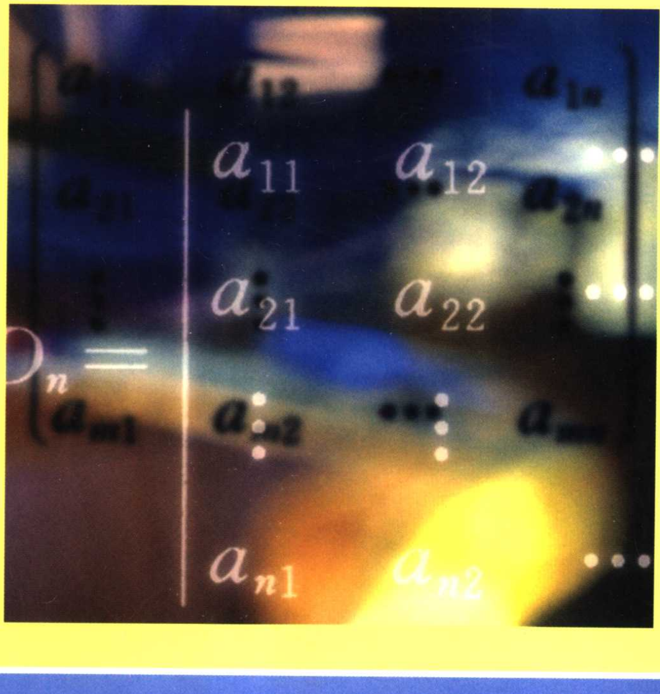
线性代数

吴天毅　王玉杰　邱玉文／编著



南開大學出版社

线 性 代 数

吴天毅　王玉杰　邱玉文　编著

南 开 大 学 出 版 社
天　津

内容提要

本书根据高等院校线性代数课程教学的基本要求撰写而成. 全书共分七章，主要讲述了线性代数的基本内容，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换等.

本书深入浅出，重点突出，难点分散，通俗易懂，适于普通高等学校本科各专业学生作为教材使用，也可供科技工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 吴天毅，王玉杰，邱玉文编著. —天津：南开大学出版社，2007.2

ISBN 978-7-310-02665-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①吴…②王…③邱… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 011020 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　邮购部电话：(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

787×960 毫米　16 开本　13 印张　2 插页　234 千字

定价：24.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

前 言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类相关专业的一门重要基础课.本书依据高等院校线性代数课程教学的基本要求撰写而成,可作为普通高校理工类和经管类相关专业线性代数课程的教学用书.

本书的撰写突出了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法.特别遵循由浅入深、由具体到抽象、由特殊到一般的原则,突出重点,分散难点,配以较多的例题,使读者能较好地理解和掌握线性代数的基本内容、基本理论和基本方法,学会用线性代数的理论和方法解决实际问题.

作者吴天毅、王玉杰、邱玉文长期从事线性代数课程的教学工作,并对新形势下线性代数课程的发展、知识结构的优化、教学内容的改革都有过深入的研究,本书是他们经验的积累和研究的成果.全书由吴天毅教授主编并负责统筹定稿,其中第一章由吴天毅执笔,第二、三、四章由邱玉文执笔,第五、六、七章由王玉杰执笔.另外,在本书的完成过程中得到了天津科技大学理学院领导的大力支持和数学系各位老师的热情帮助,许多同仁对本书的撰写提出了宝贵意见和建议,在此一并表示衷心的感谢.

编 者

2007 年 1 月

目　录

第一章　行列式

行列式在线性代数中是一个基本工具，研究许多问题都需用到它. 本章在二阶、三阶行列式定义的基础上，介绍了 n 阶行列式的定义、性质及行列式按行(列)展开，并介绍了利用行列式求解线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

行列式是由解线性方程组的公式解引出来的，因此先讨论二元和三元线性方程组的公式解，并由此给出二阶和三阶行列式的定义.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

利用加减消元法容易求出方程组(1)的解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得. 为了便于记忆，引入二阶行列式的概念.

将 4 个数排成 2 行 2 列，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

称式(3)左边为**二阶行列式**，右边的式子为**二阶行列式的展开式**. 数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素**，其中 a_{ij}的第一个下标 i 表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 表示该元素位于第 j 列.

由式(3)可知，二阶行列式的计算满足**对角线法则**，即：主对角线(自左上至右下)上元素之积减去副对角线(自右上至左下)上元素之积. 二阶行列式的计算结果

是一个数.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

注 D 是用方程组(1)的系数所确定的二阶行列式,一般称 D 为方程组的系数行列式. D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1、b_2 代替 D 中第 1 列元素所得的二阶行列式,D_2 是用方程组(1)的常数项 b_1、b_2 代替 D 中第 2 列元素所得的二阶行列式.

