与普通高中现行教材配套

淘宝e线

导学精练

本册主编 / 肖述友

湖北省28所名校联袂推出

数学

高一

(下)

DAOXUE JINGLIAN

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

DAOXUE
JINGLIAN

与普通高中现行教材配套

导学精练

数学

高一

（下）

本册主编/肖述友

副 主 编/冯　刚　谢加海

编　　委/（以姓氏笔画为序）

文昌明　冯　刚　李　兵　李学斌

肖述友　吴祥成　邹振斌　肖小权

郭　松　胡　煜　谢加海　熊　炜

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

导学精练．数学．高一．下/《导学精练》编委会编．—武汉：武汉大学出版社，2006.12

ISBN 7-307-05313-6

Ⅰ.导…　Ⅱ.导…　Ⅲ.数学课—高中—习题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 135425 号

责任编辑：郭志安　　　　版式设计：杜　枚

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北日报报业集团楚天印务公司

开本：880×1230　1/16　印张：6.5　字数：292 千字

版次：2006 年 12 月第 1 版　　2006 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-05313-6/G·897　　定价：11.80 元

DAOXUE JINGLIAN

出版前言

“惟楚有才，于斯为盛”，历年来，湖北省高考成绩始终为全国“鹤冠”。

自湖北省高考自主命题改革开始，武汉大学出版社按照全日制普通高中教学大纲和考试大纲要求，组织了湖北省28所重点高中近200名特、高级教师编写了《导学精练》高中同步系列与高考总复习系列丛书。该丛书覆盖了高中各学习阶段与各复习进程的各个科目，栏目新颖、版式美观、体例科学、目标清晰、讲解透彻、题量适中、解题灵活，真正体现了名师“导学”、学生“精练”的理念。《导学精练》将揭示高考高升学率的奥秘。

《导学精练》高中同步系列设如下栏目：

新课导学——把本章（或单元）的内容提纲挈领地串起来。即名师认为的“串珍珠”。

目标导航——简明扼要地列出学习本节（或框）的内容后应达到的目标。即名师认为的“指方向”。

知识梳理——把本节（或框）的全部知识概括性地总结复习。即名师认为的“放电影”。

名师点拨——对本节（或框）中的重点、难点、疑点，由老师给出启发性的阐释。即名师认为的“捉虱子”。

典例解析——针对本节（或框）中的学习内容，选择典型例子或经典考题进行解答与分析，起到举一反三的作用。即名师认为的“示范工程”。

同步精练——按基础、综合、拓展的层次，精选适量的练习题提供给学生解答，达到巩固所学知识、拓展学生思维的目的。即名师认为的“深耕细作”。

本章（单元）知识回顾——对本章（或单元）的知识点进行归纳，形成知识结构图或表格描述。即名师认为的“神经网络”。

本章（单元）检测题——精心设计了一套全面反映本章（或单元）所学内容的综合试题，检查测试学生学习的效果，以达到进一步提升的目的。即名师认为的“好钢是炼出来的”。

另外，书中还编写了期中测试题、期末测试题各一套。全书的所有练习题、检测题与测试题，在书后都给出了详尽的解答。

《导学精练》面向中等以上成绩的学生使用。

在本丛书即将付梓之时，我们感谢省教育厅、省教育考试院专家的指导，感谢各地市教研院、各县教研室领导的支持，感谢华师一附中、武汉外国语学校、水果湖高级中学、武钢三中、武汉市第二中学、武汉市第六中学、武昌实验中学、黄陂第一中学、黄冈中学、荆州中学、沙市三中、潜江中学、孝感市高级中学、鄂南高级中学、襄樊市第四中学、仙桃中学、荆门市第一中学、天门中学、监利一中、洪湖市第一中学、公安县第一中学、江陵县第一中学、松滋县第一中学、石首市第一中学、赤壁市一中、黄石市二中、宜昌市一中、随州市一中等28所重点中学编写老师的辛勤劳动，我们也感谢武汉鸣凤文化传播有限公司全体员工的大力协助。他们的鼎力支持，使这套丛书具有了权威性、前瞻性、科学性、实用性、新颖性与互动性。我们衷心期望《导学精练》使所有学生的成绩更上一层楼，在高考中实现心中的理想。

本丛书虽经老师多次修改、出版社三审三校一通读一质检，但肯定仍会有疏漏之处，我们诚恳地希望各位老师和同学谅解。也希望各位老师和同学能发现问题，指出编校错误，我们将竭尽全力使《导学精练》充实、完善、提高。

我们与您同行，共同承袭湖北高考的传奇！

《导学精练》编委会

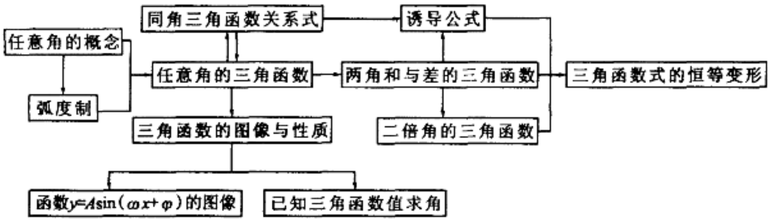
2006年8月20日

Contents

目 录

第四章 三角函数

新课导学



一、任意角的三角函数

4.1 角的概念的推广

知识梳理

1. 角的有关概念

(1)角的概念:角可以看成由一条射线绕着它的端点旋转而成的图形.

