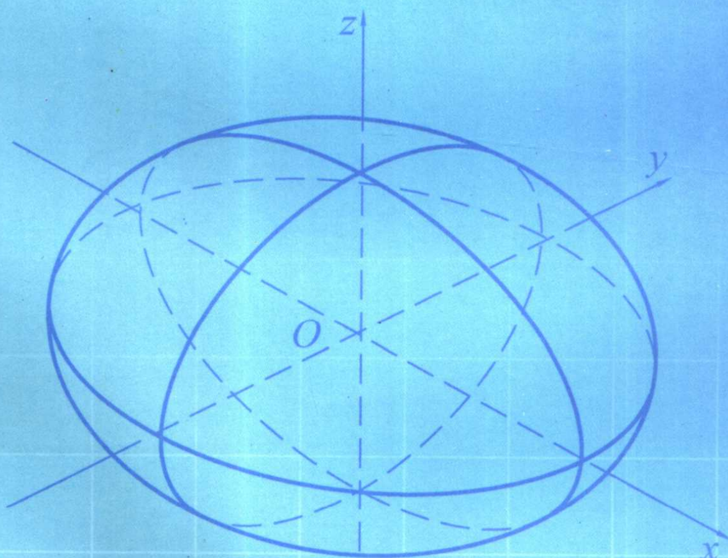
～21世纪大学数学丛书～

高等数学 上册

ADVANCED MATHEMATICS

田立新 主编



江苏大学出版社

21 世纪大学数学丛书

高等数学

上册

主　编　田立新
编　者　(按姓氏笔画为序)
王文初　王学弟　田立新
叶惠民　李医民　姚洪兴
蔡国梁

江苏大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/田立新主编.—镇江:江苏大学出版社,2007.9
(21世纪大学数学丛书)
ISBN 978-7-81130-000-0

Ⅰ.高… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.O13

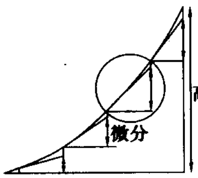
中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第137786号

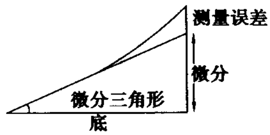
高等数学 上册

主　　编/田立新
责任编辑/吴明新　徐云峰
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷30号(邮编:212003)
电　　话/0511-84446662
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787mm×960mm　1/16
印　　张/23.375
字　　数/430千字
版　　次/2007年9月第1版　2007年9月第1次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-000-0
定　　价/25.00元

序

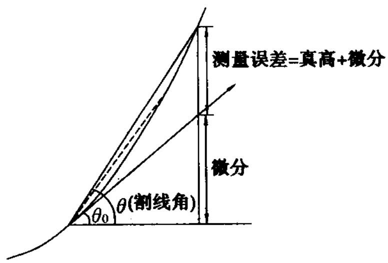
江苏是教育强省(例如据统计江苏籍院士约占两院院士的25%),江苏大学则是其最高学府之一,座落在名城镇江,拥有焦山、金山、北固山、南山,得天独厚,令人神往.我讲这山那山,因为微积分来自登山:每登山一步就做了一次微分,登到山顶便做完积分.请看下面的登山图:





以图代文,以看代想,这里山坡的一小段(弯的)换成了切线段(直的),则登山一步所测出的切线高度

$$微分=(起点斜率)\cdot(底),$$



所以说每登山一步就做了一次微分.但是用微分高代替真高时含有测量误差,即

$$真高=微分高+测量误差.$$

问题来了:这个测量误差有多小?能不能保证它尽量小?其实这个测量误差不是别的,它就是切线到曲线的一段距离.什么是切线呢?既然它是在起点附近最靠近曲线的那一根直线,那么它要比其他直线(割线)到曲线的距离小得多,写成

$$\frac{切线测量误差}{割线测量误差}\ll 1,$$

简单些,将分母换成小底,得 $相对误差=\dfrac{切线测量误差}{底}\ll 1,$

$$相对误差=\frac{测量误差}{底}=\frac{真高}{底}-\frac{微分}{底}=\tan\theta-\tan\theta_0\to 0.$$

下面利用切线的相对误差来推导基本定理,只用两行:

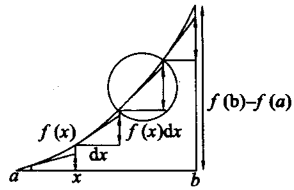
总高=微分之和+总误差,

总误差=测量误差之和=(相对误差×底)之和≤(最大相对误差)(底之和).

如果最大相对误差≪1,便有总误差≪1,当小到可以忽略,便有理想的等式,即基本定理　总高=微分之积分.

所以说登到山顶便做完积分,这就是基本定理既直观又严格的白话证明,只用

到切线或微分的整体性质(最大相对误差)以及两行算术,不用其他准备知识、各种符号和巧妙繁长的证明.



