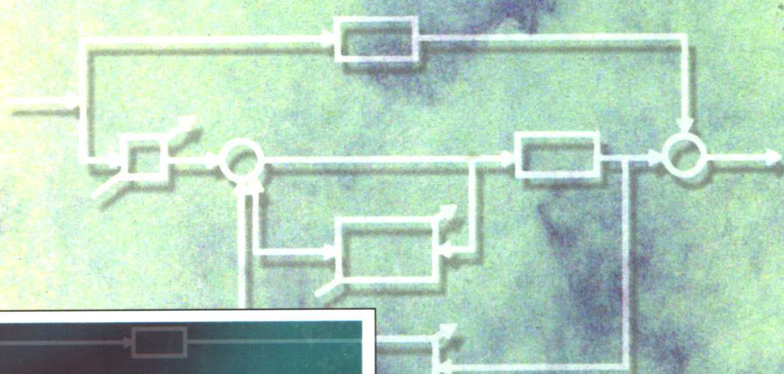
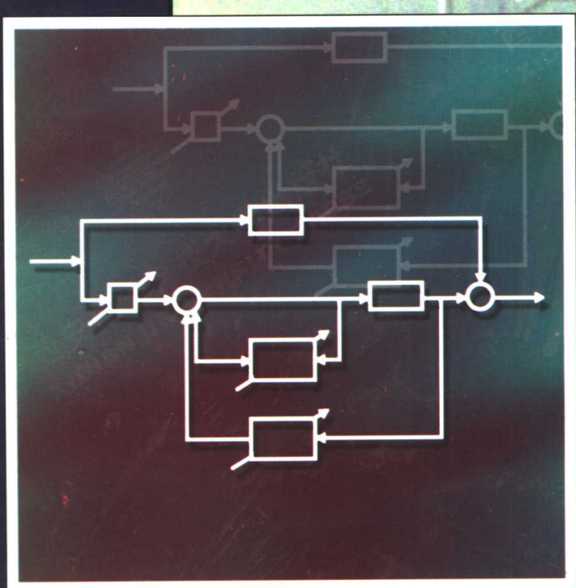
研究生系列教材

非线性控制理论及应用





贺昱曜 闫茂德 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

非线性控制理论及应用

贺昱曜　闫茂德　编著

西安电子科技大学出版社

2007

内 容 简 介

本书集作者多年来从事非线性控制系统的教学经验和科研实践，从系统分析和设计角度出发，系统地介绍了非线性控制系统的基本理论、基本方法和应用技术，同时还融入了国内外学者近年来所取得的新成果。

全书共分 8 章。前 3 章分别是绪论、相平面分析和稳定性理论基础。第 4 章介绍了精确线性化的基本概念和方法。第 5～7 章给出了几种非线性控制设计方法，如滑模变结构控制、自适应控制、非线性系统的 H_∞ 控制以及各种设计方法的相互融合。第 8 章给出了四种非线性控制的应用实例，以使读者对非线性控制的理论研究和工程应用有一个基本认识。

本书学术思想新颖，理论联系实际，重点突出，反映了该领域的基本理论和最新研究成果与进展。

本书可作为自动化专业的高年级本科生教材和控制科学与工程等学科的研究生教材，也可作为其他相关领域的学者和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制理论及应用/贺昱曜，闫茂德编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2007.4

(研究生系列教材)

ISBN 978-7-5606-1776-3

Ⅰ. 非…　Ⅱ. ①贺…　②闫…　Ⅲ. 非线性控制系统—研究生—教材　Ⅳ. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 014589 号

责任编辑　阎　彬　云立实

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮编　710071

http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西光大印务有限责任公司

版　　次　2007 年 4 月第 1 版　　2007 年 3 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 19.875

字　　数　468 千字

印　　数　1～4000 册

定　　价　26.00 元

ISBN 978-7-5606-1776-3/TN·0359

XDUP 2068001-1

如有印装问题可调换

前　言

回顾控制学科发展的历史，我们可以发现，促进这一领域进步最直接的动力是工业生产自动化的需要。严格说来，非线性是普遍存在的，实际控制系统无疑都是非线性系统。所谓线性系统，仅仅是实际系统在忽略了非线性因素后的理想模型。理想的线性系统实际上是不存在的。非线性特性千差万别，不可能有统一的普遍适用的处理方法。对于线性系统，由于可用线性常微分方程来描述，而解线性常微分方程已有成熟的方法，因此对线性系统的分析则大为简单。线性控制系统理论研究已经取得了很大的成就。相比之下，描述非线性系统的非线性微分方程只在个别情况下才有解析解，这给非线性控制系统的研究带来了极大的困难。因而人们希望在非线性控制系统理论研究上能够取得重要进展。

非线性系统的控制问题近30年来得到了广泛的重视，这极大地推动了非线性控制理论及其应用的发展。特别是当微分几何、微分代数等方法被引入非线性动态系统分析以后，为非线性控制的研究带来了突破性的进展。以微分几何为工具发展起来的精确线性化方法受到了普遍的重视，但能够实现精确线性化的系统只是极少数，因而分析与设计非线性系统的其他方法，如滑模变结构控制、自适应控制、神经网络控制等也得到了很大的发展。对于实际动态系统，一般都不可能完全地精确建模，在其数学模型中都应考虑不确定性。这些不确定性包括参数不确定性、未建模动态和各种干扰等。因此，不确定性非线性系统的鲁棒控制成为控制理论的一个重要研究课题。同时，它也是一个很有实用价值且有很强挑战性的研究课题。而对于一般化的难以精确描述的非线性系统，其鲁棒控制更应具有相当强的适应能力，这正是近年来人们研究的重点。