(2)正角、负角、零角.

逆时针旋转形成的角叫正角,顺时针旋转形成的角叫负角.一条射线没有做任何旋转形成的角叫零角.

(3)象限角、坐标轴角.

①若角的终边在第几象限,就称这个角是第几象限角.

②若角的终边在坐标轴上,就称其为坐标轴角.

(4)终边相同的角.

若α、β的终边相同,则α、β为终边相同的角.

2. 与角α终边相同的角

$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in \mathbf{Z})$.

注意:(1)$k\in\mathbf{Z}$;(2)α是任意角;(3)终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同.终边相同的角有无限多个,它们相差360°的整数倍.

名师点拨

1. 掌握象限角的概念及判定方法,如第二象限角的集合可以写成$\{\alpha|k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 注意区分下列角:(1)小于90°的角:$\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$;(2)锐角:$\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$;(3)第一象限角:$\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

3. 将终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来,并能通过数形结合来理解角的表示.

典例解析

【例1】 下列八个命题中,真命题有(　　)

①角的概念推广后,角的取值范围是$[-360^\circ,360^\circ]$;

②时间经过3小时,时针转的角是90°;

③如果α的终边在第四象限,则α是负角;

④如果α的终边在第一象限,则α是正角;

⑤若α是锐角,则α的终边在第一象限;

⑥若α的终边在第二象限,则α是钝角;

⑦小于90°的角一定是锐角;

⑧大于90°的角一定是钝角.

A. 8个　　B. 0个　　C. 1个　　D. 4个

解析 强化角的有关概念.(1)角的正、负由旋转方向确定,而角的绝对值的大小则由旋转的次数以及终边所在的位置来确定.故①②③④中没有真命题.

(2)区分 锐角$\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$,钝角$\{\alpha|90^\circ<\alpha<180^\circ\}$,小于90°的角$\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$,第一象限角$\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$,第二象限角$\{\alpha|k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.所以⑤⑥⑦⑧中真命题为⑤.

答案 C

点评 角的概念的推广是整章的基础,与之有关的各类角概念要明晰,含义要清楚.

【例2】 在0°~360°间,求出与下列各角终边相同的角,

并判断下列各角是哪个象限的角(　　)

(1)$-100°12'$　(2)$670°23'$　(3)$-900°34'$

解析　(1)$-100°12'=-360°+259°48'$,则 $259°48'$为所求,因它是第三象限角,从而$-100°12'$也是第三象限角.

(2)$670°23'=360°+310°23'$,则 $310°23'$为所求角,因它是第四象限角,从而 $670°23'$也是第四象限角.

(3)$-900°34'=-3\times360°+179°26'$,则 $179°26'$为所求,因它是第二象限角,从而$-900°34'$也是第二象限角.

点评　在 $0°\sim360°$找寻终边相同的角,主要应用终边相同的角公式:$\beta=\alpha+k\cdot360°$,而必须要注意的是 $k\in\mathbf{Z}$,此时 $\alpha\in[0°,360°)$.可借助竖式除法来求解.

【例 3】　(1)写出终边在 x 轴上的角的集合.

(2)写出终边在 y 轴上的角的集合.

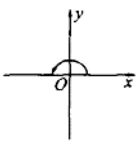
(3)写出终边在坐标轴上角的集合.

(4)写出终边在第一、二、三、四象限角平分线上的角的集合.

解析　方法一　(1)终边在 x 轴的正半轴上角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,终边在 x 轴的负半轴上角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

故终边在 x 轴上角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

方法二

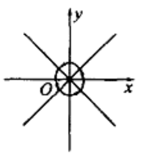


从旋转角度出发,符合条件的 x 正半轴上的角旋转 $180°$,可得符合条件的 x 负半轴上角,再旋转 $180°$后所得角也符合条件,即周期为 $180°$,将 $0°$看做起始角.则有$\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+0°,n\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$.

(2)终边在 y 轴上角的集合为$\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

(3)终边在坐标轴上角的集合为$\{\alpha|\alpha=n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

(4)



起始角看做 $45°$,周期为 $90°$.故符合条件的角的集合为$\{\alpha|\alpha=n\cdot90°+45°,n\in\mathbf{Z}\}$.

点评　(1)能熟练运用集合语言来表述终边相同的角.(2)当所求的为终边落在某条直线上的角的集合时,可以与周期性联系起来.

【例 4】　已知 α 是第二象限角,试求:(1)$\frac{\alpha}{2}$所在象限,(2)2α所在象限,(3)$\frac{\alpha}{3}$所在象限,(4)$-\alpha$ 所在象限.

解析　$\because$ α 是第二象限角,

$\therefore$ $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$.

(1)$k\cdot180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数,令 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$,则

$n\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°,n\in\mathbf{Z}$,

即$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

当 k 为奇数,令 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则

$n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°,n\in\mathbf{Z}$,

即$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角.

故$\frac{\alpha}{2}$是第一、三象限角.

(2)$k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°,k\in\mathbf{Z}$,

则 2α 是第三、四象限角或终边在 y 轴负半轴上.

(3)$k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°,k\in\mathbf{Z}$.

方法一　令 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$,则

$k\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°,n\in\mathbf{Z}$.

令 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$,则

$n\cdot360°+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°,n\in\mathbf{Z}$.

