21世纪高等院校教材

大学数学习题课教材

邹庭荣 文凤春 朱倩军 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

大学数学习题课教材

邹庭荣　文凤春　朱倩军　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是华中农业大学谢季坚教授等主持编写的“大学数学系列教材”的配套教材，其内容涉及微积分、线性代数、概率论与数理统计等. 全书共分十七讲，每讲包括：教学要求、教材内容的归纳总结、例题分析、课堂练习、课堂练习答案与提示. 书后配有典型习题详解，以供学生自我检验和提高学习之用. 本书内容精炼、例题典型、解题全面透彻.

本书可作为高等院校一、二年级学生的教学参考书，也可供准备报考研究生的大学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学习题课教材/邹庭荣，文凤春，朱倩军主编. —北京：科学出版社，2007

(21世纪高等院校教材)

ISBN 978-7-03-019454-1

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①邹… ②文… ③朱… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第112518号

责任编辑：姚莉丽 李晓鹏 / 责任校对：张 琪
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年8月第一次印刷 印张：21
印数：1—5 000 字数：398 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学习题课教材》编委会

主　编　邹庭荣　文凤春　朱倩军

编　委　（以姓氏笔画为序）

丁鹿伟　文凤春　方　红　朱倩军

李　治　李　燕　李淑华　邹庭荣

汪晓银　陈华锋　徐艳玲　覃光莲

前　　言

大学数学是大学教育中一门重要的公共基础课，它对学生抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及专业课程的学习起着非常重要的作用. 而学生学习这门课时，普遍感到概念抽象、难以理解、解题困难. 要教好这门课程，教师认真备课，合理制定计划，精心组织教学无疑是一个重要组成部分，但作为教好该课程的另一个重要环节——习题课却往往被人们所忽视. 尤其遗憾的是，目前尚未见到一部以“大学数学习题课教学”为目的的教材. 原因之一，可能是大学数学习题课教材编写灵活，深浅程度的掌握容易引起争论. 由于长期缺乏可供参考的大学数学习题课教材，部分教师认为习题课就是讲几道习题，或是演算几道难题，有的甚至认为习题课可上可不上，最终导致上习题课无计划、无教案，更无目的.

为了规范习题课教学，提高大学数学课程教学质量，为师生提供一本有价值的大学数学习题课教材，我们不揣浅陋，在大学数学教学改革中做了一些有益的尝试，并组织多年来担任“大学数学课程”教学的教师编写了《大学数学习题课教材》.

由于各院校所使用的主体教材不同，习题课的时间安排各异，为了适应多方面的情况，我们选择了将“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课程的习题课内容合为一体的做法. 它可作为我校谢季坚教授等主持编写的“面向 21 世纪课程教材”之《大学数学——微积分及其在生命科学、经济管理中应用》、《线性代数及其应用》、《概率论及试验统计》等教材的配套教材，对于选用其他主体教材的院校和教师也可作为“大学数学习题课”的重要参考. 该教材也是广大自学青年学习大学数学较好的参考资料.

本书遵循启发式教学规律和讲练结合原则，前三篇编写了十七讲，34～40 学时. 课与课之间又互相联系，有机地融为一体；每次习题课包括教学要求、教材内容的归纳总结、例题分析、课堂练习、课堂练习答案与提示五个部分，各部分内容以新见长，以精为旨. 力求在阐述教学要求时简明扼要，归纳教材内容时系统精辟，选择例题、习题时突出典型性、广泛性、综合性和方法上的灵活性. 基本做到例前有分析，例后有评注. 立足双基训练，注重启迪思维，加强学生应用能力的培养. 在第四篇中还给出了 100 多道近年来大学数学竞赛题、考研题及应用题等，其中部分题给出了多种解法，供学有余力的同学作为学习提高的参考. 本书语言精练，构思新颖，

能有效地帮助学生克服大学数学学习过程中的困难,巩固所学知识,提高解题技能,增强数学素质.