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

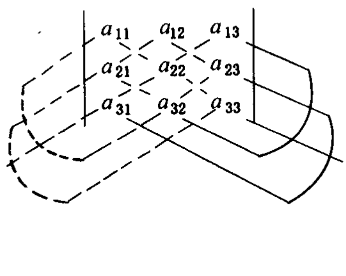
利用加减消元法也可得到它的求解公式,但要记住这个求解公式是很困难的. 为了便于记忆,引入三阶行列式的概念.

将 9 个数排成 3 行 3 列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{6}$$

称式(6)左边为三阶行列式,右边的式子为三阶行列式的展开式.

由式(6)右边的式子可知,三阶行列式的展开式中共有 6 项,这 6 项的确定可按下面图示的对角线法则进行,即:三阶行列式的展开式为下面图中实线上 3 个元素的乘积(3 项)减去虚线上 3 个元素的乘积(3 项).



例 1　计算三阶行列式$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\times0\times5+4\times1\times7+2\times9\times6$$
$$-7\times0\times2-9\times1\times(-1)-5\times4\times6$$
$$=25$$

若记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$
则三元一次方程组(5)的解为
$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}\qquad (D\neq0\text{ 时})$$

注　类似地,也可引入四阶及四阶以上的行列式,但这些行列式的展开不适用于对角线规则,需从其他方面给出其定义.

二、逆序数与对换

定义 1　将 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 按某种次序排成一排,称其为这 n 个数的一个**全排列**,简称为**排列**.如果这 n 个数按自然数次序由小到大进行排列,则称其为**标准排列**.

定义 2　在 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列中,若两个数的前后次序和标准排列不一致,则称这两个数构成一个**逆序**.一个排列中逆序的总个数称为这个排列的**逆序数**,记为 t.

例 2　求排列 32514 的逆序数.

解　在排列 32514 中

3 在首位,逆序数为 0;

2 的前面只有一个 3 比 2 大,故逆序数为 1;

5 的前面的数都小于 5,故逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个,故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个,故逆序数为 1.

于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5$$

定义 3 如果一个排列的逆序数是奇(偶)数,那么称这个排列为**奇(偶)排列**.

定义 4 在一个排列中,任意对调两个元素,其余元素不动,这一过程称为**对换**.相邻两个元素的对换称为**相邻对换**.

定理 1 **一个排列进行奇数次对换,排列改变奇偶性;进行偶数次对换,排列奇偶性不变.**

证 设 a、b 是一个排列中的两个数.

(1)若 a 与 b 是相邻的两个数,对换 a 与 b 后,只有 a 与 b 之间的逆序发生了变化,因此对换 a 与 b 后的排列的逆序数与原排列的逆序数相差 1,从而改变了排列的奇偶性.由此可推知:一个排列进行奇数次相邻对换,排列改变奇偶性;进行偶数次相邻对换,排列不改变奇偶性.

(2)若 a 在 b 之前 i 位,只要将 a 向后进行 i 次相邻对换,再将 b 向前进行 $i-1$ 次相邻对换,就达到了将 a 与 b 对换.此过程共进行了 $2i-1$ 次相邻对换,由(1)可知该排列对换 a 与 b 后改变了奇偶性.

由(1)和(2)可知对换一次排列改变奇偶性,由此即可推知定理结论的正确性.

如果定义标准排列为偶排列,则可由定理 1 得到下面推论.

推论 奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换可成为标准排列.

三、n 阶行列式的定义

利用逆序数的概念,二阶和三阶行列式的定义还可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2} \tag{7}$$

其中 p_1p_2 是 1,2 的排列,t 是该排列的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2 的所有排列(共 2! 个)求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{8}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的排列,t 是该排列的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2,3 所有排列(共 3! 个)求和.

类似二阶和三阶行列式的定义,可定义出 n 阶行列式.

定义 5 将 n^2 个数排成 n 行 n 列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{9}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，t 是该排列的逆序数，$\sum$ 表示对$1,2,\cdots,n$所有排列(共 $n!$ 个)求和. 称式(9)左边为 n **阶行列式**，式(9)右边为 n **阶行列式的展开式**，称 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$为 n 阶行列式的**元素**.

注　n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，其中每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式可简记为$|a_{ij}|$或 $\det(a_{ij})$.

注　不要将一阶行列式$|a|=a$ 与绝对值符号相混淆.

定理 2　**n 阶行列式也可定义为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\tau a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n} \tag{10}$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，τ 是该排列的逆序数，$\sum$ 表示对$1,2,\cdots,n$所有排列(共 $n!$ 个)求和.