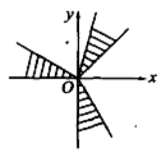
令 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$,则

$n\cdot360°+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°,n\in\mathbf{Z}$.

故$\frac{\alpha}{3}$是第一、二、四象限角.

方法二　取特殊值,令 $k=0、1、2$,可判断$\frac{\alpha}{3}$为第一、二、四象限角.

方法三　利用坐标系来判断,借助周期性可知,旋转 $120°$可得符合条件的角.

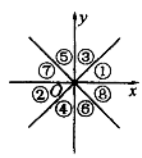


故$\frac{\alpha}{3}$为第一、二、四象限角.

(4)$-k\cdot360°-90°<-\alpha<-k\cdot360°-180°,k\in\mathbf{Z}$

故$-\alpha$ 为第三象限角.

点评　(1)倍、半角所在象限的判断,要非常熟悉.



α 为第一象限角时,$\frac{\alpha}{2}$终边在①、②区域.

α 为第二象限角时,$\frac{\alpha}{2}$终边在③、④区域.

α 为第三象限角时,$\frac{\alpha}{2}$终边在⑤、⑥区域.

α 为第四象限角时,$\frac{\alpha}{2}$终边在⑦、⑧区域.

(2)判断倍、半角以及$\frac{\alpha}{3}$等角的终边位置时，常借助坐标系，用图形表示更直观.

【例 5】 在直角坐标系中，①α与β的终边关于x轴对称，则$\alpha+\beta=$______；②α与β的终边关于y轴对称，则$\alpha+\beta=$______；③α与β的终边关于原点对称，则$\alpha-\beta=$______.

解析 当α与β的终边关于x轴对称时，设$\alpha=k_1\cdot 360^\circ+\gamma, k_1\in \mathbf{Z}, \beta=k_2\cdot 360^\circ-\gamma, k_2\in \mathbf{Z}$.

$\therefore \alpha+\beta=(k_1+k_2)\cdot 360^\circ=k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

同理②$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

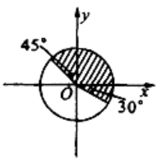
③$\alpha-\beta=(2k-1)\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

点评 α、β的设法中，k_1、k_2可以不相同.

同步精练

一、选择题

1. 若角α和β互余，则用α表示与β终边相同的角的集合是(　　)
   A. $\{\gamma|\gamma=2k\pi+\alpha, k\in \mathbf{Z}\}$
   B. $\{\gamma|\gamma=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha, k\in \mathbf{Z}\}$
   C. $\{\gamma|\gamma=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha, k\in \mathbf{Z}\}$
   D. $\{\gamma|\gamma=2k\pi\pm\alpha, k\in \mathbf{Z}\}$
2. 设集合$W=\{$锐角$\}$，$X=\{$第一象限角$\}$，$Y=\{$小于90°的角$\}$，则W、X、Y的关系是(　　)
   A. $W=X=Y$　　B. $W\subsetneqq X\subsetneqq Y$
   C. $X\cap Y=W$　　D. $W\subsetneqq(X\cap Y)$
3. 已知2α的终边在x轴上方，那么α是(　　)
   A. 第一象限角　　B. 第一、二象限角
   C. 第一、三象限角　　D. 第一、四象限角
4. 若α为第四象限角，则$180^\circ-\alpha$是(　　)
   A. 第一象限角　　B. 第二象限角
   C. 第三象限角　　D. 第四象限角
5. 如图，终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合是(　　)



   A. $\{\alpha|-30^\circ\leqslant\alpha\leqslant 135^\circ\}$
   B. $\{\alpha|135^\circ\leqslant\alpha\leqslant 330^\circ\}$
   C. $\{\alpha|k\cdot 360-30^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360^\circ+135^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
   D. $\{\alpha|k\cdot 360+135^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360^\circ+330^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
6. 若角α、β的终边互为反向延长线，则有(　　)
   A. $\alpha=(2k+1)\cdot 180^\circ+\beta$
   B. $\alpha=-k\cdot 360^\circ+\beta$
   C. $\alpha=180^\circ+\beta$
   D. $\alpha=-\beta$
7. 在直角坐标系中，若α、β的终边互相垂直，则α、β之间的关系是(　　)
   A. $\beta=\alpha+90^\circ$
   B. $\beta=k\cdot 360^\circ+90^\circ+\alpha(k\in \mathbf{Z})$
   C. $\beta=\alpha\pm 90^\circ$
   D. $\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha\pm 90^\circ(k\in \mathbf{Z})$

二、填空题

8. 若角α的终边经过点$P(1,\sqrt{3})$，则角α的集合$A=$________.
9. 若将时钟拨快10分钟，则时针转了____度，分针转了____度.
10. 若锐角α的终边与它的10倍角的终边相同，则$\alpha=$______.
11. 已知α为锐角，5α的终边落在y轴上，则$\alpha=$______.

三、解答题

12. 在$(-720^\circ,720^\circ)$内，分别找出与3000°，$-800^\circ19'$终边相同的角.
13. 设α的终边与240°的终边关于y轴对称，$\beta=\frac{\alpha}{2}$且β在$(360^\circ,720^\circ)$之间，求β.
14. 已知：α是第一象限角，β是第三象限角，求$\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$、2α、$\frac{\beta}{2}$的范围，并指出终边在第几象限.

4.2 弧度制

知识梳理

1. 弧:圆上任意两点间的部分叫弧.

