

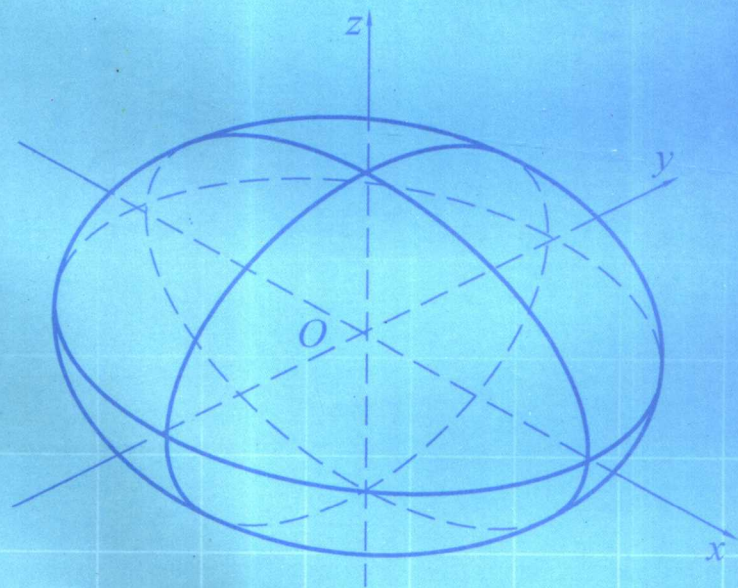
21世纪大学数学丛书

高等数学

上册

ADVANCED MATHEMATICS

田立新 主编



江苏大学出版社

21 世纪大学数学丛书

高等数学

上册

主 编 田立新

编 者 (按姓氏笔画为序)

王文初 王学弟 田立新

叶惠民 李医民 姚洪兴

蔡国梁

江苏大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/田立新主编. —镇江:江苏大学出版社,2007.9

(21 世纪大学数学丛书)

ISBN 978-7-81130-000-0

I. 高… II. 田… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 137786 号

高等数学 上册

主 编/田立新

责任编辑/吴明新 徐云峰

出版发行/江苏大学出版社

地 址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)

电 话/0511-84446662

排 版/镇江文苑制版印刷有限责任公司

印 刷/丹阳市兴华印刷厂

经 销/江苏省新华书店

开 本/787mm×960mm 1/16

印 张/23.375

字 数/430 千字

版 次/2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷

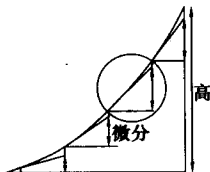
书 号/ISBN 978-7-81130-000-0

定 价/25.00 元

本书如有印装错误请与本社发行部联系调换

序

江苏是教育强省(例如据统计江苏籍院士约占两院院士的 25%),江苏大学则是其最高学府之一,座落在名城镇江,拥有焦山、金山、北固山、南山,得天独厚,令人神往.我讲这山那山,因为微积分来自登山:每登山一步就做了一次微分,登到山顶便做完积分.请看下面的登山图:



以图代文,以看代想,这里山坡的一小段(弯的)换成了切线段(直的),则登山一步所测出的切线高度

$$\text{微分} = (\text{起点斜率}) \cdot (\text{底}),$$

所以说每登山一步就做了一次微分.但是用微分高代替真高时含有测量误差,即

$$\text{真高} = \text{微分高} + \text{测量误差}.$$

问题来了:这个测量误差有多小?能不能保证它尽量小?其实这个测量误差不是别的,它就是切线到曲线的一段距离.什么是切线呢?既然它是在起点附近最靠近曲线的那一根直线,那么它要比其他直线(割线)到曲线的距离小得多,写成

$$\frac{\text{切线测量误差}}{\text{割线测量误差}} \ll 1,$$

简单些,将分母换成小底,得 $\text{相对误差} = \frac{\text{切线测量误差}}{\text{底}} \ll 1,$

$$\text{相对误差} = \frac{\text{测量误差}}{\text{底}} = \frac{\text{真高}}{\text{底}} - \frac{\text{微分}}{\text{底}} = \tan \theta - \tan \theta_0 \rightarrow 0.$$

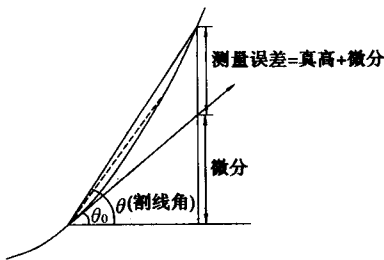
下面利用切线的相对误差来推导基本定理,只用两行:

总高 = 微分之和 + 总误差,

总误差 = 测量误差之和 = (相对误差 × 底)之和 ≤ (最大相对误差)(底之和).