目前，“非线性控制系统理论与应用”已被列为国内外许多工科大学相关专业硕士生和博士生的学位课或必修课。因此，撰写一本适合我国工科院校研究生和工程技术研究人员使用的著作是十分必要的。本书根据作者多年来从事非线性控制系统理论与应用的研究生教学经验与科研工作的实践编写而成，力求将一些非线性系统基本理论和目前一些比较有代表性的新理论及研究热点内容介绍给读者。

本书的主要内容包括：

第1章：介绍非线性系统的发展、主要特性以及非线性系统的分析与设计方法，使读者对非线性系统有一个概略的了解。

第2章：借助于相平面分析提供的简单图形工具来研究二阶系统，进一步熟悉非线性系统的某些特性及一些重要概念。

第3章：介绍李雅普诺夫稳定分析理论及有关稳定性分析的现代论题，如芭芭拉特引理、小增益定理及绝对稳定性等。

第4章：介绍非线性控制系统的精确线性化方法。首先对单输入单输出系统给出可以实现输入—状态线性化和输入—输出线性化的条件以及精确线性化方法，然后将有关结果推广到多输入多输出系统。此外还讨论了多输入多输出系统的动态扩展算法。

第 5 章：介绍非线性系统的滑模变结构控制的基本原理和方法，重点讨论伴随型非线性系统和仿射非线性系统的滑模变结构控制器设计方法，同时还介绍了几种新型的滑模变结构控制器设计方法，如 Terminal 滑模变结构控制器设计方法和反演滑模变结构控制器设计方法等。

第 6 章：介绍自适应控制的理论与方法，其中包括伴随型非线性系统的状态反馈自适应控制，严参数反馈型非线性系统的状态反馈自适应反演控制和输出反馈型非线性系统自适应反演控制，并讨论自适应控制系统的鲁棒性。

第 7 章：介绍非线性 H_∞ 鲁棒控制理论的基本设计思想及其前沿领域的理论与应用成果。

第 8 章：给出非线性控制理论的一些应用实例，包括机械手系统的控制、非完整移动机器人系统的控制、电机系统的控制以及磁悬浮球系统的输出反馈自适应反演控制等，以期使读者对非线性控制理论的应用有一个基本认识。

本书第 1、4 章和第 3、8 章的部分内容由贺昱曜博士(教授)主笔，第 5、6、7 章和第 8 章的部分内容由闫茂德博士(副教授)主笔，第 2 章和第 3 章的部分内容由许世燕博士主笔。全书最后由贺昱曜博士(教授)统一定稿。

特别要感谢的是作者在攻读博士期间的导师——西北工业大学的徐德民院士，是他把作者引入了非线性控制领域，进而感受到非线性系统的奇妙变化。感谢加拿大 Saskatchewan 大学的施阳博士对本书提出了许多建设性的修改意见。多年来选修"非线性控制系统"课程的博士和硕士研究生为本书的编写也做了大量的工作，特别是博士生樊小红，硕士生吴青云、郭永涛、刘洋等为作者撰写本书查阅和翻译了大量的外文资料，非常感谢他们。此外，本书部分研究成果得到了国家自然科学基金(No. 60472022)、全国优秀博士论文专项资金(No. 200250)、陕西省自然科学基金(No. 2003E219 和 No. 2006F03)等项目的大力支持，在此深表谢意。西安电子科技大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此也表示衷心的感谢。