证　在式(9)中，将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换成标准排列，此时$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$就对换成 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$. 由定理的推论可知排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 具有相同的奇偶性，从而有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^\tau a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

其中 t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，τ 是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 又由于排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 一一对应，所以得到

$$\sum (-1)^\tau a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{11}$$

式(11)即说明式(10)成立.

注　定义 5 中式(9)与定理 2 中式(10)的区别是：前者是以行为标准次序来确定每项中的 n 个元素，后者是以列为标准次序来确定每项中的 n 个元素.

按照定义 5 的式(9)及定理 2 的式(10)容易计算出下面几个特殊行列式.

1. **对角行列式**(未写出的元素均为零)

(1) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{12}$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{13}$$

2. **三角行列式**(未写出的元素均为零)

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{14}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{15}$$

(3) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1} \tag{16}$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1} \tag{17}$$

注 除一些特殊行列式外,一般行列式按其定义计算是非常繁杂困难的,因此实际计算行列式并不常用其定义提供的方法.

§1.2 行列式的性质

为进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面介绍 n 阶行列式的一

些基本性质.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 是将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式，行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　记 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义 5 有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{t}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

又由定理 2 知

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

故
$$D^{\mathrm{T}}=D$$

注　性质 1 表明，行列式中的行与列具有同等的地位，从而可知行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证　互换行列式 D 的第 i 行和第 j 行，所得行列式记为 D_1，即

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

由行列式定义

$$D=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中 t 是排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，如果将该排列的第 i 个元素和第 j 个元素对换，则排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的奇偶性与排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的奇偶性相反. 若记 τ 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，则有 $(-1)^{t}=-(-1)^{\tau}$，故

$$D=-\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=-D_1$$

性质 3 行列式某一行(列)的公因子可以提出来. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{18}$$

证 由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$=k\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=k\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

注 此性质也可叙述为：用数 k 乘以行列式等于用数 k 乘以行列式某一行(列)的所有元素.

性质 4 行列式中有两行(列)元素对应相等时，该行列式等于零.

证 将行列式中相同的两行(列)进行交换，则行列式还是原先的行列式. 可由性质 2 知，$D=-D$，故 $D=0$.

由性质 3 和性质 4 可得到下面的推论.

推论 行列式中有两行(列)元素对应成比例时，该行列式等于零.

性质 5 行列式具有分行(列)相加性. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{19}$$

证 按行列式定义，式(19)左边$=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n}=$ $\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n}=$式(19)右边.

性质 6 行列式某一行(列)各元素乘以同一个数加到另一行(列)对应元素上,行列式不变.即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{20}$$

证 根据行列式性质 5 及性质 4 的推论有

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

计算行列式的方法很多,利用前面所介绍的行列式性质,将行列式化成三角行列式再进行计算则是最常用的方法之一.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

解 将行列式 D 的第 1 列与第 2 列互换

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&4&-1\\1&3&2&-3\\2&1&3&-2\\0&5&6&-2\end{vmatrix}$$

第 1 行乘 −1、−2 分别加到第 2 行和第 3 行

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&4&-1\\0&1&-2&-2\\0&-3&-5&0\\0&5&6&-2\end{vmatrix}$$

第 2 行乘 3，−5 分别加到第 3 行和第 4 行

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&4&-1\\0&1&-2&-2\\0&0&-11&-6\\0&0&16&8\end{vmatrix}$$

第 3 行乘$\frac{16}{11}$加到第 4 行

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&4&-1\\0&1&-2&-2\\0&0&-11&-6\\0&0&0&-\frac{8}{11}\end{vmatrix}=-\left[1\times1\times(-11)\times\left(-\frac{8}{11}\right)\right]=-8$$

注 为了更简洁表示行列式的计算过程，特引进下面记号：

(1)用 r_i 表示第 i 行，用 c_j 表示第 j 列.

(2)$r_i\longleftrightarrow r_j(c_i\longleftrightarrow c_j)$表示互换第 i 行(列)与第 j 行(列).

(3)$kr_i(kc_i)$表示用数 k 乘以第 i 行(列)所有元素.

(4)$r_i\div k(c_i\div k)$表示提取第 i 行(列)所有元素的公因子 $k(k\neq0)$.

(5)$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$表示将第 j 行(列)元素都乘以数 k 再加到第 i 行(列)上去.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&a_1+b_3\\a_2+b_1&a_2+b_2&a_2+b_3\\a_3+b_1&a_3+b_2&a_3+b_3\end{vmatrix}$$