示意图

虽然用白话证明微积分的基本定理是可能的,但是遇到更复杂的泰勒展开定理就有点棘手了,无论如何需要用函数语言.如果山底的分割节点 x 由 a 跑到 b,山坡表述为 $f(x)$,山坡上的斜率(称为一阶导数)表述为$f'(x)$,微分表述为 $f'(x)\mathrm{d}x$($\mathrm{d}x$ 为节点 x 附近的变量),那么基本定理表述为 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$

由此直接推出泰勒展开式,它只是机械地反复使用基本公式.

常数逼近 $f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(s)\mathrm{d}s:\approx h\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f'|$;

一次逼近 $f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\int_x^{x+h}[f'(s_2)-f'(x)]\mathrm{d}s_2=$

$$\int_x^{x+h}\int_x^{s_2} f''(s_1)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2:\approx\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f''|\int_x^{x+h}\int_x^{s_2}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2=\frac{h^2}{2}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f''|;$$

二次逼近

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)=\int_x^{x+h}\int_x^{s_3}[f''(s_2)-f''(x)]\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=$$

$$\int_x^{x+h}\int_x^{s_3}\int_x^{s_2} f'''(s_1)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3:\approx\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f'''|\int_x^{x+h}\int_x^{s_3}\int_x^{s_2}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=\frac{h^3}{3!}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f'''|;$$

三次逼近 $f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x):\approx\frac{h^4}{4!}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}}|f^{(4)}|$;

等等,这里用到高阶导数(f'',f''',…),并采用了缩写 $a:\approx b$ 表示 $|a|\leqslant b$.这是具有累次积分余项的泰勒定理,这个证明最为简单(不用人为地分部积分).

以上是一元函数微积分中两个最重要,也是最难的定理.以此为核心,本书讲解了无穷级数、常微分方程、空间解析几何和多元函数微积分,顺序自然,表述清楚.全书习题适中,每章附有本章小结,配有自我检测题及复习题,这对于学生的学习总结、复习巩固、自我检测、提高综合水平非常有益.

本书是江苏大学数学系的几位教师,根据21世纪教学内容和课程体系改革的要求,按照自身多年的教学实践,结合工科院校学科人才培养总体要求和教学特点编写而成.相信本书的出版能体现高等数学21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神,促进高等数学教学改革,通过教学中的因材施教,提高高等数学的教学水平.

中国科学院
数学与系统科学研究院

二〇〇七年八月二十日

前　言

21 世纪大学数学丛书之一《高等数学》是根据教育部提出的"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"的精神，参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见，作为教育科学"十五"国家规划课题"新世纪工科数学教育改革及创新人才培养"项目(19－106－53)的研究成果，并结合多年高等数学课程教学改革的实践编写的一本教材.

全书分为上、下两册. 上册包括一元函数微积分学、无穷级数，下册包括常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学等. 各章节配有习题，同时由本章小结给出各章主要内容和基本要求，各章的自我检测题、复习题便于学生检测和提高，各章的复习题中有些具有一定难度，教师可根据学生的实际情况选用. 为了更好地与中学知识衔接和使用本书，书末附有二阶和三阶行列式简介、常用曲线和曲面、积分表和习题参考答案.

在本书编写工作中力求做到讲解数学内容的同时，加强对学生应用能力的培养，结合基本概念、基本定理和基本方法的介绍，考虑到实际应用的背景，注重学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力. 在一元函数微积分后给出无穷级数、常微分方程、空间解析几何，这样的编排更加强了对多元函数微积分学应用背景的学习及认识. 考虑到全书的系统性及深度，书中部分标 * 号的内容，在教学中，根据实际情况，作为拓宽学生高等数学知识面的需要，教师可选讲或不讲.

全书共 13 章，第 1 章函数与极限、第 2 章导数与微分，由王文初编写；第 3 章微分学基本定理、第 4 章微分学应用，由田立新编写；第 5 章不定积分、第 6 章定积分，由李医民编写；第 7 章定积分的应用、第 10 章向量代数与空间解析几何，由蔡国梁编写；第 8 章无穷级数、第 9 章常微分方程，由叶惠民编写；第 11 章多元函数微分法及其应用、第 12 章重积分，由姚洪兴编写；第 13 章曲线积分与曲面积分，由王学弟编写；附录由王学弟整理. 全书由田立新、王文初、叶惠民统稿. 徐民京教授对全书进行了审阅，做了很多有益的修改，江苏大学数学系教师丁丹平、孙梅、丁娟在本书编写过程中始终给予关注并参与审阅，范兴华、刘恂、殷久利、张剑梅、陈

燕、施晓峰、钱骁勇、赵桃艳、房厚庆等教师为本书润色和修正，提出了许多宝贵意见，李益清、倪华、高安娜等教师对全书的习题及参考答案进行了仔细检查及验证，汤养老师和数学系研究生于水猛、徐俊、李兴光、邸丛颖、周维怀、孟伟业、张广英等也为本书做了不少有益的工作.在本书出版之际，我们衷心感谢多年来一直关心、帮助、支持我们这本书出版的各位老师和学生.本书在编写过程中，参考了众多的高等数学方面的教材；在出版过程中，得到了江苏大学出版社领导的大力支持和帮助，责任编辑吴明新、徐云峰为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动，在此一并致以谢意.