由于编者水平和研究兴趣所限，书中的缺点和不足之处在所难免，热诚欢迎读者批评指正。

作　者

2006 年 12 月

目 录

第 1 章 绪论 …… 1

1.1 非线性系统控制概述 …… 1

1.1.1 非线性控制理论的发展 …… 2

1.1.2 非线性控制的意义 …… 2

1.2 非线性控制系统的数学描述 …… 3

1.2.1 非线性控制系统的微分方程描述 …… 3

1.2.2 非线性常微分方程的解的存在性及唯一性 …… 5

1.3 非线性系统特性 …… 6

1.3.1 非线性系统与线性系统的本质区别 …… 6

1.3.2 非线性系统的主要特性 …… 8

1.4 非线性控制系统的分析与设计方法 …… 12

1.4.1 非线性控制系统的分析方法 …… 12

1.4.2 非线性控制系统的设计方法 …… 13

1.5 本书简介 …… 19

参考文献 …… 20

第 2 章 相平面分析 …… 21

2.1 相平面的基本概念 …… 21

2.1.1 相轨迹和相平面图 …… 21

2.1.2 奇点与极限环 …… 22

2.2 相轨迹的绘制方法 …… 25

2.2.1 解析法 …… 25

2.2.2 图解法 …… 27

2.3 线性系统的相轨迹 …… 30

2.4 由相平面图求时间解 …… 32

2.5 非线性系统的相平面分析 …… 33

2.5.1 非线性系统的局部特性 …… 33

2.5.2 分段线性化 …… 34

2.5.3 极限环存在性的判断定理 …… 38

2.6 本章小结 …… 39

习题 …… 40

参考文献 …… 41

第 3 章 稳定性理论基础 …… 42

3.1 非线性系统与平衡点 …… 43

3.1.1 非线性系统 …… 43

3.1.2 自治和非自治系统 …… 43

3.1.3 平衡点 …… 44

3.1.4 标称运动 …… 45
3.2 稳定性的概念 …… 46
3.2.1 外部稳定性 …… 47
3.2.2 内部稳定性 …… 48
3.2.3 外部稳定性和内部稳定性的关系 …… 49
3.2.4 李雅普诺夫意义下运动稳定性的一些基本概念 …… 51
3.3 李雅普诺夫间接法 …… 57
3.3.1 自治非线性系统的间接法 …… 57
3.3.2 非自治非线性系统的间接法 …… 60
3.4 李雅普诺夫直接法 …… 61
3.4.1 正定函数和李雅普诺夫函数 …… 62
3.4.2 李雅普诺夫稳定性定理 …… 64
3.5 拉萨尔不变集定理 …… 70
3.5.1 局部不变集定理 …… 70
3.5.2 全局不变集定理 …… 73
3.6 Barbalat 引理及稳定性分析 …… 74
3.6.1 Barbalat 引理 …… 74
3.6.2 基于 Barbalat 引理的稳定性分析 …… 76
3.7 不稳定性定理 …… 77
3.8 线性系统的李雅普诺夫稳定性 …… 78
3.8.1 预备知识 …… 78
3.8.2 线性时不变系统的李雅普诺夫分析 …… 79
3.8.3 线性时变系统的李雅普诺夫分析 …… 80
3.9 基于李雅普诺夫直接法的非线性系统的分析与设计 …… 82
3.9.1 李雅普诺夫函数的存在性 …… 82
3.9.2 非线性系统的李雅普诺夫函数的构造和分析 …… 82
3.9.3 基于李雅普诺夫直接法的控制器设计 …… 87
3.9.4 稳定系统的过渡过程及品质的估计 …… 88
3.10 小增益定理的理论 …… 91
3.10.1 问题的描述 …… 91
3.10.2 L_q 空间及其扩展 …… 91
3.10.3 小增益定理 …… 93
3.10.4 小增益定理的增量形式 …… 94
3.10.5 L_q 稳定性及其与李雅普诺夫稳定性的联系 …… 95
3.11 绝对稳定性 …… 98
3.11.1 绝对稳定性问题 …… 98
3.11.2 波波夫判据 …… 99
3.11.3 圆判据 …… 100
3.12 本章小结 …… 101
习题 …… 102
参考文献 …… 104
第 4 章 精确线性化方法 …… 105
4.1 精确线性化的基本概念 …… 105

4.1.1 精确线性化与标准型 …… 106
4.1.2 输入—状态线性化 …… 109
4.1.3 输入—输出线性化 …… 110
4.2 微分几何数学基础 …… 115
4.2.1 微分同胚与状态变换 …… 116
4.2.2 光滑映射和光滑流形 …… 117
4.2.3 李导数和李括号 …… 117
4.2.4 分布与对合 …… 119
4.2.5 弗罗贝尼斯定理 …… 120
4.3 SISO 非线性系统的输入—状态精确线性化 …… 121
4.3.1 输入—状态精确线性化定理 …… 121
4.3.2 输入—状态精确线性化的充要条件 …… 122
4.3.3 输入—状态精确线性化的步骤 …… 125
4.3.4 基于输入—状态线性化的控制器设计 …… 126
4.4 SISO 系统的输入—输出线性化 …… 127
4.4.1 线性输入—输出关系的生成 …… 127
4.4.2 SISO 非线性系统的标准型 …… 129
4.4.3 零动态子系统 …… 134
4.4.4 渐近稳定性分析 …… 135
4.4.5 SISO 系统的跟踪控制 …… 138
4.4.6 精确跟踪与逆动态系统 …… 140
4.5 MIMO 系统的精确线性化 …… 140
4.5.1 MIMO 系统的输入—输出精确线性化 …… 141
4.5.2 MIMO 系统的输入—状态精确线性化 …… 142
4.6 MIMO 系统线性化的动态扩展算法 …… 143
4.6.1 动态增广法 …… 143
4.6.2 输出反演法 …… 145
4.7 本章小结 …… 145
习题 …… 146
参考文献 …… 147
第 5 章 滑模变结构控制 …… 149
5.1 二阶线性系统的滑模变结构控制 …… 150
5.2 滑模变结构控制的理论基础 …… 153
5.2.1 滑模变结构控制的基本原理 …… 153
5.2.2 滑动模态的存在和到达条件 …… 156
5.2.3 等效控制及滑动模态的运动方程 …… 156
5.2.4 滑模变结构控制的趋近律 …… 158
5.2.5 匹配条件及不变性 …… 160
5.2.6 滑模变结构控制系统的综合 …… 163
5.3 线性系统的滑模变结构控制 …… 164
5.4 伴随型非线性系统的滑模变结构控制 …… 165
5.4.1 单输入单输出伴随型非线性系统的滑模变结构控制 …… 165
5.4.2 多输入多输出伴随型非线性系统的滑模变结构控制 …… 168