2. 1 弧度的角:长度等于半径长的弧所对的圆心角.

了解弧度制引进的意义,由于弧度制,使“角”与“实数”之间建立了一一对应关系,从而为三角函数的应用奠定了基础.

3. (1)弧长公式:$l=|\alpha|r$

(2)扇形面积公式:$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

4. 角度制与弧度制的互化:

$360^\circ=2\pi$(弧度)　$180^\circ=\pi$(弧度)

1 弧度 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$　$1^\circ=\frac{\pi}{180}$(弧度)

5. 记住特殊角的弧度制表示,有利于提高解题速度:

角度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

名师点拨

1. 理解弧度的意义,与角度对比后应明确:

(1)无论以“弧度”还是以“度”为单位,角的大小都是一个与半径大小无关的定值,只是单位不同.

(2)1 弧度是等于半径长的弧所对的圆心角的大小;1°是圆的$\frac{1}{360}$所对的圆心角的大小.

2. 弧度与角度的换算要以 $180^\circ=\pi$(弧度)为基础进行,以“弧度”为单位度量角时,“弧度”两字可以省略不写,做题时单位必须统一.

3. 弧长公式及扇形面积公式中的$|\alpha|$是圆心角的弧度数的绝对值. $S=\frac{1}{2}lr$ 类似于三角形面积公式$\frac{1}{2}\times$底$\times$高.

典例解析

【例 1】 (1)将 $67^\circ30'$化成弧度;

(2)将$\frac{3}{5}\pi$ 化成度;

(3)将 3rad 化成度.

解析 以 $180^\circ=\pi$ 为基础进行换算.

(1)$67^\circ30'=67.5^\circ=\frac{3\pi}{8}$;

(2)108°;(3)$171.90'$.

点评 (1)角度与弧度的换算以 $180^\circ=\pi$ 为基础,角度表示角的大小时,必须有单位“度”;弧度表示角的大小时,可以不写单位“弧度”. 例如:$\sin2^\circ$与 $\sin2$.

(2)用弧度表示角时,常用 π 表示,此时不必将 π 表示成小数.

【例 2】 比较大小:

$\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3},\tan\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$.

解析 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\frac{\pi}{3}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$,

$\tan\frac{\pi}{4}=\tan45^\circ=1$,

$\frac{\pi}{3}>1$.

故 $\cos\frac{\pi}{3}<\sin\frac{\pi}{3}<\tan\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}$.

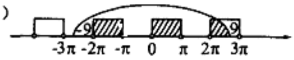
点评 熟悉特殊角的弧度制表示.

【例 3】 (1)若集合 $A=\{x|2k\pi<x<(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{x|-9\leqslant x\leqslant9\}$,则 $A\cap B=$________.

(2)若 $\alpha=-3.5$(rad),$\beta=1.575$(rad),则 α 是第________象限角,β 是第________象限角.

解析 将角与实数一一对应,此时 $\pi\approx3.142$.

(1)



$A\cap B=\{x|-2\pi<x<-\pi$ 或 $0<x<\pi$ 或 $2\pi<x\leqslant9\}$.

(2)$\because -\frac{3\pi}{2}<-3.5<-\pi$,$\therefore\ \alpha=-3.5$ 为第二象限角.

同理,$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,$\therefore\beta$ 为第二象限角.

点评 弧度制将角与实数一一对应,且使角与其三角函数值的单位统一起来,为后面的学习带来方便.

【例 4】 已知圆上的一段弧长等于该圆的内接正方形的边长,求这段弧所对的圆周角的弧度数.

解析 设内接正方形的边长为 a,圆的半径为 R,则 $2R=\sqrt{2}a$.

$\therefore$ 弧所对的圆心角 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 该弧所对的圆周角的弧度数为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 5】 在半径为 R 的圆内,周长为 $4R$ 的扇形的中心角是多少弧度?该扇形的面积是多少?该扇形所含最大弓形(以原扇形弧为弓形弧)的面积为多少?

解析 设扇形弧长为 l,中心角为 α,则

$$l=2R,\alpha=\frac{l}{R}=2.$$

$$S_{扇}=\frac{1}{2}lR=R^2.$$

$$S_{弓}=S_{扇}-S_{\triangle}=R^2-R^2\cdot\sin1\cos1$$

点评 扇形的面积公式以及弧长公式中,用弧度更为简洁.

【例 6】 扇形的周长为定值 $C(C>0)$,问该扇形具有怎样

的中心角时面积最大？

解析　设半径为 r，中心角为 α，扇形面积为 S，则 $l+2r=C$.

$S=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}(C-2r)\cdot r=-(r-\frac{C}{4})^2+\frac{C^2}{16}$.

当 $r=\frac{C}{4}$ 时，$S_{max}=\frac{C^2}{16}$.

此时 $\alpha=2$，$S_{max}=\frac{C^2}{16}$.