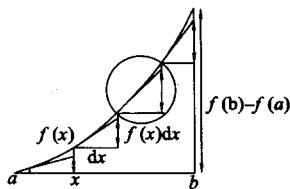
如果最大相对误差 $\ll 1$,便有总误差 $\ll 1$,当小到可以忽略,便有理想的等式,即基本定理 总高 = 微分之积分.

所以说登到山顶便做完积分,这就是基本定理既直观又严格的白话证明,只用



到切线或微分的整体性质(最大相对误差)以及两行算术,不用其他准备知识、各种符号和巧妙繁长的证明.

虽然用白话证明微积分的基本定理是可能的,但是遇到更复杂的泰勒展开定理就有点棘手了,无论如何需要用函数语言.如果山底的分割节点 x 由 a 跑到 b ,山坡表述为 $f(x)$,山坡上的斜率(称为一阶导数)表述为 $f'(x)$,微分表述为 $f'(x)dx$ (dx 为节点 x 附近的



示意图

变量),那么基本定理表述为 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

由此直接推出泰勒展开式,它只是机械地反复使用基本公式.

$$\text{常数逼近} \quad f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(s)ds; \approx h \text{upper}_{[x, x+h]} |f'|;$$

$$\begin{aligned} \text{一次逼近} \quad f(x+h) - f(x) - hf'(x) &= \int_x^{x+h} [f'(s_2) - f'(x)]ds_2 = \\ &= \int_x^{x+h} \int_x^{s_2} f''(s_1)ds_1 ds_2; \approx \text{upper}_{[x, x+h]} |f''| \int_x^{x+h} \int_x^{s_2} ds_1 ds_2 = \frac{h^2}{2} \text{upper}_{[x, x+h]} |f''|; \end{aligned}$$

二次逼近

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) &= \int_x^{x+h} \int_x^{s_2} [f''(s_2) - f''(x)]ds_2 ds_3 = \\ &= \int_x^{x+h} \int_x^{s_2} \int_x^{s_3} f'''(s_1)ds_1 ds_2 ds_3; \approx \text{upper}_{[x, x+h]} |f'''| \int_x^{x+h} \int_x^{s_2} \int_x^{s_3} ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{h^3}{3!} \text{upper}_{[x, x+h]} |f'''|; \end{aligned}$$

$$\text{三次逼近} \quad f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x); \approx \frac{h^4}{4!} \text{upper}_{[x, x+h]} |f^{(4)}|;$$

等等,这里用到高阶导数(f'' , f''' , ...),并采用了缩写 $a; \approx b$ 表示 $|a| \leq b$. 这是具有累次积分余项的泰勒定理,这个证明最为简单(不用人为地分部积分).

以上是一元函数微积分中两个最重要,也是最难的定理.以此为核心,本书讲解了无穷级数、常微分方程、空间解析几何和多元函数微积分,顺序自然,表述清楚.全书习题适中,每章附有本章小结,配有自我检测题及复习题,这对于学生的学习总结、复习巩固、自我检测、提高综合水平非常有益.

本书是江苏大学数学系的几位教师,根据 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求,按照自身多年的教学实践,结合工院校学科人才培养总体要求和教学特点编写而成.相信本书的出版能体现高等数学 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的精神,促进高等数学教学改革,通过教学中的因材施教,提高高等数学的教学水平.

中国科学院
数学与系统科学研究院

二〇〇七年八月二十日

前 言

21 世纪大学数学丛书之一《高等数学》是根据教育部提出的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见,作为教育科学“十五”国家规划课题“新世纪工科数学教育改革及创新人才培养”项目(19-106-53)的研究成果,并结合多年高等数学课程教学改革的实践编写的一本教材。

全书分为上、下两册.上册包括一元函数微积分学、无穷级数,下册包括常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学等.各章节配有习题,同时由本章小结给出各章主要内容和基本要求,各章的自我检测题、复习题便于学生检测和提高,各章的复习题中有些具有一定难度,教师可根据学生的实际情况选用.为了更好地与中学知识衔接和使用本书,书末附有二阶和三阶行列式简介、常用曲线和曲面、积分表和习题参考答案.

