机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

冗余自由度机器人原理及应用

陆震　等编著

RONG YU ZI YOU DU JI QI REN YUAN LI YU YING YONG

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

机械工业出版社高水平著作出版基金资助项目

冗余自由度机器人原理及应用

陆震　等编著

机 械 工 业 出 版 社

本书全面介绍了冗余自由度机器人的理论基础和具体应用，书中内容是根据作者在冗余自由度机器人领域研究成果及研究生培养和教学工作中的教案而撰写。全书共分11章，内容包括冗余自由度机器人的基础知识、构形、运动学和动力学、容错控制、柔性冗余自由度机器人、欠驱动冗余自由度机器人、空间机器人的冗余自由度问题等。

本书本着深入浅出的原则，着眼于用通俗的数学、力学、机构学和自控原理的语言，解释冗余自由度机器人的特殊理论问题。在编写时，突出机电结合、电为机用的特点，力求内容与国内外最新研究成果同步。

本书适合于作为机械电子工程、控制理论与方法、机械设计与理论专业的研究生的教材或自学读物，也可以供从事机器人设计和应用及机械制造自动化的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

冗余自由度机器人原理及应用/陆震等编著. —北京：机械工业出版社，2006.10

ISBN 7-111-20151-5

Ⅰ.冗… Ⅱ.陆… Ⅲ.机器人—基本知识 Ⅳ.TP242

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第124718号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑：刘小慧 版式设计：张世琴 责任校对：刘志文

封面设计：马精明 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2007年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 12.5印张 · 306千字

定价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

编辑热线电话(010)88379711

前　言

冗余自由度机器人是20世纪80年代末出现、在90年代得到发展的一种先进机器人系统，它由空间技术和先进制造的需要而产生。人们利用其特有的自运动，可以克服一般机器人灵活性差、避障能力低、关节超限以及动力性能差等缺点。冗余自由度的引入还使机器人具有容错性，这对于机器人在航天和其他特殊环境的应用具有特别重要的意义。冗余自由度机器人在制造业中的应用也具有很大的潜在优势。其特有的自运动引发了许多理论上和工程上的难题，这些成为机械工程和自动控制领域的研究焦点。目前冗余自由度机器人研究成果主要表现为学术论文、科研报告和实验样机等形式，但缺少一部系统阐述其基本原理和应用途径的专著，并且有关的论文涉及的数学、力学知识和术语过于艰深，同一概念的名词术语不统一，一般研究人员和学生很难读懂。本书力图在一般研究人员和学生的知识基础与冗余自由度机器人专门知识之间架起一座桥梁，并努力做到深入浅出，使具有一般分析力学基础和矩阵理论知识的读者都能够看懂，书中第1章针对某些专门问题或较深的数学、力学内容和控制的基本知识进行了讲解，扫除了读者在这些基础知识上的障碍。熟悉这些知识的读者可以跳过第1章，直接由第2章看起。

本书全面深入地介绍了冗余自由度机器人的理论基础和具体应用问题，是作者在冗余自由度机器人领域的研究成果及博士生培养和研究生教学工作的总结。本书内容取材于作者多年从事冗余自由度机器人研究工作和指导博士生的成果，以及相关研究生课程的教学手稿，并参考了部分博士生公开发表的学术论文，在此特向他们表示感谢。本书由陆震主编，并负责绪论和第1、3、4、5章的编写，何广平编写了第7、8章，丁希伦编写了第9、10、11章。战强编写了第2、6章。最后由陆震对全书进行了统编。

本书的出版是与作者的导师、已故中国工程院院士张启先教授的长期指导分不开的。同时要特别感谢清华大学张伯鹏教授对全书进行的认真而细致的审稿。另外，还要感谢国家自然科学基金委员会和国家863计划对我们研究工作的长期支持。