5.5 仿射非线性系统的滑模变结构控制器设计 …… 171
5.6 基于精确线性化的滑模变结构控制器设计 …… 173
5.7 几种新型的滑模变结构控制器设计方法 …… 175
5.7.1 不确定非线性系统的动态滑模变结构控制器设计 …… 175
5.7.2 不确定非线性系统的快速 Terminal 滑模变结构控制器设计 …… 177
5.7.3 非匹配不确定非线性系统的反演变结构控制器设计 …… 181
5.8 滑模变结构控制系统的抖振及其削弱问题 …… 185
5.8.1 滑模变结构控制系统的抖振 …… 186
5.8.2 滑模变结构控制系统抖振的削弱 …… 186
5.9 本章小结 …… 188
习题 …… 189
参考文献 …… 190
第 6 章 自适应控制 …… 193
6.1 自适应控制的基本概念 …… 194
6.1.1 什么是自适应控制 …… 194
6.1.2 两类重要的自适应控制系统 …… 195
6.1.3 自适应控制的应用概况 …… 198
6.1.4 如何设计自适应控制器 …… 200
6.2 一阶系统的自适应控制 …… 202
6.2.1 控制律的选择 …… 203
6.2.2 自适应律的选择 …… 204
6.2.3 跟踪收敛性分析 …… 204
6.2.4 参数收敛性分析 …… 205
6.2.5 一阶非线性系统的自适应控制 …… 207
6.3 线性系统的状态反馈自适应控制 …… 207
6.3.1 控制律的选择 …… 208
6.3.2 自适应律的选择 …… 208
6.4 线性系统的输出反馈自适应控制 …… 209
6.4.1 控制律的选择 …… 210
6.4.2 自适应律的选择 …… 212
6.5 伴随型非线性系统的状态反馈自适应控制 …… 215
6.5.1 控制律的选择 …… 215
6.5.2 自适应控制律的选择 …… 216
6.6 严参数反馈型非线性系统的状态反馈自适应反演控制 …… 217
6.6.1 自适应反演控制器设计——调节问题 …… 217
6.6.2 自适应反演控制器设计——跟踪问题 …… 222
6.7 输出反馈型非线性系统自适应反演控制 …… 225
6.7.1 状态滤波器的设计 …… 226
6.7.2 输出反馈自适应控制器设计 …… 227
6.8 自适应控制系统的鲁棒性 …… 235
6.8.1 鲁棒性问题 …… 235
6.8.2 改善自适应控制鲁棒性的方法 …… 238
6.9 不确定非线性系统的自适应滑模变结构控制 …… 240

6.9.1 匹配不确定非线性系统的自适应滑模变结构控制器设计 …… 240
6.9.2 非匹配不确定非线性系统的自适应滑模变结构控制器设计 …… 243
6.10 本章小结 …… 246
习题 …… 247
参考文献 …… 248
第7章 非线性系统的 H_∞ 控制 …… 250
7.1 耗散系统 …… 250
7.1.1 耗散系统的概念 …… 250
7.1.2 耗散系统的稳定性 …… 256
7.1.3 非线性系统的 L_2 增益 …… 259
7.1.4 耗散性与最优控制 …… 262
7.2 状态反馈 H_∞ 控制 …… 264
7.2.1 非线性系统的状态反馈 H_∞ 控制 …… 264
7.2.2 不确定性非线性系统的状态反馈 H_∞ 控制 …… 268
7.3 输出反馈 H_∞ 控制 …… 270
7.4 本章小结 …… 279
习题 …… 279
参考文献 …… 280
第8章 非线性控制理论的应用 …… 281
8.1 机械手系统的控制 …… 281
8.1.1 机械手系统模型 …… 281
8.1.2 机械手系统的位置控制 …… 282
8.1.3 机械手系统的自适应轨迹跟踪控制 …… 283
8.1.4 非线性 H_∞ 状态反馈轨迹跟踪控制 …… 284
8.1.5 小结 …… 289
8.2 非完整移动机器人系统的控制 …… 289
8.2.1 移动机器人模型 …… 289
8.2.2 基于运动学模型的滑模变结构轨迹跟踪控制 …… 291
8.2.3 基于动力学模型的快速 Terminal 滑模变结构轨迹跟踪控制 …… 292
8.2.4 小结 …… 297
8.3 电机系统的控制 …… 297
8.3.1 电机系统模型 …… 297
8.3.2 精确反馈线性化控制器设计 …… 298
8.3.3 反演(Backstepping)控制器设计 …… 300
8.3.4 小结 …… 303
8.4 磁悬浮球系统的输出反馈自适应反演控制 …… 303
8.4.1 磁悬浮球系统模型 …… 303
8.4.2 输出反馈自适应反演(Backstepping)控制器设计 …… 304
8.4.3 小结 …… 306
8.5 非线性控制研究的方向与展望 …… 306
参考文献 …… 307

