CHUZHONG PINGMIAN JIHE

ZHENG (JIE) TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

初中平面几何
证(解)题思路的培养与训练
图形的全等变换

TUXING DE QUANDENG BIANHUAN

规律发现总结与应用

迎中考迎奥赛的金钥匙

举一反三触类而旁通

吕全善/编著

学会和掌握一套证解题方法
胜过做万题

大连出版社
DALIAN PUBLISHING HOUSE

责任编辑：王天华　刘晓媛
封面设计：张　金

ZHENG(JIE)TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

ISBN 978-7-80684-520-2
9 787806 845202 >

定价：7.00元

初中平面几何

证(解)题思路的培养与训练

图形的全等变换

吕全善　编著

大连出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中平面几何证(解)题思路的培养与训练.图形的全等变换/吕全善编著.—大连:大连出版社,2007.5
ISBN 978-7-80684-520-2

Ⅰ.初… Ⅱ.吕… Ⅲ.几何课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第048860号

责任编辑:王天华 刘晓媛
封面设计:张 金
版式设计:金东秀
责任校对:王恒田

出版发行者:大连出版社
地址:大连市西岗区长白街10号
邮编:116011
电话:(0411)83627430/83620941
传真:(0411)83610391
网址:http://www.dl-press.com
电子信箱:cbs@dl.gov.cn
印 刷 者:大连天正华延彩色印刷有限公司
经 销 者:各地新华书店

幅面尺寸:140mm×203mm
印 张:3.125
字 数:78千字
印 数:1-5000

出版时间:2007年7月第1版
印刷时间:2007年7月第1次印刷
书 号:ISBN 978-7-80684-520-2
定 价:7.00元

如有印装质量问题,请与我社营销部联系
购书热线电话:(0411)83627430/83620941

前　言

为了帮助广大中学生学好平面几何和教师进一步教好几何，以适应培养建设人才的需要，作者根据多年苦心钻研的教研成果与教学经验编写了本套丛书。对本套丛书的主要内容，作者曾先后在沈阳、抚顺、本溪、铁岭、盘锦、大连、北京等市做过多次学术讲演，特别是受到天津市教育局的邀请为该市的几何骨干教师举办了为期近一周的培训班。作者在上述各地讲学时，均受到了广大中学教师和学生的热烈欢迎和高度评价。

本套丛书基于内容较多和为学生学习方便起见，分三册出版：《三角形部分》，《图形的全等变换》，《四边形部分》。

《图形的全等变换》与生活、生产、科学技术方面有密切联系，所以在学习中要多联系生活实际现象，多观察、多思考、多动手操作，在直观感知、操作确认的基础上，发现、分析、综合、归纳、概括结论，然后用所得结论去指导实践。这样才有利于加强数学知识与现实生活的联系，有利于培养良好的数学应用意识和在应用中不断发展提高自己的数学才能。

作者编著本套丛书的目的，是送给读者一支猎枪，而不只是一堆猎物。为了帮助读者进一步掌握规律和牢记规律，以提高证(解)题能力，还在大部分范例后面作了规律总结。

书中还收集了近几年来的相关中考题，有的作为例题加以分解剖析，有的作为习题，还有的作为中考题浏览编进相应章节中。

通过教学实践充分证明，本书对培养学生的分析能力、逻辑思维能力和归纳梳理以及探究精神，具有非常重要的作用。如果学

生基本掌握了书中提供的证(解)题思路的方法,那么可以说对平面几何的学习,将会产生一个极大的飞跃,更重要的是对以后各科的学习将会产生深远的影响。

本书既适于在校学生配合教材自学提高,以迎接中考与数学竞赛之用,又适于作教师的教学参考书。为了便于自学,书中附有习题解答或提示。无论解答或提示都着重于解题思路的探索与培养。