由于作者的水平和工作实践所限，本书不可能包罗冗余自由度机器人的所有问题，可能会有不少错误和缺点，期望能得到专家和读者的指正。

陆　震

于北京航空航天大学如心楼

目　录

前言

绪论 …… 1

参考文献 …… 5

第1章　冗余自由度机器人的基础知识 …… 8

1.1　矢量空间 …… 8

1.2　基底和坐标 …… 11

1.3　矩阵的广义逆 …… 12

1.4　矩阵的奇异值分解 …… 15

1.5　矢量和矩阵的范数 …… 16

1.6　冗余自由度机器人控制常用的方法 …… 17

1.7　方向余弦矩阵和两个共原点坐标系的坐标变换 …… 20

1.8　两个不共原点的坐标系的坐标变换 …… 24

1.9　Denavit-Hartenburg 坐标系建立法 …… 24

1.10　刚体动力学基础 …… 25

1.11　拉格朗日(Lagrange)方程 …… 29

1.12　凯恩(Kane)方法 …… 39

参考文献 …… 42

第2章　冗余自由度机器人的构型设计与综合 …… 43

2.1　概述 …… 43

2.2　冗余自由度机器人的构型设计 …… 43

2.3　冗余自由度机器人机构的杆参数设计 …… 46

参考文献 …… 49

第3章　冗余自由度机器人运动学 …… 50

3.1　冗余自由度机器人运动学的基本问题 …… 50

3.2　梯度投影法 …… 52

3.3　加权最小范数解法 …… 53

3.4　运动学优化性能指标 $H(q)$ …… 54

3.5　冗余自由度机器人逆运动学的解析解 …… 56

3.6　可优化度 …… 58

3.7　广义逆的数值算法 …… 59

3.8　扩展雅可比矩阵法 …… 60

3.9　冗余自由度机器人避障的运动学规划 …… 62

参考文献 …… 64

第4章　冗余自由度机器人的动力学控制 …… 66

4.1　速度与力的对偶关系 …… 66

4.2　动力学基本方程 …… 67

4.3　机器人的动力学控制的性能指标 …… 67

4.4　关节力矩优化 …… 70

4.5　同时进行冗余自由度机器人的运动学优化和动力学优化 …… 71

4.6　冗余自由度机器人动力学控制的控制律 …… 73

4.7　冗余自由度机器人的力控制和位置/力混合控制 …… 79

参考文献 …… 82

第5章　冗余自由度机器人的容错控制 …… 85

5.1　概述 …… 85

5.2　运动学容错 …… 86

5.3　平面三自由度机器人运动学容错性分析 …… 91

5.4　动力学容错 …… 96

5.5　结论 …… 100

参考文献 …… 100

第6章　神经网络在冗余自由度机器人中的应用 …… 102

6.1　概述 …… 102

6.2　冗余自由度机器人中采用的神经网络模型 …… 102

6.3　应用神经网络的基本步骤 …… 104

6.4 神经网络在冗余自由度机器人运动学中的应用 …… 105
6.5 神经网络在冗余自由度机器人动力学中的应用 …… 108
参考文献 …… 111
第7章 柔性冗余自由度机器人动力学 …… 112
7.1 概述 …… 112
7.2 刚柔耦合冗余自由度机器人振动控制的运动学方法 …… 113
7.3 刚柔耦合冗余自由度机器人振动控制的动力学方法 …… 116
7.4 柔性冗余自由度机器人动力学优化 …… 121
7.5 柔性冗余自由度机器人动力学多目标优化 …… 123
参考文献 …… 126
第8章 欠驱动冗余自由度机器人 …… 128
8.1 概述 …… 128
8.2 欠驱动冗余自由度空间机器人运动学分析 …… 129
8.3 欠驱动冗余自由度空间机器人动力学控制 …… 134
8.4 欠驱动冗余自由度空间机器人动力学优化控制 …… 140
8.5 平面欠驱动机器人的非线性动力学特征及谐波控制技术 …… 145
参考文献 …… 162
第9章 空间冗余自由度机器人的运动学及其避奇异运动规划 …… 164
9.1 概述 …… 164
9.2 空间机器人的运动学模型 …… 164
9.3 动量守恒和非完整约束 …… 165
9.4 动力学奇异 …… 166
9.5 自由漂浮的空间机器人运动规划 …… 168
9.6 小结 …… 171
参考文献 …… 171
第10章 空间冗余自由度机器人逆动力学控制 …… 172
10.1 概述 …… 172
10.2 运动学方程与动量约束的处理 …… 172
10.3 逆动力学求解 …… 173
10.4 空间冗余自由度机器人逆动力学控制的实例仿真研究 …… 174
10.5 小结 …… 177
参考文献 …… 177
第11章 冗余自由度机器人多臂的协调控制 …… 178
11.1 双臂冗余自由度机器人协调操作的运动学约束和动力学优化 …… 178
11.2 多臂冗余自由度机器人的避碰规划 …… 183
11.3 双臂冗余自由度机器人的运动灵活性 …… 186
参考文献 …… 190
结束语 …… 191
读者信息反馈表