第1章 绪 论

许多实际的控制系统都具有非线性特性。例如：在飞机自动驾驶仪纵向稳定回路中，由于作为测量元件的垂直陀螺仪或角速度陀螺仪的输出轴存在着摩擦，因而在测量角度或角速度时总是有一个不灵敏区；由于作为放大元件的晶体管放大器或磁放大器的组成元件(如晶体管、铁芯等)都存在线性工作范围，因此往往只在一定范围内，放大元件的输出量与输入量之间才存在线性关系，超过了这个范围，放大器的特性就呈现饱和现象；执行元件例如电动机，总是存在摩擦力矩和负载力矩，因此只有当输入电压达到一定数值时，电动机才会转动，即存在不灵敏区，同时当输入电压超过一定数值时，电动机的实际输出也将具有不灵敏区和饱和的非线性特性。上述例子中的非线性是由于系统的不完善而产生的，这种不完善实际上是不可避免的。有些非线性是系统动态特性本身所固有的，例如：高速运动的机械手各关节之间有哥氏力的耦合，这种耦合是非线性的，如果要研究机械手高速运动的控制，就必须考虑非线性耦合；电力系统中传输功率与各发电机之间相角差的正弦函数成正比，如果要研究电力系统中的大范围运动，就必须考虑非线性特性的影响。还有一类被控对象本身虽然是线性的，但有时为了改善系统的性能或者简化系统的结构，对它进行高质量的控制，还常常在系统中引入非线性部件或者更复杂的非线性控制器。例如时间最优控制就要采用 Bang - Bang 控制，它是非线性的。因此，非线性是普遍存在的，实际控制系统无疑都是非线性系统。所谓线性系统，仅仅是实际系统在忽略了非线性因素后的理想模型。线性系统实际上是不存在的。非线性系统的特性千差万别，不可能有普遍适用的处理方法，而线性系统则较为简单，可以用线性常微分方程来描述。解线性常微分方程已有成熟的方法，因此，线性控制系统理论研究取得了很大的成就。相比之下，非线性微分方程只有在个别情况下才有解析解，这给非线性控制系统的研究带来了极大的困难。因而人们希望在非线性控制系统理论研究上能够取得新的重要进展。

1.1 非线性系统控制概述

经典控制理论和线性系统理论经过几十年的发展，已形成一系列工程应用的分析与设计方法。但它们都有一个基本要求，就是必须精确建立被控对象或过程的线性数学模型。然而由于实际被控对象或过程大部分呈现非线性特征，对被控对象或过程精确建模较为困难，甚至是不可能的，而且大部分模型还具有不确定性，因此，研究非线性系统的控制方法具有重要的理论意义和迫切的实际需要。20 多年来，随着功能强、价格低的微型处理机的大量使用，为了直接控制非线性系统、改善控制性能和处理模型的不确定性，人们有意

将非线性引入控制系统的控制器部分，且对于一些特殊形式的非线性系统，非线性控制律的设计可能要比线性控制律的设计更简单直观，控制性能更好，因此，非线性系统的控制问题得到了广泛的重视，控制学者们为此做了大量的工作，提出了各种各样的控制方法，这极大地推动了非线性控制理论及其应用的发展。

1.1.1 非线性控制理论的发展

控制理论自 20 世纪 30 年代产生以来，经过几十年的发展，到现在为止已经经历了经典和现代控制理论阶段。目前对于线性系统的分析与设计已形成了一套完整的理论体系，并在工程上得到了广泛的应用，在一定的范围内取得了比较满意的效果，获得了巨大的成就。

但严格地讲，几乎所有的控制系统都是非线性的，线性是在一定范围内和一定程度上对实际系统的近似描述。在早期，由于对控制系统的精度和性能要求较低，因此当系统的非线性因素被忽略或者被局部线性化后，在一定范围内仍可以满足对控制系统性能的要求。但非线性系统没有形成像线性系统那样完整、系统的理论体系。

经典控制理论所涉及的被控对象是线性单输入单输出系统，现代控制理论的研究重点是多变量线性系统。20 多年来，非线性系统理论的建立和发展引起了国内外控制学科学者的极大兴趣，相平面理论、Lyapunov 运动稳定性理论重新受到了极大的重视。从 1982 年前后 Poincare 等人创立奇异扰动法以来，经过 20 多年的发展，非线性系统的研究在一些重要的方面取得了令人瞩目的成就，建立了一系列系统分析和设计方法。同时，计算机技术的飞速发展和数学工具的突破，也为研究一般的非线性控制理论提供了可能性。

控制理论发展至今天，面临着一系列的挑战。最明显的挑战是被控对象的本质非线性控制，而且要求被控对象的运动是大范围的，例如卫星的定位与姿态控制、机器人控制、精密数控机床的运动控制等，这些都不可能采用线性模型。对于这类非线性系统的控制问题，不能通过泰勒展开线性化方法化为一般的线性系统问题，而必须采用非线性控制方法。同时，现代非线性科学所揭示的大量有意义的事实，例如分岔、混沌、奇异吸引子等，均远远超过人们熟知的非线性现象——自振，且无法用线性系统理论来解释。所有这些都要求人们在非线性控制理论和应用方面取得突破性进展。

1.1.2 非线性控制的意义

近年来，很多科学与工程领域(如飞机和宇宙飞船控制、机器人学、过程控制和生物医学工程等)的研究和设计人员对非线性控制方法的研究和应用表现出了极大的兴趣，其原因是采用非线性控制可获得如下的好处。

1. 改善控制性能

线性控制方法有效的前提是当系统在小范围运行时线性模型的假设成立。当需要大范围运行时，由于系统中存在的非线性得不到适当的补偿，因而使得线性控制器很可能性能低下或者不稳定。而非线性控制器则可能直接处理大范围运行时出现的非线性问题，这点很容易用机械手的运动控制问题来说明。当采用线性控制器控制机械手运动时，忽略了与机械手连杆运动有关的非线性作用力(如哥氏力和向心力)，而许多有关的动态作用力随速度的平方变化，于是控制器的精度随运动速度的提高而迅速降低。为了达到机械手执行任务(诸如抓放、弧焊和激光切割等)的预定精度，可采用一种概念上简单的非线性控制器