同步精练

一、选择题

1. 终边相同的角是(　　)

A. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{2}$　$(k\in \mathbf{Z})$

B. $\frac{k\pi}{3}$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{3}$　$(k\in \mathbf{Z})$

C. $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$　$(k\in \mathbf{Z})$

D. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k\pm1)\pi$　$(k\in \mathbf{Z})$

2. 下列关系中，正确的是(　　)

A. $\sin1>\sin1^\circ$　　B. $\sin1<\sin1^\circ$

C. $\sin1=\sin1^\circ$　　D. $\pi=\pi^\circ$

3. 集合 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in \mathbf{Z}\right\}\cap\{\alpha|-\pi<\alpha<\pi\}$ 为(　　)

A. $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$　　B. $\left\{-\frac{7\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\right\}$

C. $\left\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10},\frac{4\pi}{5},-\frac{7\pi}{10}\right\}$　　D. $\left\{\frac{3\pi}{10},-\frac{7\pi}{10}\right\}$

4. 圆的一条弧长等于这个圆的内接正三角形的一条边长，那么这条弧所对圆心角的弧度数是(　　)

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知扇形的周长为 6cm，面积为 2cm^2，则扇形的中心角的弧度数为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 1 或 3　　D. 1 或 4

6. 已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\pi,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|-4\leqslant\beta\leqslant4\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

C. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$　　D. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

7. $\alpha=-3$，则 α 的终边在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

二、填空题

8. $\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=$________.

9. 若 θ 是第二象限角，则 $\pi-\theta$ 是第______象限角.

10. 一个正常的时钟，自零点开始到分针与时针再一次重合，分针所转过的角的弧度数是________.

11. 一个半径为 r 的扇形，若它的周长等于它所在半圆的长，那么扇形的面积是________.

12. 已知 $4\pi<\alpha<6\pi$，且角 α 与角 $-\frac{2\pi}{3}$ 的终边垂直，则 $\alpha=$______.

三、解答题

13. (1) 在 $(-4\pi,4\pi)$ 内，分别找出与 $\frac{49}{3}\pi$，$-\frac{59}{7}\pi$ 终边相同的角.

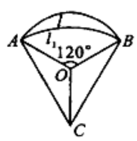
(2) 已知 $\alpha=1690^\circ$，将 α 写成 $2k\pi+\beta$ 的形式 $(k\in \mathbf{Z},0<\beta<2\pi)$，并在 $(-4\pi,4\pi)$ 内找出与 α 终边相同的角.

14. 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，写出 $\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$、2α、$2\alpha+\beta$，$2\alpha-\beta$ 所在的范围.

15. 如图，C 为扇形 AOB 外一点，$\angle AOB=120^\circ$，$AC=BC$，$OA=OC=R$，以 BC 为半径作扇形 ACB（且 O 点在扇形内）.

(1) 试比较两个扇形所对的弧长的大小.

(2) 求两个扇形的面积.



4.3 任意角的三角函数

知识梳理

1. 任意角的三角函数的定义

设 α 是一个任意大小的角 α，α 的终边上任意一点 $P(x,y)$（除端点外）与原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}(r>0)$. 则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\qquad \cot\alpha=\frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

由定义可知：

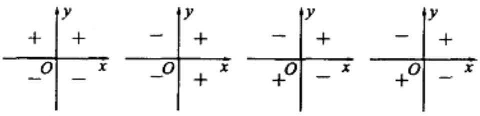
(1) $|\sin\alpha|=\left|\frac{y}{r}\right|\leqslant1$；$|\cos\alpha|=\left|\frac{x}{r}\right|\leqslant1$；

(2) $|\sec\alpha|\geqslant|\tan\alpha|\geqslant|\sin\alpha|$，

$|\csc\alpha|\geqslant|\cot\alpha|\geqslant|\cos\alpha|$.

2. 各个不同象限中三角函数的符号

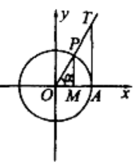
用口诀记忆“一全正，二正弦，三两切，四余弦”.



sin α　　cos α　　tan α　　cot α

3. 三角函数线

可利用与单位圆有关的有向线段，将三角函数值分别用几何形式表示出来.



设 $P(x,y)$ 是角 α 的终边与单位圆的交点. 过 P 作 $PM\perp OA$ 于 M 点. A 的坐标为 $(1,0)$，T 为圆的切线 AT 与角 α 的终边（或终边反向延长线）的交点. 则

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\tan\alpha=AT$.

三角函数线若过原点，则以原点为起点；若不过原点，则以与坐标轴的交点为起点.

4. 三角函数的定义域

$y=\sin x$. $\{x|x\in\mathbf{R}\}$

$y=\cos x$. $\{x|x\in\mathbf{R}\}$

$y=\tan x$. $\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

$y=\cot x$. $\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

5. 诱导公式

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$　$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$　$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

终边相同的角的同名三角函数值相同.

名师点拨

1. 三角函数的值是一个比值，这个比值的大小与 $P(x,y)$ 在终边上所处的位置无关，而由 $\angle\alpha$ 的终边位置所决定，只与角的大小有关. 若 P 的坐标含字母，则要用到分类讨论的思想.

2. 用单位圆中的有向线段分别表示正弦、余弦、正切值时，一定要注意有向线段的书写方向. 利用单位圆解三角不等式时，要用到数形结合的思想.

3. 由三角函数的定义可知，终边相同的角的同名三角函数值相等，但两个角的某个同名三角函数值相等时，它的终边位置不一定相同.

典例解析

【例1】 角 α 的顶点与坐标原点重合，其始边与 x 轴的正半轴重合.

(1) 若角 α 的终边上有一点 $P(a,-2a)(a\neq0)$，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$.

(2) 已知角 α 的终边上一点 $P(-2,y)(y\neq0)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，求 $\cos\alpha$、$\tan\alpha$.

解析 紧扣三角函数的定义解题.