绪 论

机器人的自由度等于其关节空间维数 n。机器人任务空间维数是机器人工作时所需的末端位姿参数数目 m。众所周知，位于三维欧氏空间的刚体需要6个独立参数确定其位姿，因此，机器人任务空间最多只要有6个自由度就够了。在机器人关节空间维数等于其任务空间维数的条件下，给定了末端位姿(即任务空间中的点)，只存在有限的关节位置(即关节空间的点)与之对应，这类机器人是非冗余自由度机器人。非冗余自由度机器人的缺点是运动不灵活，即：在规定了末端位姿轨迹之后，不能避免关节空间存在奇异点(或运动灵活性差的区域)、不能躲避任务空间中的障碍、不能克服关节运动极限，在某些情况下动力学性能差。如果使关节空间维数大于任务空间维数，关节空间维数与任务空间维数的差称为机器人的冗余自由度，或简称冗余自由度。这样的机器人称为冗余自由度机器人。给定了冗余自由度机器人的末端位姿，即任务空间中的点，关节空间可以有无穷多个点，或者说无穷多个位形(configuration)与之对应，这些点的集合是关节空间中的一个 n-m 维流形(manifold)。换言之，冗余自由度机器人位形能够在这个流形内自由变动而不影响末端位姿，这个变动称为冗余自由度机器人的自运动。机器人所具有的这种性质称为冗余特性。这使我们有可能在实现给定末端位姿(第一目标)的同时，还可以通过在这个子空间变动，满足各种二次目标，如机器人最佳灵活性(即,避奇异位形)、避障碍、防止关节运动超极限以及改善动力学性能等。以后我们还可以知道，利用机器人的冗余特性，可以实现机器人的容错控制和机器人的振动抑制。对于多臂机器人、移动式机器人、机器人多指灵巧手等特殊的机器人结构，也普遍存在冗余特性。

正是这种区别于传统的非冗余自由度机器人的冗余特性，使冗余自由度机器人优于非冗余自由度机器人，而成为人们关注的焦点。

机器人运动学的中心问题是运动学逆解。由于机器人运动方程的非线性，机器人运动学控制都是通过求速度方程逆解进行的，因为速度方程是线性的，便于计算。冗余自由度机器人运动学正解可由运动学方程唯一地确定，而运动学逆解有无穷多个，需要补充其他条件才能确定，这就给冗余自由度机器人的使用者和运动规划人员提供了一个发挥聪明才智的广阔天地，利用冗余自由度机器人的自运动改善机器人的工作品质或者实现其他目标。这是与非冗余自由度机器人非常不同的。

20世纪60年代，Whitney[1]在研究人臂假肢运动学时首先提到具有冗余特性机构的运动学逆解问题。他利用雅可比(Jacobian)矩阵的广义逆，得到了关节速度的最小范数解。Liegeois[2]用梯度投影法，得出了冗余自由度机器人关节速度的通解形式，其特解为关节速度的最小范数解，齐次项为雅可比矩阵的零空间矢量，与末端的速度无关，即机器人关节空间的自运动。他提出的这种自运动优化算法被后人多次采用。Baillieul[3,4]在对避奇异位形和避障的研究中提出了增广雅可比矩阵的概念，将避奇异位形和避障这些二次目标作为运动学附加约束，使雅可比矩阵变成方阵形式的增广雅可比矩阵，逆运动学有确定解。由于冗余自由度机器人即使处于非奇异位形时，增广雅可比矩阵也可能出现算法的奇异而失效，这限制了

其应用。

冗余自由度机器人的自运动可以用于实现避免奇异位形，躲避任务空间中的障碍，防止关节运动超限等二次目标。为此必须按照相应目标建立自运动优化指标。避免奇异位形和保证机器人灵活性是同一个问题的两种说法。Salisbury[5]提出用条件数作为灵活性的性能指标，Klein[6]则用最小奇异值度量灵活性，Angeles[7]用最小条件数作为避奇异位形的优化指标。但这些指标都有一定的片面性。Yoshikawa[8]定义了衡量机器人灵活性的可操作度指标，它克服了上述指标各自的局限性，被后续研究者广泛应用。

避障是冗余自由度机器人的另一个重要应用，一般采用势函数法。Maciejewski[9]和Khatib[10]把机器人视为力场中运动的物体，预定的路径是引力源，障碍是斥力源，通过调整冗余自由度机器人的自运动，使机器人向斥力减小的方向运动。Kircanski[11]和Seraji[12]则采用罚函数法和不等式约束法对机器人接近障碍的趋势进行限制。Boddy[13]对无法避开的障碍，采取减速或锁定相关关节的方法防止机器人与障碍接触，但牺牲了部分末端位姿轨迹的精度。