在本书编写工作中力求做到讲解数学内容的同时,加强对学生应用能力的培养,结合基本概念、基本定理和基本方法的介绍,考虑到实际应用的背景,注重学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.在一元函数微积分后给出无穷级数、常微分方程、空间解析几何,这样的编排更加强了对多元函数微积分学应用背景的学习及认识.考虑到全书的系统性及深度,书中部分标 * 号的内容,在教学中,根据实际情况,作为拓宽学生高等数学知识面的需要,教师可选讲或不讲.

全书共 13 章,第 1 章函数与极限、第 2 章导数与微分,由王文初编写;第 3 章微分学基本定理、第 4 章微分学应用,由田立新编写;第 5 章不定积分、第 6 章定积分,由李医民编写;第 7 章定积分的应用、第 10 章向量代数与空间解析几何,由蔡国梁编写;第 8 章无穷级数、第 9 章常微分方程,由叶惠民编写;第 11 章多元函数微分法及其应用、第 12 章重积分,由姚洪兴编写;第 13 章曲线积分与曲面积分,由王学弟编写;附录由王学弟整理.全书由田立新、王文初、叶惠民统稿.徐民京教授对全书进行了审阅,做了很多有益的修改,江苏大学数学系教师丁丹平、孙梅、丁娟在本书编写过程中始终给予关注并参与审阅,范兴华、刘恂、殷久利、张剑梅、陈

燕、施晓峰、钱骁勇、赵桃艳、房厚庆等教师为本书润色和修正,提出了许多宝贵意见,李益清、倪华、高安娜等教师对全书的习题及参考答案进行了仔细检查及验证,汤养老师和数学系研究生于水猛、徐俊、李兴光、邸丛颖、周维怀、孟伟业、张广英等也为本书做了不少有益的工作.在本书出版之际,我们衷心感谢多年来一直关心、帮助、支持我们这本书出版的各位老师和学生.本书在编写过程中,参考了众多的高等数学方面的教材;在出版过程中,得到了江苏大学出版社领导的大力支持和帮助,责任编辑吴明新、徐云峰为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动,在此一并致以谢意.

限于编写时间仓促,本书不妥与错误之处在所难免,恳请专家、同行和读者批评指正.

编者
2007.8



目 录

1 函数与极限	(1)
1.1 函数	(1)
1.1.1 集合与映射	(1)
1.1.2 变量与函数的概念	(5)
1.1.3 函数的性质	(8)
1.1.4 反函数	(10)
1.1.5 函数的复合与复合函数	(12)
1.1.6 函数的四则运算	(13)
1.1.7 初等函数	(15)
1.1.8 双曲函数与反双曲函数	(16)
习题 1-1	(18)
1.2 极限	(20)
1.2.1 数列的极限及其性质	(20)
1.2.2 函数的极限及其性质	(26)
1.2.3 极限运算法则	(32)
1.2.4 极限存在准则 两个重要极限	(35)
1.2.5 无穷小与无穷大	(40)
习题 1-2	(45)
1.3 函数的连续性和间断点	(47)
1.3.1 函数的连续性	(47)
1.3.2 函数的间断点及其分类	(50)
1.3.3 连续函数的运算	(51)
1.3.4 初等函数的连续性	(54)
1.3.5 闭区间上连续函数的性质	(55)
1.3.6 一致连续性的概念	(57)
习题 1-3	(59)
本章小结	(60)
自我检测题 1	(61)
复习题 1	(62)
2 导数与微分	(63)
2.1 导数的概念	(63)
2.1.1 引例	(63)