编者

2007.4

本册说明

在日常生活和科学实验以及美术设计中，常会根据需要对一些图形进行移动和变换。这些移动和变换包括有轴对称变换、平移变换和旋转变换（其中包括中心对称变换），它们变换的共同特点是仍保持原图形的形状和大小不变，因此统称为全等变换。全等变换是中学必学的重点内容之一，也是中考与数学竞赛的热点之一。

要学好全等变换，首先要弄清它的有关概念，并牢固掌握它的一些性质以及它的应用。

学好全等变换不仅仅是为了现实生活中的应用，同时更是为了给进一步学好其他知识打下坚实的基础；学好全等变换会进一步提高我们的证（解）题的能力。因为全等变换还可直接作为证（解）某些题的重要工具和强有力的手段。

以上这些会在今后的学习中加深理解和体会。

目　录

第一章　轴对称图形和成轴对称

基础知识导引和解读

1. 轴对称图形的定义：如果一个图形沿着一条直线对折，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做这个图形的对称轴.

2. 成轴对称的定义：把一个图形沿着某一条直线对折，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称，或说这两个图形成轴对称，两个图形中的对应点叫做关于这条直线的对称点，这条直线叫对称轴.

3. 成轴对称和轴对称图形的区别与联系

区别：(1)成轴对称说的是两个图形的位置关系，而轴对称图形是说一个具有特殊形状的图形. 即成轴对称是对两个图形说的，而轴对称图形是对一个图形说的；

(2)成轴对称的两个图形的对称点分别在两个图形上，而轴对称图形的对称点在一个图形上.

联系：(1)它们的定义中，都有沿某直线对折图形重合，即它们都有对称轴；

(2)如果把两个成轴对称的图形看成一个整体，那么它就是轴对称图形，反之，把轴对称图形由对称轴分成的两部分当做两个图形，那么这两个图形成轴对称，所以它们可转化.

4. 成轴对称的性质与判定

性质：(1)关于某条直线对称的两个图形是全等形；

(2)如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是对应点

连线的垂直平分线；

(3)两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上；

(4)轴对称变换能改变图形顶点字母的排列顺序的方向.

判定：如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称. 性质(2)与本命题是互逆的两个命题.

5. 常见的轴对称图形

图形	对称轴	对称轴条数
点 A	过点 A 的任意直线	无限多条
直线 AB	(1)直线 AB；(2)过直线 AB 上任意一点的垂线	无限多条
线段 AB	(1)直线 AB；(2)线段 AB 的中垂线	2 条
射线 OA	直线 OA	1 条
角	角平分线所在的直线	1 条
等腰三角形	底边的中垂线	1 条或 3 条
等边三角形	各边的中垂线	3 条
矩形	各边的中垂线	2 条
正方形	(1)各边的中垂线；(2)对角线	4 条
圆	过圆心的直线	无限多条

6. 判断两个图形是否成轴对称或一个图形是否是轴对称图形的方法.

(1)应用判定定理；

(2)根据定义看两个图形或一个图形能否找到一条直线沿它折叠后直线两旁部分能够重合.

这两个判定方法实质是一样的，但应用(2)较方便.

例题的思路探索与规律总结

【例 1-1】(2002 年北京市东城区中考题)如图 1-1,下列图案是我国儿家银行的标志,其中轴对称图形有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

图 1-1

解:因图形(2)找不到一条直线沿它折叠后直线两旁部分能够完全重合,而其余图形都至少存在一个对称轴,故选 C.

【例 1-2】 画出$\triangle ABC$关于直线 L 的对称图形$\triangle A'B'C'$.

【思路探索与解】 作$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于直线 L 对称,

(1)首先要找出$\triangle ABC$ 中的关键特殊点,因在$\triangle ABC$ 中,A、B、C 三点是关键的特殊点,这三点一旦确定$\triangle ABC$ 的形状位置便都确定了;(2)作 A、B、C 三点关于直线 L 的对称点 A'、B'、C';(3)连结 $A'B'$、$A'C'$、$B'C'$;则$\triangle A'B'C'$便为所求作的三角形,如图 1-2 所示.