(一般称为计算力矩控制器),它能够完全补偿机械手运动的非线性作用力,并能在很宽的机械手速度范围和大的工作空间内获得高精度控制。

2. 分析强非线性

线性控制的另一假设是系统模型实际上能够被线性化。然而,控制系统中存在许多非线性特征,其不连续特性不允许进行线性近似。这些所谓"强非线性(hard nonlinearities)",包括哥氏摩擦、饱和、死区、啮合间隙和磁滞等,在控制工程中经常碰到。这些非线性的作用不能由线性方法得到,而必须发展非线性分析技术,以用来预测存在这些固有非线性时系统的特性。这些非线性往往会引起系统出现不合需要的特性(如不稳定性或伪极限环等),所以,它们的作用必须加以预测并适当地补偿。

3. 处理模型不确定性

在设计线性控制器时,通常需要假定系统模型的参数是已知的。但是,许多控制问题含有非线性的模型参数。这可能是由于参数随时间缓慢变化(如飞机飞行过程中周围空气的压力)或者是由于参数的突然变化(如机械手抓起一个新的物体时的惯性参数)而产生的。基于不精确或失效的模型参数值的线性控制器表现出明显的特性恶化,甚至产生不稳定现象。对此种情况,可以有意地把非线性引入控制系统的控制器部分,以便能够承受模型的不确定性。鲁棒控制器和自适应控制器便是这样的非线性控制器。

4. 简化控制系统设计

好的非线性控制设计在有些情况下可能要比线性控制设计更简单直观。非线性控制器的设计往往深深地扎根于被控对象的物理特性中。举个很简单的例子,让我们考虑某个垂直平面内一个挂在铰链上的单摆。该单摆从某个任意初始角度开始摆动,并逐渐衰减,最后停在垂线位置。虽然单摆的特性可以在接近平衡点时通过对系统的线性化来进行分析,但是其稳定性实际上与某些线性化系统矩阵的特征值关系甚小。它是基于下述事实的:该系统的全部机械能逐渐被各种摩擦力(如铰链摩擦力等)所消耗,因此,单摆在某个最小能量位置趋于停止。

由此可见,控制系统中的非线性,有些对系统的运行是有害的,应设法克服;有些是有益的,设计时应予以考虑。学习非线性控制分析和设计的基本方法,能够极大地提高控制工程师有效处理实际控制问题的能力,还能够提供对含有固有非线性的现实世界的清晰理解。现代技术(如高速度、高精度机器人或高性能飞行器)也对控制系统提出了更为严格的设计要求,因而从事控制工作的工程师和研究人员对非线性控制系统的研究给予了极大的关注。

1.2 非线性控制系统的数学描述

对于非线性系统,人们常常采用微分方程或非线性算子方程来描述。本节介绍非线性控制系统的微分方程描述法。

1.2.1 非线性控制系统的微分方程描述

相当广泛的一类非线性系统可用 n 阶常微分方程来描述:

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = h\left[y(t),\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}},\ u(t),\ t\right],\quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其中，$u(t)\in\mathbf{R}$ 为控制输入，$y(t)\in\mathbf{R}$ 为系统输出。若定义

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

则式(1.1)可改写为具有 n 个一阶微分方程的方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = h[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t),\ u(t),\ t] \end{cases} \tag{1.2}$$

如果定义向量 $\boldsymbol{x}(\cdot)$：$\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$：$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ 为

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ u,\ t) = [x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ h(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u,\ t)]^{\mathrm{T}}$$

则式(1.2)可写成向量微分方程的形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ u(t),\ t],\quad t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

其中，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量。在上面的推导中设 $u(t)$ 为单变量控制输入，若系统为多输入，则式(1.3)的形式仍然可用，此时 $\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入向量。

对于一个由式(1.3)描述的非线性控制系统，我们希望对于每一个输入 $u(t)$，以下情况都可以成立：

(1) 至少存在一个解(解的存在性)；

(2) 只存在一个解(解的唯一性)；

(3) 对于时间半轴$[0,\ \infty)$，式(1.3)只存在一个解；

(4) 在$[0,\ \infty)$轴上式(1.3)只存在一个解，而且这个解与初值 $\boldsymbol{x}(0)$ 存在连续变化的关系。

以上是我们的期望，这些要求是相当高的，只有对 $\boldsymbol{f}$ 函数提出相当严格的要求才能实现。可以举出以下一些不符合上述要求的例子。

【例 1.1】 方程 $\dot{x}(t)=\dfrac{1}{2x(t)}$，$t\geqslant 0$，$x(0)=0$ 有两个解：$x_1(t)=t^{1/2}$，$x_2(t)=-t^{1/2}$。这就是说上列条件(1)成立，但条件(2)不成立。

【例 1.2】 $\dot{x}(t)=1+x^2(t)$，$t\geqslant 0$，$x(0)=0$，此方程在$[0,\ 1)$区间有唯一解 $x(t)=\tan t$，但在$[0,\ \infty)$区间不存在连续可微的解 $x(t)$。这就是说上列条件(1)、(2)是满足的，但条件(3)不满足。