2.1.2 导数的定义	(65)
2.1.3 导数的几何意义	(69)
2.1.4 函数的可导性与连续性的关系	(69)
习题 2-1	(70)
2.2 函数的求导方法 初等函数的导数	(71)
2.2.1 几个基本初等函数的导数公式	(71)
2.2.2 函数的和、差、积、商的求导法则	(72)
2.2.3 反函数求导法则	(74)
2.2.4 复合函数求导法则	(76)
2.2.5 隐函数求导法	(79)
2.2.6 取对数求导法	(81)
2.2.7 由参数方程所确定的函数的求导法	(82)
2.2.8 由极坐标方程所表示的函数的导数	(84)
2.2.9 相关变化率	(85)
习题 2-2	(87)
2.3 高阶导数	(88)
2.3.1 高阶导数的概念	(88)
2.3.2 高阶导数的四则运算及莱布尼兹公式	(92)
习题 2-3	(93)
2.4 微分	(94)
2.4.1 微分的概念与存在的条件	(94)
2.4.2 微分的几何意义	(96)
2.4.3 微分法则	(97)
2.4.4 微分的应用举例	(99)
习题 2-4	(102)
本章小结	(103)
自我检测题 2	(104)
复习题 2	(105)
3 微分学基本定理	(107)
3.1 微分学三个基本定理	(107)
3.1.1 费马(Fermat)引理	(107)
3.1.2 罗尔定理	(108)
3.1.3 拉格朗日中值定理	(110)
3.1.4 柯西定理	(112)
习题 3-1	(114)
3.2 泰勒公式	(115)
习题 3-2	(118)
本章小结	(118)
自我检测题 3	(119)

复习题 3	(120)
4 微分学应用	(121)
4.1 未定式求极限	(121)
4.1.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	(121)
4.1.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(123)
4.1.3 其他未定式	(124)
习题 4-1	(127)
4.2 函数的单调性和极值	(128)
4.2.1 函数的单调性	(128)
4.2.2 函数的极值	(130)
4.2.3 最大值和最小值问题	(133)
习题 4-2	(135)
4.3 曲线的凹凸性和拐点	(137)
习题 4-3	(141)
4.4 函数图形的描绘	(141)
4.4.1 曲线的渐近线	(141)
4.4.2 函数图形的描绘	(142)
习题 4-4	(144)
4.5 曲率	(145)
4.5.1 弧微分	(145)
4.5.2 曲率的计算公式	(146)
4.5.3 曲率圆	(148)
习题 4-5	(149)
* 4.6 方程的近似解	(149)
4.6.1 二分法	(150)
4.6.2 切线法	(151)
* 习题 4-6	(152)
本章小结	(152)
自我检测题 4	(154)
复习题 4	(155)
5 不定积分	(156)
5.1 不定积分	(156)
5.1.1 原函数	(156)
5.1.2 不定积分的概念	(157)
5.1.3 基本积分表	(158)
5.1.4 基本积分运算法则	(160)



习题 5-1	(162)
5.2 换元积分法	(162)
5.2.1 第一换元法(凑微分法)	(163)
5.2.2 第二换元法	(167)
习题 5-2	(170)
5.3 分部积分法	(171)
习题 5-3	(176)
5.4 有理函数的不定积分	(176)
5.4.1 有理函数的不定积分	(177)
5.4.2 三角函数有理式的积分	(180)
5.4.3 简单无理函数的积分	(181)
习题 5-4	(183)
5.5 积分表的使用	(183)
本章小结	(185)
自我检测题 5	(187)
复习题 5	(188)
6 定积分	(190)
6.1 定积分的概念	(190)
6.1.1 引例	(190)
6.1.2 定积分的概念	(192)
习题 6-1	(194)
6.2 定积分的性质	(194)
习题 6-2	(198)
6.3 微积分基本定理	(199)
6.3.1 积分上限的函数及其导数	(200)
6.3.2 牛顿-莱布尼兹公式	(201)
习题 6-3	(204)
6.4 定积分的换元法与分部积分法	(205)
6.4.1 定积分的换元法	(205)
6.4.2 定积分的分部积分法	(209)
习题 6-4	(212)
6.5 反常积分	(213)
6.5.1 无穷限的反常积分	(213)
6.5.2 无界函数的反常积分	(215)
习题 6-5	(218)
* 6.6 反常积分的审敛法 Γ 函数	(218)
6.6.1 无穷限反常积分的审敛法	(218)