参加本书编写的有:

（应用微积分）　邹庭荣　徐艳玲　陈华锋　丁鹿伟　方　红

（应用线性代数）　文凤春　李　燕　李　治

（应用概率统计）　朱倩军　汪晓银　覃光莲　李淑华

最后由邹庭荣教授统稿.

本书的编印使用得到学校教务处、理学院及数学与信息科学系的大力支持与帮助,我们在此表示衷心的感谢.

如前所述,由于《大学数学习题课教材》应该如何编写还是一个需要探讨的问题,这里仅当抛砖引玉而已,加之我们的水平有限,不当和错误之处,恳请同行专家及读者批评指正.

编　者

2007 年 3 月 20 日

于华中农业大学

目　　录

第一篇
应用微积分

第一讲　函数与极限

一、教学要求

教学目的：

理解函数概念，包括反函数、复合函数、初等函数的概念；了解函数的四种特性，掌握基本初等函数及其图形；会建立简单的实际问题中的函数关系式；理解极限的概念（对 ε-N、ε-δ 语言的运用不做过高要求）；掌握极限的性质和四则运算法则，掌握极限存在的两个准则；会用两个重要极限求极限；理解无穷小与无穷大的定义以及无穷小阶的概念，掌握等价无穷小替换的方法；理解函数连续性的概念，了解间断点概念、会判断间断点的类型；了解闭区间上连续函数的性质，并会用它们证明一些问题.

教学重点：

函数与复合函数的概念，极限的概念，极限的四则运算法则，用两个重要极限求极限，无穷小的概念，函数在一点连续的概念.

教学难点：

极限的 ε-δ 定义，用单调有界定理证题，用两个重要极限求极限.

二、教材内容的归纳总结

1. 函数

1）函数的概念

设有两个非空数集 D,R. 称映射 $f:D\to R, x\mapsto f(x)=y\in R$ 为函数，通常记为 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，集合 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 f 的值域，且 $f(D)\subseteq R$.

当两个函数的定义域与对应规则都相同时，称这两个函数相等.

2）函数的几种特性

（1）函数的单调性. 设函数的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意

两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 I 上是单调减少的，单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(2) 函数的奇偶性. 设函数的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称函数为偶函数. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称函数为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(3) 函数的周期性. 设函数的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x+l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常周期函数的周期是指最小正周期，但并非每个周期函数都有最小正周期，如 Dirichlet 函数.

(4) 函数的有界性. 设函数的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数在数集 X 上有界；否则称为无界.

3) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 于是对于任意的 $y\in W$，有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，使得 $y=f(x)$，这样在 W 上定义了一个新的函数，称为函数的反函数，记作 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）.

4) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，由此对于任意的 $x\in D_2$ 有唯一确定的 $\varphi(x)=u\in W_2\subset D_1$，于是对此 $u\in D_1$ 有唯一确定的 $y=f(u)$，这样确定的新函数 $y=f(\varphi(x))$，$x\in D_2$，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

5) 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为基本初等函数. 凡是由基本初等函数和常数，经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

2. 极限

1) 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，只要 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

2）函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，只要$|x|>X$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

当$x\to+\infty(x\to-\infty)$时，只需将上述定义中的$|x|>X$改为$x>X(x<-X)$便得相应定义.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（3）单侧极限.

左极限，$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要$0<x_0-x<\delta$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限，$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要$0<x-x_0<\delta$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

显然，$f(x)$在x_0处极限存在的充分必要条件是：函数在x_0处的左、右极限存在并且相等.

3）无穷大与无穷小的定义

（1）$f(x)$为某过程($x\to x_0$或$x\to\infty$)中的无穷小$\Leftrightarrow\lim f(x)=0$.

（2）$f(x)$为某过程中的无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty(+\infty$或$-\infty)$.

在同一过程中，除零以外的无穷小与无穷大互倒.