上面的例子和陈述说明式(1.3)解的存在性及唯一性是十分重要的。上述例子中系统可以有解析形式的解，这只是非常特殊的情况。一般情况下，方程式的解即使存在也是表达不出来的，只能对它进行近似的估计或数值计算。

对于多输入非线性系统，如果 $\boldsymbol{u}(t)=0$，则

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),t],\ t\geqslant 0,\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.4}$$

代表系统的自由运动。

在许多控制系统中，输入量 $\boldsymbol{u}(t)$ 可从函数 $\boldsymbol{f}$ 中分离出来，此时系统方程可写成以下形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5}$$

称这样的系统是仿射的。它代表相当广泛的一类非线性系统，这类系统有其自身的特点。

在后续的章节中，仿射非线性系统将是我们研究的一类重要的非线性系统。

1.2.2 非线性常微分方程的解的存在性及唯一性

上面提出对于非线性控制，要求系统方程是有解的，且解是唯一的，这点很重要。本节将不加证明地介绍这方面的一些基本知识。我们分以下两种情况来讨论方程(1.4)的解的存在及唯一的条件。

1. 局部解情况

定理 1.1 如果式(1.4)中的 $\boldsymbol{f}$ 对 t 和 $\boldsymbol{x}$ 是连续的，若存在正常数 k，r，h，T，使得

(1) $$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t)\|\leqslant k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B,\ \forall t\in[0,T] \tag{1.6}$$

其中，$B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant r\}$ 代表 $\mathbf{R}^n$ 中的一个球；

(2) $$\|f(\boldsymbol{x}_0,t)\|\leqslant h,\ \forall t\in[0,T] \tag{1.7}$$

则在满足以下条件的 δ 区间 $[0,\delta]$ 中，式(1.4)有一个唯一解。δ 应满足的条件是

$$h\delta\ \exp(k\delta)\leqslant r \tag{1.8a}$$

$$\delta\leqslant\min\left(T,\frac{\rho}{k},\frac{r}{h+hr}\right),\ \rho<1 \tag{1.8b}$$

定理中所列式(1.6)称为 Lipschitz 条件，k 称为 Lipschitz 常数。式(1.6)表明只在局部区间满足 Lipschitz 条件，因此所讨论的解也是局部的。

由定理 1.1 可得以下推论：

推论 1.2 如果在 $(\boldsymbol{x}_0,0)$ 的邻域，$\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的偏导存在并连续，对 t 的单边偏导存在并连续，则式(1.4)在相当小的区间 $[0,\delta]$ 内存在唯一解。

2. 全局解情况

定理 1.3 如果在 $T\in[0,\infty)$ 区间内存在有界常数 k_T 和 h_T，使得

(1) $$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t)\|\leqslant k_T\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B,\ \forall t\in[0,T] \tag{1.9}$$

(2) $$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t)\|\leqslant h_T,\ \forall t\in[0,T] \tag{1.10}$$

则式(1.4)在 $[0,T]$，$\forall T\in[0,\infty)$ 区间内存在唯一解。

这里式(1.9)称为全局 Lipschitz 条件。粗略地说，如果系统在全局范围内满足 Lipschitz 条件，则在全局范围内，系统在区间 $[0,\infty)$ 内有唯一解。

定理 1.4 如果函数 $\boldsymbol{f}$ 满足定理 1.3 中所规定的条件，设 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{y}(\cdot)$ 均满足式(1.4)，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$
$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{y}(t),t],\quad \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}_0$$

则对每一 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta(\varepsilon,T)>0$，只要

$$\| \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0 \| < \delta(\varepsilon, T), \ \forall T \in [0, \infty)$$

则有 $\| \boldsymbol{x}(\cdot) - \boldsymbol{y}(\cdot) \| < \varepsilon$。

1.3 非线性系统特性

物理系统具有固有非线性。但如果一个控制系统的工作范围较小，而且所包含的非线性比较光滑，那么该控制系统可由某个线性化系统来适当地逼近，而这个线性化系统则可由某个线性微分方程组来描述。实际上，所有控制系统都具有一定程度的非线性。非线性控制系统可由非线性微分方程式来描述。

非线性可分为固有(自然)非线性和外加(人为)非线性。固有非线性自然地源于系统的硬件和运动。固有非线性的例子包括旋转运动的向心力和接触面之间的哥氏摩擦力等。这种非线性往往具有不良的作用，控制系统必须对非线性加以适当补偿。外加非线性是由设计者人为地引入系统的。诸如自适应控制律和 bang - bang 最优控制律等非线性控制律是外加非线性的典型例子。

非线性系统的特性要比线性系统复杂得多。对于非线性系统来说，由于叠加原理不成立，因此非线性系统对外部输入的响应与线性系统有很大的不同。

1.3.1 非线性系统与线性系统的本质区别

对于线性系统，描述其运动状态的数学模型是线性微分方程，一般可以求得其解析解，其根本标志就在于能使用叠加原理。而对于非线性系统，其数学模型为非线性微分方程，一般不能求得其解析解，不能使用叠加原理。非线性系统与线性系统的区别主要表现在：