避免关节运动超限是冗余自由度机器人运动学优化的一个重要应用目标。Liegeois[14]将关节运动范围的中间视为引力场的源，而Zghal[15]则将关节运动范围的边界作为斥力场的源。优化的最终结果是各关节都向关节运动范围中心靠近。

冗余自由度机器人的动力学优化是通过自运动的寻优，进行关节力矩再分配或动能极小化来实现的。

由于广义逆的计算十分繁杂，有时不能满足实时计算要求，计算广义逆成为冗余自由度机器人实时控制的最大障碍。Hsia[16]提出了快速递推计算广义逆的方法。Dubey[17]采取分解雅可比矩阵的方法，解析地降阶处理梯度法获得的最小范数解和齐次解。Zghal[15,18]在多冗余自由度机器人广义逆计算中对雅可比矩阵分解。Li[19]在研究雅可比矩阵分解时，提出自运动可优化度的概念，实时计算齐次项的放大因子。

基于速度方程和雅可比矩阵广义逆计算的方法属于自运动的局部最优控制，它具有能够在线计算的优点，但是不能保证全局最优。冗余自由度机器人的全局最优控制能够获得真正意义的自运动优化控制，因而受到了广泛重视。Nakamura[20]研究了积分形式的全局最优化问题。Burdick[21]通过自运动流形的拓扑学，分析了冗余自由度机器人的运动学性能。Agrawal 等人[22]和 Seereeram 等人[23]对冗余自由度机器人的全局最优轨迹规划进行了研究。应用动力系统的几何理论，可将冗余自由度机器人的零空间矢量视为一个微分动力系统，全体自运动构成了一个微分流形，由于奇异是流线之间映射的奇异，因而自运动流线的奇异与奇异构形的拓扑特征是相同的。因此，研究冗余自由度机器人自运动流形即可解决其奇异问题。Luck[29]研究了带有关节限制的冗余自由度机器人自运动拓扑学。冗余自由度为 1 的机器人的自运动是唯一的，由零空间矢量即可确定其解析表达式。

全局优化的致命弱点是收敛速度慢，无法进行实时计算，一般用于理论分析或离线计算。尽管如此，工业上存在大量重复作业，用离线计算进行全局优化可以获得最佳结果，因此仍然是可行的。

陆震及其学生从 1994 年在多项国家自然科学基金项目以及航空基金和国家教委博士点专项基金的支持下，系统开展了柔性冗余自由度机器人动力学分析与动力学控制方面的研究[25-31]。以后国内有不少机器人研究人员也开展了这方面的研究，取得了更多的成果。

容错机器人是冗余自由度机器人的一个极富潜力和挑战性的应用领域，冗余自由度机器人的容错能力可以分为运动学容错能力和动力学容错能力。运动学容错能力是指冗余自由度机器人对于故障关节速度重新调整的能力。动力学容错能力是指冗余自由度机器人对故障关节力矩重新调整的承受能力。

Maciejewski[33]最早提出冗余自由度机器人容错性的概念，他研究了冗余自由度机器人的灵活性与容错性之间的内在关系，并以“最差灵活性”来度量机器人的容错性。他和Lewis[34]用最小奇异值分析了运动学容错性和动力学容错性。Groom 等人[35]以“最差灵活性”为优化目标，研究了容错优化控制算法。陈伟海等[36]提出了力矩可调节的加权零空间算法 WATA，以提高冗余自由度机器人的动力学容错性。李健[37]提出了基于可操作度的单冗余自由度机器人容错性指标。

图 0.1　欠驱动冗余自由度机器人试验装置

欠驱动冗余自由度机器人(图 0.1)是冗余自由度机器人的另一个应用领域，这是适应航天技术的发展出现的，它和容错机器人以及航天机器人轻量化有关。国内外在这方面已有人着手研究[38-40]。

迄今为止，在实验研究方面，国内外已研制了多种冗余自由度机器人系统，应用范围越来越广泛，一些已实现商品化。日本东京大学 1979 年研制了 UJIBOT7 自由度机器人操作手。日本 MITI 机械工程实验室 1987 年研制了七自由度直接驱动型机器人操作手。加拿大为国际空间站提供了一个移动服务系统(MSS)及其有关地面设备，移动服务系统包括空间站遥控机械臂系统(SSRMS)(图 0.2)、专用机械手(SPDM)两部分(图 0.3)。美国航空航天实验室研制了 30 自由度的超冗余自由度机器人。法国的 Federic Marquet 等最近研制了一种新的冗余