(1) $r=\sqrt{a^2+(-2a)^2}=\sqrt{5}|a|$.

当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{-2a}{\sqrt{5}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-2$，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\cot\alpha=-\frac{1}{2}.$$

当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-2$，

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\cot\alpha=-\frac{1}{2}.$$

(2) 由 $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，得 $y=\pm2$.

当 $y=2$ 时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=-1$.

当 $y=-2$ 时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=1$.

点评 当坐标中含字母时，注意分类讨论.

【例2】 (1) 确定下列三角函数的符号：

①$\sin(-1000^\circ)$，②$\cos4$，③$\tan\left(\frac{11\pi}{7}\right)$，④$\cot\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$.

(2) 已知 θ 是第二象限角，①确定 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 符号. ②确定 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$ 的符号.

解析 先确定角所在象限，再据符号法则判断符号.

(1) ① $-1000^\circ=-1080^\circ+80^\circ$.

∴ -1000° 为第一象限角.

∴ $\sin(-1000^\circ)>0$.

同理②$\cos4<0$，③$\tan\left(\frac{11\pi}{7}\right)<0$，④$\cot\left(-\frac{8\pi}{3}\right)>0$.

(2) ① $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$.

② ∵ θ 为第二象限角，

$\therefore$ $0<\sin\theta<1, -1<\cos\theta<0$.

$\therefore$ $\sin(\cos\theta)<0, \cos(\sin\theta)>0$.

故 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)<0$.

点评　(2)②中 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 分别为第四象限、第一象限的角. 参照物不同,所处位置也不同.

【例 3】　确定下列函数的定义域.

(1) $y=\lg(\tan x\cdot\cos x)$;

(2) $y=\dfrac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{\sin x}}{\lg(2\cos x+4)}$;

(3) $y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{25-x^2}$.

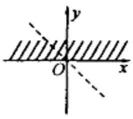
解析　(1)由题意知: $\tan x\cdot\cos x>0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ x 为第一、二象限角.

$\therefore$ 定义域为

$\left\{x\,\middle|\,2k\pi<x<2k\pi+\pi, 且\ x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由题意知: $\begin{cases} x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, \\ \qquad\qquad\qquad (k\in\mathbf{Z}). \\ 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi \end{cases}$



解得　$2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$, 且 $x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$.

故 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi, 且\ x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\begin{cases} -5\leqslant x\leqslant 5, \\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$\therefore$ $x\in\left[-5,-\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},5\right](k\in\mathbf{Z})$.

点评　求交集,可借助图形或数轴表示角的范围.

【例 4】　计算:

(1) $\dfrac{\sin 330^\circ\cdot\tan\left(-\frac{13\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\cdot\cot 690^\circ}$;

(2) $\sqrt{1+2\tan\left(-\frac{43}{6}\pi\right)+\tan^2\left(-\frac{43\pi}{6}\right)}$;

(3) $\sqrt{\tan^2\left(-\frac{23\pi}{6}\right)+\cot^2\left(-\frac{23}{6}\pi\right)-2}$.

解析　利用诱导公式将角化至 $0\sim 2\pi$ 范围内,再求解之.

(1)原式 $=\dfrac{\sin(360^\circ-30^\circ)\cdot\tan\left(-4\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-4\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\cot(720^\circ-30^\circ)}$

$=\dfrac{\sin(-30^\circ)\cdot\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cot(-30^\circ)}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3})}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)原式 $=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)原式 $=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

点评　将角化至 $0\sim 2\pi$ 之间,要运用化归的思想方法.

【例 5】　若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,证明

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$;

(2) $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

解析　用定义与三角函数线为工具实施证明过程.

(1)设 $P(x,y)$ 为角 α 终边上任意一点,它与原点的距离为 $r(r>0)$.

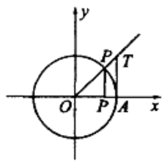
由 $\sin\alpha=\frac{y}{r}, \cos\alpha=\frac{x}{r}$,得

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{x+y}{r}.$$

$\because$ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $x>0, y>0$.

$\therefore$ $x+y>r$. $\therefore$ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

(2)如图,连接 AP,设 $\triangle APO$ 的面积为 $S_{\triangle APO}$,扇形 OAP 的面积为 $S_{扇}$, $\triangle OAT$ 面积为 $S_{\triangle OAT}$.



$\because$ $S_{\triangle OAP}<S_{扇}<S_{\triangle OAT}$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}OA\cdot MP<\frac{1}{2}OA\cdot\overparen{AP}<\frac{1}{2}OA\cdot AT$,

$\therefore$ $MP<\overparen{AP}<AT$.

即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

点评　三角函数线是利用数形结合思想解决有关问题的重要工具,如能善于应用它,则会起到事半功倍的作用.

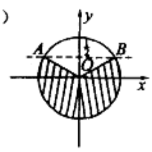
【例 6】　利用单位圆中的三角函数线,确定下列各角的取值范围.

(1) $-1\leqslant\sin\theta<\frac{1}{2}$;　　(2) $\cos\theta\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\tan\theta>1$.

解析　用三角函数线为工具来解不等式.