(1) 稳定性。在线性系统中，系统的稳定性只取决于系统的结构和参数，也即取决于系统特征方程根的分布，而和初始条件、外加作用没有关系。如果系统中的一个运动，即系统方程在一定外加作用和初始条件下的解是稳定的，那么线性系统中可能的全部运动都是稳定的。所以我们可以说某个线性系统是稳定的或者是不稳定的。对于非线性系统，不存在系统是否稳定的笼统概念，必须讨论某一具体运动的稳定性问题。非线性系统运动的稳定性，除了和系统的结构形式及参数大小有关以外，还和初始条件有密切的关系。对于同样结构和参数的非线性系统，可以存在着稳定的运动和不稳定的运动，而稳定的运动可以是全局的，也可以是局部的。局部稳定的运动也不一定对于所有的初始扰动都是稳定的，可能出现对于较大的初始扰动就不稳定的情况。

(2) 初始条件作用。线性系统自由运动的形式与系统的初始偏移无关。如果线性系统在某一初始偏移下的时间响应曲线是振荡收敛的形式，那么它在任何初始偏移下的时间响应曲线都具有振荡收敛的形式，不会出现非周期收敛或者发散的形式。非线性系统则不一样，自由运动的时间响应曲线可以随着初始偏移的不同而有多种不同的形式。在图 1.1 中示出了某个非线性系统在不同初始偏移下的时间响应曲线，图 1.1 中曲线 1 是振荡衰减的形式，曲

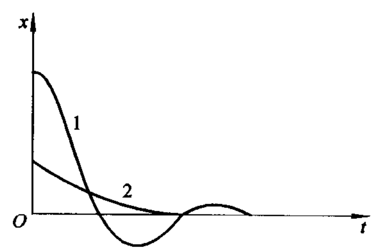


图 1.1 非线性系统在不同初始偏移下的自由运动

线 2 是非周期衰减的形式。

(3) 自振或周期运动。常系数线性系统在没有外作用时，周期运动只发生在 $\xi=0$ 的临界情况，而这一周期运动是物理上不可能实现的。事实上，一旦系统的参数发生微小的变化，这一临界状态就难以维持，即使维持了临界情况不变，但这时系统中原来运动的周期仍可能发生变化。例如二阶无阻尼系统的自由运动的解是 $x=A\sin(\omega t+\varphi)$，这里 ω 只取决于系统的结构和参数，而振幅 A 和相角 φ 都是依赖于初始状态的量，一旦系统受到扰动，A、φ 的值都会发生变化，原来的周期运动便不能保持，即这个周期运动不具有稳定性。对于非线性系统，在没有外作用时，系统中完全有可能发生一定频率和振幅的稳定的周期运动，如图 1.2 所示。这个周期运动在物理上是可以实现的，通常把它称为自激振荡，简称自振。在有的非线性系统中，还可能存在多个振幅和频率都不相同的自激振荡。自振问题的研究是非线性系统的重要内容之一。

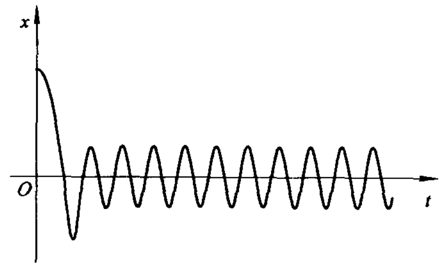


图 1.2　非线性系统的自激振荡

(4) 正弦激励响应。在线性系统中，当输入量是正弦信号时，输出稳态分量也是同频率的正弦函数，并且输出的稳态分量和输入信号仅在幅值和相角上有所不同，因此利用这一特点，可以引入频率特性的概念并用它来表示系统固有的动态特性。

非线性系统在正弦信号作用下的输出比较复杂，下面分几个方面来说明。

① 跳跃谐振和多值响应。研究下列达芬方程的强迫振动情况：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega_0^2x+\varepsilon x^3=F\cos(\omega t+\delta) \tag{1.11}$$

为了简便起见，外加信号有一初始相角 δ。设上述方程的解为 $A\cos(\omega t)$，A 是待定的振幅。把 $A\cos(\omega t)$ 代入式(1.11)，并略去 $\cos(3\omega t)$ 项，可得输出振幅 A 与频率 ω 的关系式为

$$(\omega_0^2-\omega^2)A+\frac{3}{4}\varepsilon A^3=F\cos(\delta)$$

$$2nA\omega=F\sin(\delta)$$

或

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)A+\frac{3}{4}\varepsilon A^3\right]^2+(2nA\omega)^2=F^2 \tag{1.12}$$

固定输入振幅 F 不变，由上式可以得到如图 1.3 所示的频率响应曲线($\varepsilon>0$)。当外作用的频率从图 1.3 中响应曲线上点 1 所对应的频率开始增大时，振幅值也随着增大，直到点 2；若频率继续增高，将引起振幅从点 2 到点 3 的突跳现象；当频率再进一步增高时，振幅沿着曲线从点 3 到点 4 变化。若反向改变频率，即从高频开始降低频率，振幅将沿着 4→3→5 变化，在点 5 处发生突变跳到点 6，接着随着频率的降低从点 6 趋向于点 1。这种振幅随着频率的改变出现突变的现象称为跳跃谐振。在图 1.3 中我们可以看到，对于 ω' 和 ω'' 之间的每个频率，都对应于三个振幅值，不过点 2 到点 5 之间对应的振荡是不稳定的，因此一个频率对应了两个稳定的振荡。这种现象称为多值响应现象。