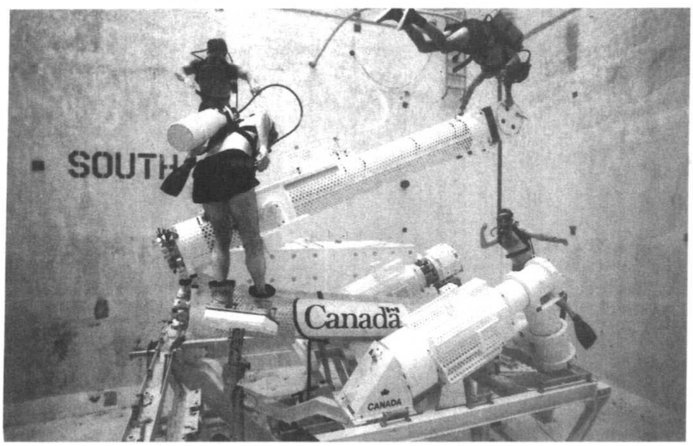

图 0.2　加拿大的移动服务系统的空间站遥控
机械臂系统(SSRMS)在水下试验

自由度机器人平行机构，分析了它的运动学和动力学模型，并利用这种机构的冗余自由度克服了高速运动时的运动奇异。国内北京航空航天大学 1994 年就研制成功了七自由度机器人操作臂(图 0.4)，并且研制出一系列改进型的冗余自由度机器人实验样机[32]。北京航空航天大学还研制了双冗余自由度手臂协调系统机器人，其中一臂为七自由度机器人，另一臂为模块化冗余自由度机器人，并在其基座上安装有平动导轨(图 0.5)。中国科学院机器人开放实验室研制了多机器人协调操作系统，其中一台机器人安装在具有视觉的可移动小车上，构成了更为复杂的多冗余自由度机器人系统。

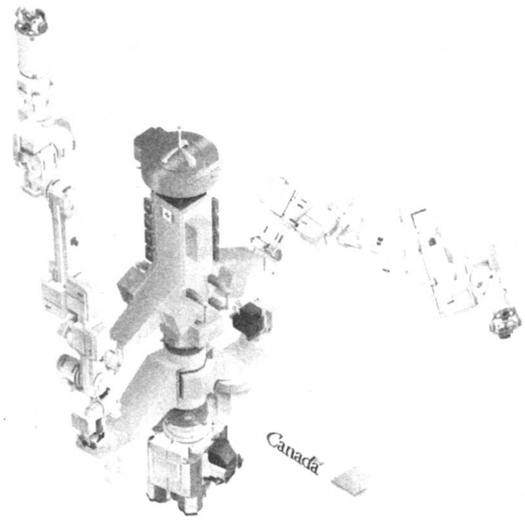

图 0.3　加拿大的移动服务系统的专用机械手(SPDM)