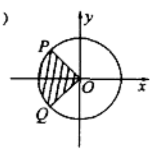
(1)



OA、OB 分别为角 $-\frac{7\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 的终边所在位置,

$\therefore$ $2k\pi-\frac{7\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$

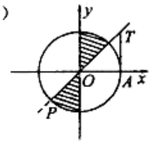
(2)



OP、OQ 分别为 $\frac{5\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$ 的终边所在位置,

$\therefore$ $2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

(3)



OT、OP 分别为 $\frac{\pi}{4}$、$\frac{5\pi}{4}$ 的终边所在位置，

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

点评　运用三角函数线作工具，从数形结合的角度来解三角不等式，非常直观、简捷.

同步精练

一、选择题

1. 若角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合，且 $\sin\alpha<0$，又 $P(m,n)$ 是 α 终边上一点，且 $|OP|=\sqrt{10}$，则 $m-n=$(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

2. 若角 α 和 β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的范围是(　　)

A. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$　　B. $-\pi<\alpha-\beta<0$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$　　D. $0<\alpha-\beta<\pi$

3. 下面说法正确的是(　　)

①第二象限角大于第一象限角. ②若 $\sin\alpha=\sin\beta$，必有 α 与 β 终边重合. ③若 α、β 都是第二象限角，那么，若 $\alpha>\beta$，必有 $\sin\alpha>\sin\beta$. ④若 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 为角 β 终边上的一点，那么有 $\sin\beta=\sin\alpha$，$\cos\beta=\cos\alpha$.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

4. 设 $0°\leqslant x\leqslant 360°$，使 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，且 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 同时成立的 x 值是(　　)

A. $30°\leqslant x\leqslant 150°$　　B. $30°\leqslant x\leqslant 315°$

C. $150°\leqslant x\leqslant 315°$　　D. $45°\leqslant x\leqslant 150°$

5. 若 α 是第一象限角，则点 $\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ 所在象限是(　　)

A. 第一象限　　B. 第一象限或第二象限

C. 第一象限或第三象限　　D. 不确定

6. 函数 $y=\frac{|\sec x|}{\sec x}+\frac{|\csc x|}{\csc x}+\frac{|\tan x|}{\tan x}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是(　　)

A. $\{4,-2\}$　　B. $\{-2,0,4\}$

C. $\{-2,0,2,4\}$　　D. $\{-4,-2,0,2,4\}$

7. 使 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$ 成立的角 α 的集合可表示为(　　)

A. $\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\pi<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

8. 函数 $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$ 的定义域是(　　)

A. $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$

B. $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$

C. $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

D. $\mathbf{R}$

二、填空题

9. 角 α 的终边经过点 $P(-4m,3m)$，且 $m<0$，则 $\sin\alpha+2\cot\alpha=$________.

10. $a^2\cos2\pi-b^2\cdot\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\csc\frac{\pi}{2}=$________.

11. 当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$\sqrt{2}+2\cos x\geqslant 0$ 的角 x 的取值范围是____________.

12. 已知集合 $M=\{\alpha|\sin\alpha>\cos\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，$N=\{\alpha|\sin\alpha<\tan\alpha\}$，则 $M\cap N=$____________.

13. $\cos\frac{17\pi}{4}-\tan(-\frac{11\pi}{6})=$________.

三、解答题

14. 已知 $\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}+\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}+\frac{\cot\alpha}{|\cot\alpha|}=0$，试确定 $\sin(\cos\alpha)\cdot\tan\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ 的符号.

15. 若角 α 的终边在射线 $y=kx(y\geqslant 0,k\neq 0)$ 上，求角 α 的六个三角函数值.

16. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\lg[\tan(\cos x)]$;

(2)$y=\sqrt{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sqrt{\sin x}$.

4.4　同角三角函数的关系式

知识梳理

1. 同角三角函数的关系式

(1)平方关系:

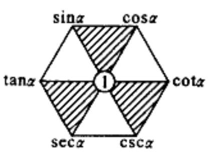
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

(2)商数关系:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(3)倒数关系:

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\qquad\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$$
$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$



注:记忆是必要的,但不是目的,真正目的是为了不记.要准确需理解记忆,要熟练则多用勤思.

故而要先从理解三角函数概念入手认识同角关系,而后采用多种方法总结.可以用六边形记忆法:对角线为倒数关系,阴影三角形顶点为平方关系,相邻三顶点为商数关系.

2. 同角三角函数关系式在以下三方面的应用

(1)已知一个角的一个三角函数值,求同角的其他三角函数值.

(2)化简三角函数式.化简的一般要求是:①尽量使函数的种类最少,项数最少,次数最低.②尽量使分母不含三角函数式.③根号内的三角函数式尽量开出来.④能求出数值的一般应计算出来.

(3)三角恒等式的证明.掌握"1 的特殊变形"、"切割化弦"等常见化繁为简的手段.

名师点拨

1. 同角的三角函数关系式的应用非常广泛,要学会公式的正用、逆用、变用.

2. 在已知某任意角的一个三角函数值求其他三角函数值时,蕴含着分类讨论、整体代换等数学思想方法.

3. 在化简和证明恒等式这两类题型中,蕴含着等价转换、化归等重要的数学思想方法,因此通过三角函数式的化简与证明要体会这些数学思想方法.

典例解析

【例 1】 (1)已知 $\cot\alpha=2$,求其他三角函数值.

(2)已知 $\cot\alpha=m(m\neq0)$,求其他三角函数值.

解析　(1)因 $\cot\alpha=2>0$,所以 α 为第一、三象限角.