（3）无穷小比较：设$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称$\beta$是$\alpha$同阶的无穷小；特别地，当$c=1$时，称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作：$\alpha\sim\beta$. 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0,k>0$，则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

（4）常用的等价无穷小. 当$x\to0$时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x)\sim x$；$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$；$e^x-1\sim x$；$a^x\sim x\ln a$.

4）极限的性质

（1）唯一性. 若变量极限存在，则极限唯一.

（2）有界性.

(3) 保号性. 收敛数列的保号性. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，则$\exists N>0$，当$n>N$时都有$x_n>0$(或$x_n<0$). 若数列从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

函数极限的局部保号性. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，则$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$). 若在$x_0$的某去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(4) 设$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=C$(常数$C\neq 0$)，且$\lim g(x)=0$，则$\lim f(x)=0$，反之亦然.

5) 极限的运算法则

在自变量的同一变化过程中，如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A+B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$(此时要求$B\neq 0$).

6) 两个极限存在准则

(1) 夹逼准则. 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$均为数列，如果从第N项开始有不等式$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$成立，并且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

如果对于x_0的某个邻域内的一切x，但x_0点可以除外(或对于$|x|>X>0$的一切x)有不等式$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$成立，并且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

(2) 单调有界数列必有极限.

7) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right).$$

8) 渐近线

(1) 水平渐近线. 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则称直线$y=b$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

(2) 垂直渐近线. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的垂直渐

近线.

(3) 斜渐近线. 设函数 $f(x)=kx+b+R(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$, 则称直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线, 其中 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

3. 连续

1) 连续的概念

(1) $f(x)$ 在一点 x_0 连续的定义: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果在点 x_0 处, 当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时, 对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) $f(x)$ 在一点 x_0 左(右)连续: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左(右)邻域 $(x_0-\delta,x_0]$ ($[x_0,x_0+\delta)$) 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$).

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 连续, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每个点连续.

(4) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且在端点 a 有右连续, 端点 b 有左连续.

2) 间断点的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义 (x_0 可以除外), $f(x)$ 在点 x_0 处满足下列条件之一时, 称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数的左、右极限都存在的间断点, 叫做第一类间断点. 特别在间断点 x_0 处, 函数极限存在, 则称点 x_0 为可去间断点. 若在点 x_0 处左右极限存在但不相等, 则称点 x_0 为跳跃间断点. 如果在间断点 x_0 处, 函数 $f(x)$ 的左右极限中至少有一个不存在时, 称点 x_0 为第二类间断点 (包括无穷间断点).

3) 主要性质

(1) 若 $f(x)$, $g(x)$ 均在点 x_0 连续, 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(x_0)\neq 0$) 也在点 x_0 连续.

(2) 若 $f(\varphi(t))$ 有定义, $\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 连续, $f(x)$ 在 $x_0=\varphi(t_0)$ 连续, 则 $f(\varphi(t))$ 在 $t=t_0$ 连续, 即连续函数的复合函数仍为连续函数.

(3) 严格单调连续函数的反函数必存在,而且也是严格单调连续的.

(4) 基本初等函数在其定义域内的任一区间上是连续的. 初等函数在其定义域内的任一区间上都是连续的.

4) 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则有

(1) $f(x)$在$[a,b]$上有界并取得最大值与最小值(最值定理).

(2) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则存在 $\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=0$(零点定理).

(3) 若实数 A 介于 $f(a),f(b)$之间,则存在 $\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=A$(介值定理).

三、例题分析

例 1 判断下列各题中 f 与 g 是否为同一函数.

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$;

(3) $f(x)=1,g(x)=\sin^2x+\cos^2x$;

(4) $f(x)=3x^2+2x-1,g(t)=3t^2+2t-1$.