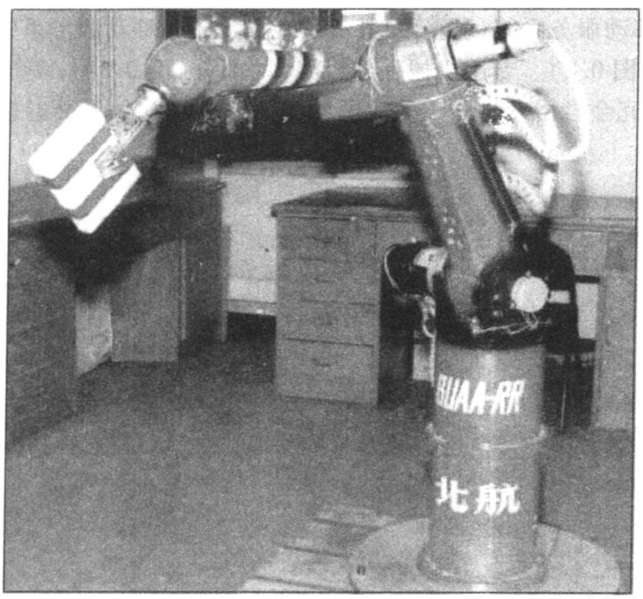

图 0.4　1994 年研制的 BUAA—RR 七自由度机器人

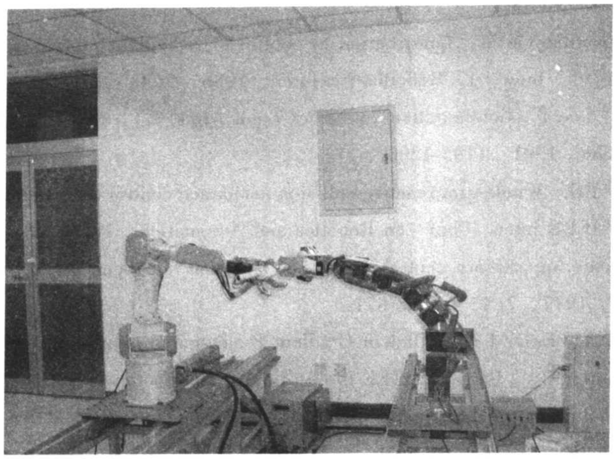

图 0.5　冗余自由度机器人的双臂协调操作

目前，关于冗余自由度机器人的基础理论和基本方法已经形成，主要集中在如何通过雅可比矩阵零空间的运动学和动力学优化来实现其灵活性(即，避奇异位形)、躲避障碍、克服关节运动限制或关节力矩限制、抑振、容错等二次目标。这些理论和方法大多以科研论文的形式发表在各种关于机器人理论、控制理论以及制造自动化的期刊杂志和学术会议论文集中，并且只是涉及冗余自由度机器人的某个方面或某些问题。为了使读者对冗余自由度机器人的基本理论和方法得到系统全面的掌握，并熟悉其最新进展，作者把这些成果进行了系统分析和总结。

参考文献

[1] Whitney D E. Resolved motion rate control of manipulator and human prostheses[J]. IEEE Trans. Man-machine systems, 1969, MMS-10: 47-53.

[2] Liegeois A. Automation supervisory control of configuration and behavior of multibody mechanisms[J]. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, 1977, 7(12): 868-871.

[3] Baillieul J. Kinematic programming alternatives for redundant manipulators[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1985: 722-728.

[4] Baillieul J. Avoiding obstacles and resolving kinematic redundancy[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1986: 1689-1704.

[5] Salisbury J K, Craig J. Articulated hands: kinematic and force control issues[J]. Inter. J. of Robotics Research, 1982, 1(1): 4-17.

[6] Klein C A, Blaho B E. Dexterity measure for the design and control of kinematically redundant manipulators [J]. Int. J. of Robotics Research, 1987, 6(2): 72-83.

[7] Angeles J, Rojas A A. Manipulator inverse kinematics via condition number minimization and continuation [J]. Int. J. Robotics and Automation, 1987, 2(2): 61-69.

[8] Yoshikawa T. Manipulability and redundancy control of robotic mechanisms[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1985: 1004-1009.

[9] Maciejewski A A, Klein C A. Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments[J]. Inter. J. Robotics Research, 1985, 4(3): 109-117.

[10] Khatib O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots[J]. Inter. Jnl. Robotics Re-

search, 1986, 5(1): 90-98.

[11] Kircanski M V, Vukobratovic M. Contribution to control of redundant robotic manipulators in the environment with obstacles[J], Inter. J. Robotics Research, 1986, 5(4): 112-119.

[12] Seraji H, Long M, Lee T. Configuration control of 7 dof Arms[C], Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1991: 1195-1200.

[13] Boddy C L, Taylor J D. Whole-arm reactive collision avoidance control of kinematically redundant manipulators[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1993: 382-387.

[14] Liegeois A. Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms[J]. IEEE Trans. SMC, 1977, 7(12): 868-871.

[15] Zghal H, Dubey R V, Euler J A. Efficient Gradient Projection Optimization for Manipulators with Multiple Degrees of Redundancy[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1990: 1006-1011.

[16] Hsia T C, Guo Z Y. Joint trajectory generation for redundant robots[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1989: 277-282.

[17] Dubey R. V. et al, An efficient gradient projection optimization scheme for a seven-degree- of-freedom redundant robot with spherical wrist[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1988: 24-29.

[18] Zghal H. Collision avoidance of a multiple degree of freedom redundant manipulator operating through a window[J]. J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1992, 114: 717-721.

[19] Li L, Zhang Q, Yang, Z. Control of redundant robots based on the motion optimizability measure[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1994: 3271-3276.

[20] Nakamura Y, Hanafusa H. Optimal redundancy control of robot manipulators[J], Inter. Jnl. of Robotics Research, 1987, 6(1): 32-42.

[21] Burdick J W. On the inverse kinematic of redundant manipulators: Characterization of the self-motion manifolds[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation, 1989: 264-270.