当 α 为第一象限角时,

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\csc\alpha=\sqrt{5},\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sec\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

同理,α 为第三象限角时,

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\csc\alpha=-\sqrt{5},\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$
$$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\sec\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(2)$\tan\alpha=\frac{1}{m},\csc^2\alpha=1+m^2$.

当 α 为第一、二象限角时,

$$\csc\alpha=\sqrt{1+m^2},\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}},$$
$$\sec\alpha=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

当 α 为第三、四象限角时,

$$\csc\alpha=-\sqrt{1+m^2},\ \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},$$
$$\cos\alpha=\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}},\ \sec\alpha=\frac{\sqrt{1+m^2}}{-m}.$$

点评　已知角 α 的某一三角函数值,求 α 的其余 5 种三角函数值时,要注意公式的合理选择,一般思路是按"倒、平、倒、商、倒"的顺序求解,特别要注意开方时的符号选取.另外也可利用常见的勾股数并再判断符号即得.

【例 2】 已知 $\tan\alpha=2$,求下列各式的值.

(1)$\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$;

(2)$\frac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}$;

(3) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$.

解析 (1)同除以 $\cos\alpha$,得

$$原式=\frac{3\tan\alpha-2}{2\tan\alpha+1}=\frac{4}{5}.$$

(2)同除以 $\cos^2\alpha$,

$$原式=\frac{2\tan^2\alpha+\tan\alpha+1}{4\tan^2\alpha-3}=\frac{11}{13}.$$

(3)原式 $=\cos^2\alpha(\tan^2\alpha-2\tan\alpha+4)$

$$=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}=\frac{4}{5}.$$

点评 在已知 $\tan\alpha$ 的值求关于 $\sin x$、$\cos x$ 的齐次分式或二次齐次整式时,可将求值式变为关于 $\tan x$ 的式子.

【例3】 已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{60}{169}\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\tan\theta$ 的值.

解析 注意平方关系的应用.

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{60}{169}\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,可得

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{17}{13},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{13}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\frac{12}{13},\\ \cos\theta=\frac{5}{13}.\end{cases}$$

点评 学会利用方程思想及整体代换的思想解三角函数题,对于 $\sin\theta+\cos\theta$、$\sin\theta\cdot\cos\theta$、$\sin\theta-\cos\theta$ 这三个式子,已知其中一个式子的值,其余两式的值可以求出.

【例4】 求证:

(1) $\cot\alpha-\tan\alpha=\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}$;

(2) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

解析 注意分析等式两边的式子结构与三角函数符号之间的差别,证明过程就是缩小差别的过程.

常用方法:

①从一边开始证得它等于另一边,一般由繁到简.

②证明左、右两边都等于同一式子(值).

③证明与原等式等价的式子成立.

(1)方法一 ∵左边 $=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=$ 右边.

∴ 等式成立.

方法二 右边 $=\frac{2\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cot\alpha-\tan\alpha=$ 右边.

∴ 等式成立.

(2)左边 $=\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)-\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

要证: $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ 成立,

也就是要证:

$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2(1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$.

即要证: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 成立.

上式显然成立,故原等式成立.

点评 证明三角恒等式的过程,实际上是"化异为同"的过程.在解题过程中,要全面理解"繁"与"简"的关系.将异角化为同角,以减少角的数目,将不同名的三角函数化为同名三角函数,以减少函数的数目,"1 的特殊转换"、"化切为弦"等都是化繁为简的手段,在三角题的证明中存在着广泛的应用.当然证明三角恒等式的方法是多样的,需自己用心体会.

【例5】 (1)已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$,求证: $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

(2)已知: $\tan^2\theta=\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\tan\gamma}\right)^2$,

求证: $\sec^2\theta=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\right)^2$.

解析 比较条件式与所证式之间的异同,尽可能用最简洁的方式缩小差距.

(1)由 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$ 可得:

$$1+\tan^2\alpha=2(1+\tan^2\beta),$$

$$\sec^2\alpha=2\sec^2\beta.$$

∴ $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha$,故 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

(2)由已知得: $1+\tan^2\theta=\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\tan\gamma}\right)^2+1$,

∴ $\sec^2\theta=\frac{\sin^2\alpha}{\tan^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\tan^2\gamma}+1$.

$\sec^2\theta=\sin^2\alpha\cdot\cot^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cot^2\gamma+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$,

∴ $\sec^2\theta=\sin^2\alpha(1+\cot^2\beta)+\cos^2\alpha(1+\cot^2\gamma)$.

故 $\sec^2\theta=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\right)^2$.

点评 条件恒等式的证明关键在于如何巧用条件等式.至于切化弦,何时用 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,何时用 $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$,$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$,必须视题目条件而定,要用心体会.

【例6】 化简下列各式:

(1) $\frac{\sqrt{1-2\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ}}{\sin20^\circ-\sqrt{1-\sin^2 20}}$;

(2) $\frac{\tan x+\tan x\cdot\sin x}{\tan x+\sin x}\cdot\frac{1+\sec x}{1+\csc x}$;

(3) $\frac{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{1-\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}$.

解析 (1)原式 $=\frac{|\sin20^\circ-\cos20^\circ|}{\sin20^\circ-\cos20^\circ}=-1$.

(2)原式 $=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1+\sin x)}{\sin x\cdot(\sec x+1)}\cdot\frac{1+\sec x}{1+\frac{1}{\sin x}}=\tan x$.

(3)原式 $=\frac{(1+\cos^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-\sin^6\alpha}$

$=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)}$