6.6.2 无界函数的反常积分的审敛法	(221)
6.6.3 Γ (Gamma)函数	(223)
* 习题 6-6	(225)
本章小结	(225)
自我检测题 6	(227)
复习题 6	(228)
7 定积分的应用	(230)
7.1 定积分的元素法	(230)
7.2 定积分在几何方面的应用	(232)
7.2.1 平面图形的面积	(232)
7.2.2 体积	(235)
7.2.3 平面曲线的弧长	(237)
习题 7-2	(239)
7.3 定积分在物理及其他方面的应用	(240)
7.3.1 变力沿直线所做的功	(240)
7.3.2 液体的压力	(242)
7.3.3 引力	(242)
7.3.4 平均值和均方根	(243)
习题 7-3	(245)
本章小结	(246)
自我检测题 7	(247)
复习题 7	(247)
8 无穷级数	(249)
8.1 常数项级数的概念与性质	(250)
8.1.1 常数项级数的概念 几何级数 调和级数	(250)
8.1.2 常数项级数的性质	(253)
* 8.1.3 级数收敛的柯西(Cauchy)充要条件	(256)
习题 8-1	(257)
8.2 正项级数	(258)
8.2.1 正项级数的基本性质	(258)
8.2.2 正项级数的比较审敛法	(260)
8.2.3 正项级数的比值审敛法	(263)
8.2.4 正项级数的根值审敛法	(266)
习题 8-2	(269)
8.3 任意项级数	(269)
8.3.1 交错级数与莱布尼兹审敛法	(269)
8.3.2 任意项级数及绝对值审敛法	(271)



8.3.3 绝对收敛级数的性质	(273)
习题 8-3	(276)
8.4 幂级数	(276)
8.4.1 函数项级数	(276)
8.4.2 幂级数与幂级数的收敛区间	(277)
8.4.3 幂级数的代数性质与解析性质	(283)
习题 8-4	(286)
8.5 函数展开为幂级数及幂级数的若干应用	(287)
8.5.1 泰勒级数	(287)
8.5.2 函数展开成幂级数的方法	(289)
8.5.3 幂级数的若干应用	(294)
8.5.4 欧拉公式	(296)
习题 8-5	(297)
* 8.6 函数项级数的一致收敛性	(298)
8.6.1 一致收敛的概念	(298)
8.6.2 函数项级数一致收敛的审敛法	(301)
8.6.3 一致收敛级数的解析性质	(303)
8.6.4 幂级数的一致收敛性	(306)
* 习题 8-6	(309)
8.7 傅里叶级数	(310)
8.7.1 三角函数系的正交性及三角级数	(310)
8.7.2 傅里叶级数的收敛性定理	(312)
8.7.3 周期函数展开成傅里叶级数	(313)
8.7.4 奇延拓和偶延拓	(317)
* 8.7.5 傅里叶级数的复数形式	(320)
习题 8-7	(322)
本章小结	(323)
自我检测题 8	(325)
复习题 8	(325)
附录 1 二阶和三阶行列式简介	(327)
附录 2 常用曲线和曲面	(330)
附录 3 积分表	(334)
习题参考答案	(343)
参考文献	(362)



1 函数与极限

高等数学与初等数学有很大的区别,初等数学研究的量大多是不变的量(常量),而高等数学研究的量是变化的量(变量),以变量之间的依赖关系即函数关系为基本研究对象,以极限为工具,深刻地揭示变量间的变化规律。

本章将介绍映射、函数、极限与函数的连续性等概念,以及它们的一些性质,本章内容是微积分的基础知识。

1.1 函数

1.1.1 集合与映射

1) 集合及其运算

集合是现代数学中一个基本的概念.集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体,集合简称集,组成集合的每一个对象称为该集合的元素,简称元。

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 表示集合,小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 表示集合的元素,若 x 是集合 A 的元素,则称 x 属于 A ,记作 $x \in A$;若 x 不是集合 A 的元素,则说 x 不属于 A ,记作 $x \notin A$ 或 $x \notin A$ 。

表示集合的方法通常有两种:一种是列举法,即把集合的全体元素一一列举出来表示,称为可列(或可数)集,例如,由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A ,记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

这里 n 可以是有限数,如全校一年级学生的全体,也可以无限增大,如自然数的全体.另一种是描述法,如果集合 B 由具有某种特性的元素 x 的全体所组成,记作

$$B = \{x | x \text{ 具有的特征}\}.$$

例如,集合 M 是由满足 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ 的全体 x 组成的,记作

$$M = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}.$$

由有限个元素组成的集合称为有限集;由无穷多个元素组成的集合称为无限集,一个无限集,如果其元素可用自然数编号,就是可列(或可数)集。

平面上过某个定点的直线全体,能够被 3 整除的自然数的全体等都是无限



集,且后者为可列集.