[22] Agrawal O P, Xu Y. On the global optimum path planning for redundant space manipulators[J]. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1994, 24(9): 1306-1316.

[23] Seereeram S, Wen J T. A global approach to path planning for redundant manipulators[J]. IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1995, 11(1): 152-160.

[24] Luck C L, Lee S. Self motion topology for redundant manipulators with joint limits[C]. Proc. of IEEE Conf on Robotics and Automation, 1993: 626-631.

[25] 何广平，陆震. 柔性冗余自由度机器人振动分析与抑制[J]. 北京航空航天大学学报, 1997, 23(3): 385-389.

[26] 何广平，陆震. 柔性冗余自由度机器人振动抑制的一种方法[J]. 机器人, 1997, 19(3): 173-186.

[27] 何广平，陆震. 一个考虑关节角极限的柔性冗余自由度机器人动力学算法[J]. 机器人, 1997, 19(6): 464-467.

[28] 何广平，陆震. 柔性冗余自由度机器人动力学规划[J]. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(1): 112-115.

[29] 边宇枢，陆震. 柔性冗余自由度机器人残余振动的抑制研究[J]. 机器人, 1998, 20(4): 247-252.

[30] 吴立成，陆震. 等，一种柔性机器人的子杆法建模方法[J]. 机器人, 2000, 22(5): 344-349.

[31] Lu Z. The dynamic optimization for flexible redundant robotic manipulators[C]. Proc. of Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 1999: 1252-1257.

[32] 倪受东，袁祖强，文巨峰. 冗余自由度机器人机构学研究现状[J]，南京工业大学学报, 2002, 24(4): 107-110.

[33] Maciejewski A A. Fault tolerant properties of kinematically redundant manipulators[C]. Proc. of IEEE Inter. Conf on Robotics and Automation, 1990: 638-642.

[34] Lewis C L, Maciejewski A A. Dexterity optimization of kinematically redundant manipulators in the presence of joint failures[J]. Computers Elect Engineering, 1994, 20(3): 273-288.

[35] Groom K N. Real-time failure tolerant control of kinematically redundant manipulators[C]. Proc of IEEE Inter Conf on Robotics and Automation, 1997: 2595-2600.

[36] 陈伟海，武桢. 冗余自由度机器人动力学容错控制技术研究[J]. 北京航空航天大学学报，2000，26(6): 726-730.

[37] 李健，李剑锋. 基于可操作度的单冗余自由度机器人容错性指标[J]. 北京航空航天大学学报，2002，28(11): 54-57.

[38] 何广平，陆震，王凤翔. 欠驱动冗余自由度空间机器人优化控制[J]. 控制理论与应用，2004，21(2): 305-310.

[39] 何广平，陆震，王凤翔. 欠驱动机器人动力学耦合奇异研究[J]. 航空学报，2004，25(5): 520-524.

[40] Scherm N. Dynamics and control of under actuated manipulator[J]. J. of Robotics and Systems, 2000, 30(2): 237-248.

第 1 章　冗余自由度机器人的基础知识

学习和研究冗余自由度机器人，需要掌握一定的矩阵理论、控制理论、刚体系动力学和机器人机构学方面的基础知识，本章的目的是为不完全具备这方面知识的读者提供一个快捷的入门途径。读者不必为读懂后续章节去查阅大量的专门书籍。对于熟悉上述基础知识某一方面的读者可以跳过相关内容。第 1.1 节 ~ 第 1.5 节介绍矩阵理论的几个关键内容，第 1.6 节介绍冗余自由度机器人控制常用的方法，第 1.7 节 ~ 第 1.9 节介绍机器人机构学的基本概念，最后三节介绍刚体系动力学基础。

1.1　矢量空间

对于线性方程组的各种解法，读者是很熟悉的。在解线性方程组之前要解决一个重要问题，这就是解的**存在性**和**唯一性**。通过对这个问题的分析，在线性代数理论中会引出一个重要概念——线性空间。线性空间有时称为矢量空间，实数域上的矢量空间理论是机器人运动学的数学基础，因为机器人速度级运动学逆问题需要求解线性方程组，所以应当详细深入地讨论。如果没有特别说明，本书中的矢量空间都是指实数域上的矢量空间。

为了便于讨论，下面对矩阵按形状进行一个分类约定。一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $m \neq n$，称为长矩阵；如果 $m = n$，称为方阵。在有的线性代数和矩阵理论专著中，按照 $m > n$ 或 $m < n$，将长矩阵分为高矩阵和长矩阵。