限于编写时间仓促，本书不妥与错误之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编 者

2007.8

目　录

1 函数与极限

高等数学与初等数学有很大的区别，初等数学研究的量大多是不变的量（常量），而高等数学研究的量是变化的量（变量），以变量之间的依赖关系即函数关系为基本研究对象，以极限为工具，深刻地揭示变量间的变化规律.

本章将介绍映射、函数、极限与函数的连续性等概念，以及它们的一些性质，本章内容是微积分的基础知识.

1.1 函　数

1.1.1 集合与映射

1) 集合及其运算

集合是现代数学中一个基本的概念.集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体，集合简称集，组成集合的每一个对象称为该集合的元素，简称元.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素，若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A，记作 $x\overline{\in} A$ 或 $x\notin A$.

表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，即把集合的全体元素一一列举出来表示，称为可列（或可数）集，例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

这里 n 可以是有限数，如全校一年级学生的全体，也可以无限增大，如自然数的全体.另一种是描述法，如果集合 B 由具有某种特性的元素 x 的全体所组成，记作

$$B=\{x|x\text{ 具有的特征}\}.$$

例如，集合 M 是由满足 $x^2-4x+3\geqslant0$ 的全体 x 组成的，记作

$$M=\{x|x^2-4x+3\geqslant0\}.$$

由有限个元素组成的集合称为有限集；由无穷多个元素组成的集合称为无限集，一个无限集，如果其元素可用自然数编号，就是可列（或可数）集.

平面上过某个定点的直线全体，能够被 3 整除的自然数的全体等都是无限

集，且后者为可列集.

通常用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数（自然数）集，即

$$\mathbf{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}.$$

对于数集，有时在表示数集的字母的右上角标上“$*$”表示该数集内去掉 0 以后的集合，在右上角标上“$+$”表示该数集内去掉 0 和负数以后的集合，例如用 $\mathbf{N}^{+}$ 表示正整数集，即

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\};$$

用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，即

$$\mathbf{Z}=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm n,\ \cdots\};$$

用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}^{+},\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\};$$

用 $\mathbf{R}$ 表示实数集；用 $\mathbf{C}$ 表示复数集.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

设 A,B 是两个集合，若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 对于任一集合 A，因为 $\varnothing\subset A$, $A\subset A$，所以 $\varnothing$, A 都是集合 A 的子集.

若两个集合 A,B 满足：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集.

集合有下列几种基本运算：

设 A,B 为两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

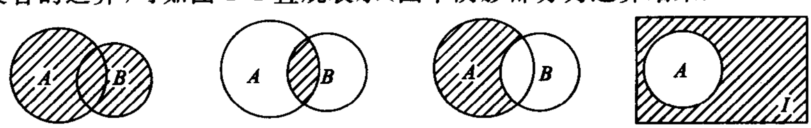
由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\};$$

假设考虑的集合是更大集合 I 的子集，则称 I 为全集或基本集，其他所研究的集合都是 I 的子集，称差集 $I\backslash A$ 为 A 在 I 中的余集或补集，记作 A^{C}，即

$$A^{C}=I\backslash A=\{x\mid x\in I \text{ 但 } x\notin A, A\subset I\}.$$

集合的运算，可如图 1-1 直观表示（图中阴影部分为运算结果）.



$A\cup B$ $A\cap B$ $A\backslash B$ A^{C}

图 1-1

集合的运算有下列性质：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$；

(5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$；

(6) 对偶律(或称德·摩根律)

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

高等数学中最常用的一类数集是区间，介于两个实数间的全体实数构成的数集称为区间，这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度，一般有如下几种区间：

设 a 和 b 都是实数，数集

$$\{x\,|\,a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x\,|\,a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点；数集

$$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点；类似地有

$$(a, b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$$

称为左开右闭区间；

$$[a, b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

称为左闭右开区间.

以上区间都称为有限区间，数 $b-a$ 为区间的长度. 此外还有无限区间(或称无穷区间)，引入记号 $+\infty$(读作正无穷大)，$-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty, b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty, b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

在不需要考虑区间的具体形式时，简单地称它为"区间"，并且常用 I 表示.

邻域是今后常用的概念，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

对于任意的正数 δ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，也简称点 a 的邻域，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

所以 $U(a,\delta)$ 表示与 a 的距离小于 δ 的一切 x 的全体.

在 $U(a,\delta)$ 中去掉邻域中心 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ 邻域. 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了使用上的方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\},$$

xOy 平面上的这个矩形区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

2) 映射

定义 1 设 X,Y 是两个非空集合，若存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\to Y.$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$，即 $D(f)=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 $W(f)$ 或 $f(X)$，即

$$W(f)=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

设 f 是从 X 到 Y 的映射，若 $W(f)=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某一元素的像，则称 f 是从 X 到 Y 的满射；若对于 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是从 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

例如，$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对任一 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$ 是一个映射，但不是单射，也不是满射，其值域 $W(f)=f(\mathbf{R})=\{y\mid y\geqslant 0\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集；

而 $f:\mathbf{R}\to Y$，$Y=\{y\mid |y|\leqslant 1\}$，对任一 $x\in\mathbf{R}$，$y=f(x)=\sin x$ 是一个满射，但