通常用 N 表示非负整数(自然数)集,即

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

对于数集,有时在表示数集的字母的右上角标上“*”表示该数集内去掉 0 以后的集合,在右上角标上“+”表示该数集内去掉 0 和负数以后的集合,例如用 N^+ 表示正整数集,即

$$N^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\};$$

用 Z 表示整数集,即

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\};$$

用 Q 表示有理数集,即

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$$

用 R 表示实数集;用 C 表示复数集.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

设 A, B 是两个集合,若 A 的每个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 对于任一集合 A ,因为 $\emptyset \subset A$, $A \subset A$,所以 $\emptyset, A$ 都是集合 A 的子集.

若两个集合 A, B 满足: $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的真子集.

集合有下列几种基本运算:

设 A, B 为两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A \setminus B$,即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\};$$

假设考虑的集合是更大集合 I 的子集,则称 I 为全集或基本集,其他所研究的集合都是 I 的子集,称差集 $I \setminus A$ 为 A 在 I 中的余集或补集,记作 A^c ,即

$$A^c = I \setminus A = \{x \mid x \in I \text{ 但 } x \notin A, A \subset I\}.$$

集合的运算,可如图 1-1 直观表示(图中阴影部分为运算结果).

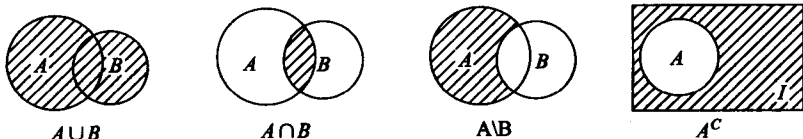


图 1-1



集合的运算有下列性质:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$
- (2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$
- (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$
- (4) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A;$
- (5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A;$
- (6) 对偶律(或称德·摩根律)
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

高等数学中最常用的一类数集是区间,介于两个实数间的全体实数构成的数集称为区间,这两个实数称为区间的端点,两端点间的距离称为区间的长度,一般有如下几种区间:

设 a 和 b 都是实数,数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间,记作 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点;数集

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点;类似地有

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

称为左开右闭区间;

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

称为左闭右开区间.

以上区间都称为有限区间,数 $b-a$ 为区间的长度.此外还有无限区间(或称无穷区间),引入记号 $+\infty$ (读作正无穷大), $-\infty$ (读作负无穷大),则可类似地表示无限区间:

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x | a < x < +\infty\}, \\ (-\infty, b) &= \{x | -\infty < x < b\}, \\ [a, +\infty) &= \{x | a \leq x < +\infty\}, \\ (-\infty, b] &= \{x | -\infty < x \leq b\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$



在不需要考虑区间的具体形式时,简单地称它为“区间”,并且常用 I 表示.

邻域是今后常用的概念,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

对于任意的正数 δ ,开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,也简称点 a 的邻域, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = \{x | |x - a| < \delta\},$$

所以 $U(a, \delta)$ 表示与 a 的距离小于 δ 的一切 x 的全体.

在 $U(a, \delta)$ 中去掉邻域中心 a 后的集合,称为点 a 的去心 δ 邻域. 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

为了使用上的方便,有时把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

xOy 平面上的这个矩形区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a, b]$ 和闭区间 $[c, d]$.

2) 映射

定义 1 设 X, Y 是两个非空集合,若存在一个法则 f ,使得对 X 中每个元素 x ,按法则 f ,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f: X \rightarrow Y.$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像,并记作 $f(x)$,即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D(f)$,即 $D(f) = X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 $W(f)$ 或 $f(X)$,即

$$W(f) = f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

设 f 是从 X 到 Y 的映射,若 $W(f) = Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某一元素的像,则称 f 是从 X 到 Y 的满射;若对于 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

例如, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对任一 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ 是一个映射,但不是单射,也不是满射,其值域 $W(f) = f(\mathbf{R}) = \{y | y \geq 0\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集;

而 $f: \mathbf{R} \rightarrow Y, Y = \{y | |y| \leq 1\}$, 对任一 $x \in \mathbf{R}$, $y = f(x) = \sin x$ 是一个满射,但