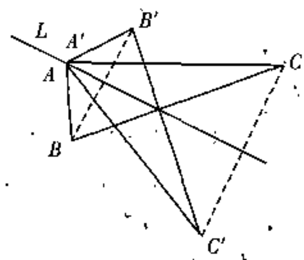

图 1-2

【规律总结】 (1)关于一个点的对称点:①如果点在对称轴上,它本身就是它的对称点,或者说点与对称点重合;②如果点不在对称轴上,应过该点向对称轴作垂线,在对称轴的另侧的垂线上截取相等线段确定它的对称点.

(2)作一个图形与已知图形关于某直线对称,就是要作这个

图形的所有的关键的特殊点(如线段的端点、多边形的顶点、圆的圆心等)的对称点,然后再顺次连结有关线段(或画弧)即可,这种方法也叫"以局部带整体"作图法.

【例 1-3】已知:直线 L 和 L 的同侧两点 A、B(如图 1-3);请在 L 上作一点 C,使 $AC+CB$ 最短. 并予以证明.

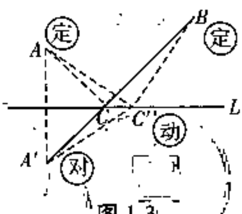

图 1-3

解法一:(1)作点 A 关于直线 L 的对称点 A'. (2)连结 $A'B$ 与 L 交于点 C,则点 C 即为所求的点.

证明:不妨在 L 上任取一点 C',连结 AC、AC'、$A'C'$、$C'B$. 因为直线 L 是点 A、A' 的对称轴,点 C、C' 在对称轴上,$\therefore AC=A'C, AC'=A'C'$, $\therefore AC+CB=A'C+CB=A'B$. 在 $\triangle A'C'B$ 中,$\because A'B<A'C'+C'B$, $\therefore AC+CB<AC'+C'B$. 即 $AC+CB$ 最小.

解法二:本题也可作 B 点关于直线 L 的对称点 B',再连结 $B'A$ 与 L 交于点 C,则点 C 即为所求. 易证解法一、二中的 C 是同一个点.

【规律总结】 在求线段和(或差)的最小(或最大)值时,往往要利用作有关定点关于动点所在的直线为对称轴的对称点做阶梯,请注意运用.

【例 1-4】如图 1-4,点 A 是 $\angle MON$ 内一点,求作 $\triangle ABC$,使 B 在 OM 上,C 在 ON 上,且使 $\triangle ABC$ 的周长最小.

【思路探索】 关于用作图求最小值(或最大值)问题,往往是利用作定点(这里为 A)关于动点(这里是 B 与 C)所在的直线(这里是 OM 与 ON)为对称轴的对称点做阶梯.

作法:(1)分别作点 A 关于 OM、ON 的对称点 A'、A'';

(2)连结 $A'A''$ 分别与 OM、ON 相交于 B、C 两点;

(3)连结 AB、AC,则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

证明:在 OM 上任取一点 B',ON 上任取一点 C',连结 AB'、

AC'、$B'C'$得$\triangle AB'C'$. 因B'、C'是任取的,现在只要证明$\triangle ABC$的周长<$\triangle AB'C'$的周长即可,为此再连结$A'B'$,$A''C'$. 而$\triangle ABC$的周长$=A'A''$,$\triangle AB'C'$的周长$=A'B'+B'C'+C'A''$. ∵两点之间线段最短,∴问题得证.

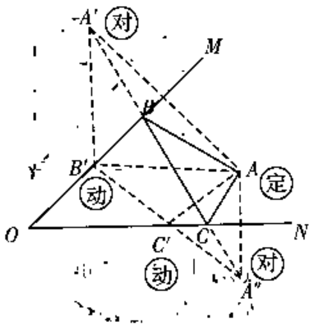

图1-4

【规律总结】　通过例3、例4以及其他与极值有关的问题,我们可总结出如下规律:在求线段和(或差)的极值时:

法则一:在求由两个定点与一个动点分别为端点所组成的两条动线段的和(或差)的最小(或最大)值时,先作两个定点中任一个定点关于动点所在直线为对称轴的对称点,则这个对称点与另一个定点所在的直线与动点所在的直线的交点,便是所求的极值点.