分析 函数的定义域和对应法则通常称为函数的两大要素. 当且仅当给定的两个函数,其定义域和对应法则完全相同时,才表示同一函数,否则就是两个不同的函数. 并且函数关系仅与定义域、对应法则有关而与自变量、因变量用什么字母无关.

解 (1) $f(x)$的定义域是$[0,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 显然,$f(x)$与 $g(x)$不同.

(2) 不同. 因为 $f(x)$的定义域是除零外的所有实数,而 $g(x)$的定义域是全体正实数.

(3) 相同. 因为 $f(x)$和 $g(x)$定义域和对应法则都相同.

(4) 显然,$f(x)$与 $g(t)$表示同一函数.

例 2 设 $f(0)=0$,且 $x\neq0$ 时,$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$($a,b,c$ 为常数,$|a|\neq|b|$),证明 $f(x)$为奇函数.

分析 先解出 $f(x)$,从而由奇函数、偶函数的定义做出判断.

解 先求 $f(x)$,当 $x\neq0$ 时,令 $x=\frac{1}{t}$,得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$,即 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$,与条件 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ 联立,得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$,故

$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{-x}+bcx\right)=-\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)=-f(x)$. 又因为 $f(0)=0$,所以$f(x)$为奇函数.

例 3 用定义验证以下极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$.

证明 (1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使$|x_n-0|<\varepsilon$,只要

$$|x_n-0|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$$

即可,即 $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$. 因此,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]$,当 $n>N$ 时,就有$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|<\varepsilon$ 成立. 即$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

评注 ①用"ε-N"定义证明数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是对任意给定的$\varepsilon>0$,寻找正整数 N,即找能使$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立的条件"$n>N$"中的 N. 也就是从不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 中找一个"$n>K$"形式的解,然后取 $N=[K]$. ②N 不是唯一的,求 N 时可将$|x_n-a|$适当放大,不必去求最小的 N.

(2) 首先任意给定 $\varepsilon>0$,为了找出相应的 $\delta>0$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,考察

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2|x+1|}.$$

为了往$|x-1|<\delta$ 变形找出 δ,观察上式右端,应保留$|x-1|$而设法消去$|x+1|$. 为此,不妨暂时先限定$|x-1|<1$,即 $0<x<2$,由此有

$$1<x+1=|x+1|\ (<3).$$

于是缩小分母,有$\frac{|x-1|}{2|x+1|}<\frac{1}{2}\cdot\frac{|x-1|}{1}=\frac{|x-1|}{2}$,再令右端小于 ε,得$|x-1|<2\varepsilon$,取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$. 这样一来,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$,当 $0<|x-1|<\varepsilon$ 时,总有

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$.

评注 由本例看出,运用 ε-δ 方法证$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 类似于 ε-N 方法,通常需由 ε 找 δ,也就是先分析、后综合的方法,其一般步骤如下:

(1) 将$|f(x)-A|$化简或适当放大成$|f(x)-A|\leqslant\varphi(|x-a|)$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,令 $\varphi(|x-a|)<\varepsilon$,解得$|x-a|<\delta_\varepsilon$(适当做限定$|x-a|<a_1$,如上例$|x-a|<1$).

(3) 取 $\delta=\delta_\varepsilon$,或 $\delta=\min\{a_1,\delta_\varepsilon\}$.

(4) 用 ε-δ 语言叙述并下结论.

例 4　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^n}{1+e^n}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解　此类题通过变形化简后利用极限的四则运算法则计算.

(1) 先用等比数列求和公式化简,再求极限

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot[1-(1/2)^{n+1}]}{1-1/2}=2\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=2.$$

(2) 因$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),\end{aligned}$$

故

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})=\frac{1}{3}.$$

(3) $$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0.\end{aligned}$$

(4) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-e^n)/e^n}{(1+e^n)/e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/e^n-1}{1/e^n+1}=-1$.

(5) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-6x+5)/\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+2)=5/2$.

(6) 原式$=\infty$,因为分母趋于 0 而分子趋于-3.