法则二:在求由一个定点与两个动点分别为端点所组成的三条动线段的和的最小值时,先分别作这个定点关于两个动点所在的两条直线为对称轴的对称点(两个),则这两个对称点所在的直线与两个动点所在的两条直线的两个交点,便是所求的极值点.

法则三:在求以定点与动点为端点所组成的动线段的和(或差)的极值时,不论在什么条件下总是要作定点关于动点所在的直线为对称轴的对称点为阶梯而解之.

【模拟练习】

(1)(2004年黑龙江省中考题)如图1-5,正方形$ABCD$的边长为8,M在DC上,且$DM=2$,N是AC上的一个动点,则$DN+MN$的最小值为________.

(2)如图1-6,正方形$ABCD$的边长为6,P在DC上,且$DP=2$,求作$\triangle PQR$,使Q在AD上,R在AC上,且使$\triangle PQR$的周长最小,其最小值是________.

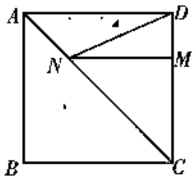

图 1-5

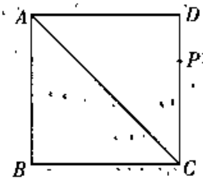

图 1-6

【例 1-5】（2002 年江西省中考题）如图 1-7，$AB = AE$，$\angle ABC = \angle AED$，$BC = ED$，点 F 是 CD 的中点.(1)求证：$AF \perp CD$；

(2)在连结 BE 后，你能得出什么新的结论，请写出三个(不要求证明).

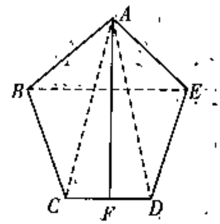

图 1-7

【思路探索】 (1)$\because F$ 是 CD 的中点，$\therefore$ 要证 $AF \perp CD$，应连结 AC、AD.(2)这是一道结论开放的探索性题.

(1)证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle ABC = \angle AED \\ BC = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED(SAS)$.

$\therefore AC = AD$，又$\because F$ 为 CD 的中点.

$\therefore AF \perp CD$(等腰三角形三线合一)

(2)①$BE \parallel CD$；②$AF \perp BE$；③$\triangle ACF \cong \triangle ADF$；④$\angle ABE = \angle AEB$；⑤$\angle BCD = \angle EDC$；⑥五边形 $ABCDE$ 是以直线 AF 为对称轴的轴对称图形.

【例 1-6】（2006 年北京市中考题）如图 1-8(1)，OP 是$\angle MON$ 的平分线，请你利用该图形画一对以 OP 所在直线为对称轴的全等三角形.请你参考这个作全等三角形的方法，解答下列问题：

(1)如图 1-8(2)，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$ 是直角，$\angle B = 60°$，AD、

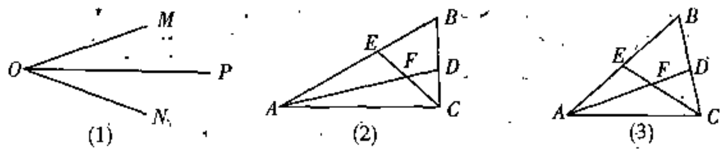

图 1-8

CE 分别是∠BAC、∠BCA 的平分线，AD、CE 相交于点 F，请你判断并写出 FE 与 FD 之间的数量关系；

(2) 如图 1-8(3)，在△ABC 中，如果∠ACB 不是直角，而(1)中其他条件不变，请问，你在(1)中所得结论是否仍然成立，请证明；若不成立，请说明理由.

【思路探索与解】 若在一大题中包含几个小题，前几小题往往是为后小题铺路和提供解题线索的，为此必须认真从前几小题中找到解题规律，以便为解后小题奠定基础.

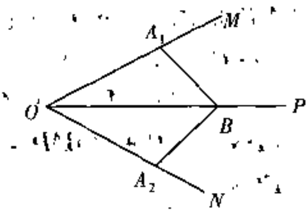

图 1-9

在图 1-8(1)中，在 OM 与 ON 上分别取 A_1、A_2，并使 $OA_1 = OA_2$，再在 OP 上任取一点 B，连 BA_1、BA_2(如图 1-9 所示)，则 $\triangle OA_1B \cong \triangle OA_2B$，且这两个三角形关于 OP 所在的直线对称，$BA_1 = BA_2$，从中悟出：在一个角平分线的两边一定可作一对关于以角平分线所在直线为对称轴全等三角形.

(1) 试题要求在图 1-8(2)中，判断线段 FE 与 FD 之间的数量关系，为此我们坚持“实践是检验真理的唯一标准”的原则，我们对图 1-8(2)(如图形不准必须重作一个)中的 FE 与 FD 用圆规进行比较测量，初步测定 $FE = FD$. 然后再上升到理性认识进行推理证明(对本小题虽不要求证明，但为了给后小题找到证题线索这里现给予证明)，那么怎样进行证明呢？受在图 1-8(1)中角平分

线的两边一定可以作关于以角平分线为对称轴的两个全等三角形的启发，而在图 1-8(2) 中存在两条角平分线，所以可作两对对应的全等三角形，便可搞“等代转化”．

证法一：如图 1-10 所示，在 AC 上取一点 G，使 $AG=AE$，易证 $\triangle AGF\cong\triangle AEF$，$\therefore FG=FE$，$\angle AFG=\angle AFE$，又 $\angle AFE=\angle FAC+\angle ACF=\frac{1}{2}\times30°+\frac{1}{2}\times90°=60°$，$\therefore \angle AFG=60°$，又 $\angle CFD=\angle AFE=60°$，$\therefore \angle CFG=180°-60°\times2=60°$，$\therefore \angle CFG=\angle GFD$，从而易证 $\triangle CFG\cong\triangle CFD$，$\therefore FG=FD$，从而 $FE=FD$.

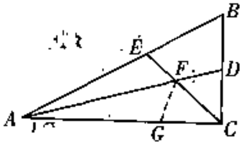

图 1-10

证法二：如图 1-11 所示，$\because F$ 点是 $\triangle ABC$ 的内心 $\therefore$ 过 F 点作 $FM\perp AB$ 于 M，作 $FN\perp BC$ 于 N，则 $FM=FN$，

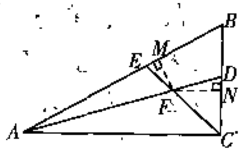

图 1-11

又 $\because \angle FEM=\angle EAC+\angle ACE=75°$，$\angle FDN=\angle B+\angle BAD=75°$，$\therefore \angle FEM=\angle FDN$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle FEM\cong\mathrm{Rt}\triangle FDN(AAS)$．$\therefore FE=FD$.

(2) 对图 1-8(3) 中的线段 FE、FD 进行测量也得到 $FE=FD$，它的证明相应的也有两种方法，这与在图1-8(2) 中的证明基本是一致的，不过只是由特殊到一般罢了，所不同的是在图 1-8(2) 的证法一中，$\angle AFE=\angle FAC+\angle ACF=15°+45°=60°$，而在图 1-8(3) 中，$\angle AFE=\angle FAC+\angle ACF=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$，其余步骤基本相同，对于证法二也是基本如此，详细证明，请同学们完成.

【规律总结】 (1) 为了探索证题思路，对前小题未作要求证明的却做了证明，对后小题要求证明的却只指明证题途径而未做