这里不给出矢量空间的严格数学定义，读者可以从任何一本线性代数或矩阵理论专著中了解有关内容。我们从一些例子入手来说明。直线、平面和三维欧氏空间中的全体矢量分别组成了三个矢量空间，可用 R^1、R^2、R^3 表示，它们都有明显的几何意义。上角标是它们的维数，例如，x-y 平面是矢量空间 R^2，可以进一步将矢量空间扩展到 n 维，即 R^n，尽管无法给出其明显的几何解释，但这对于线性代数是具有理论意义的。

可以定义矢量空间 R^n 中任意两个矢量$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$的和$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$，以及实数域中一个数 k 与矢量空间中一个矢量$\vec{\alpha}$的数量积 $\vec{\delta} = k\vec{\alpha}$，这两种运算的结果仍然在 R^n 中，并服从下列规则：

(1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$；

(2) 存在唯一的零矢量$\vec{\theta}$，使$\vec{\theta} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$(以后不特别说明，就用 0 表示$\vec{\theta}$)；

(3) 存在唯一的负矢量 $-\vec{\alpha}$，使$\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = 0$；

(4) $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$；

(5) $(k_1 k_2)\vec{\alpha} = k_1(k_2\vec{\alpha})$；

(6) $k(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = k\vec{\alpha} + k\vec{\beta}$；

(7) $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$；

(8) $(k_1 + k_2)\vec{\alpha} = k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\alpha}$。

矢量空间的子空间是其满足下列两个条件的子集：

（1） 如果将其中的两个矢量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 相加，得到的和矢量仍然在该子空间内；

（2） 如果将其中的一个矢量用一个数 c 相乘，得到的新矢量仍然在该子空间内。

换言之，子空间是对加法和数乘封闭，即满足上述两个规则的子集。需要指出的是，零矢量是所有矢量空间的子空间，由条件(2)可知，使 $c=0$，用 c 乘任何矢量，都得到零矢量。

对一个矢量空间，最小的子空间只有一个矢量，这就是零矢量。最大的子空间就是矢量空间本身。例如矢量空间 R^3，它可能的子空间可以是它本身，或任何过原点的平面，或任何过原点的直线或原点。

考虑矢量空间 R^2 中所有其分量为正数或零的矢量组成的子集，即第一象限，这些矢量的坐标满足 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$。满足第一个条件，但不满足第二个条件，若取一个矢量 $[1,1]^T$，用 -1 相乘，得到的新矢量 $[-1,-1]^T$ 显然不属于第一象限，而在第三象限，因此不是子空间。

在矢量空间的子空间中，正交子空间是一个很重要的概念。此外矢量的线性相关和线性无关，以及线性组合等概念也是经常要用到的。下面给出这些重要概念的定义。

定义 1.1.1　在同一个矢量空间 R^n 中，两个子空间 V 和 W 正交，是指 V 中的所有矢量 $\vec{v}$ 与 W 中的所有矢量 $\vec{w}$ 都一一正交，即 $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}=0$，这里 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 为矢量 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 的坐标列矩阵。

定义 1.1.2　n 个长度为 m 的矢量 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、…、$\vec{v}_n$ 和 n 个常数 k_1、k_2、…、k_n，$\boldsymbol{a}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2, \cdots, k_n\vec{v}_n$ 称为 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、…、$\vec{v}_n$ 的线性组合。

定义 1.1.3　n 个长度为 m 的矢量 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、…、$\vec{v}_n$ 和 n 个不同时等于零的常数 k_1、k_2、…、k_n，其线性组合 $\vec{a}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2, \cdots, k_n\vec{v}_n$ 总不等于零，称 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、…、$\vec{v}_n$ 为线性无关，否则称 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、…、$\vec{v}_n$ 线性相关。

现在利用矢量空间的概念研究线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的存在性和唯一性问题。首先考虑关于两个未知数的三个线性方程，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\5 & 4\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\tag{1.1.1}$$

这是一个超定方程组，因为方程的数目 m 大于未知数 n 的数目。一般情况下，方程组是无解的，但当方程组右边常数矢量满足一定条件时，方程组有解。

定理 1.1.1　线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的条件是如果并且只要 $\boldsymbol{b}$ 可以表示成系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各列的线性组合，即

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\tag{1.1.2}$$

这个条件称为线性方程组的相容条件。可以用矢量空间的概念表述定理 1.1.1：**如果并且只要 $\boldsymbol{b}$ 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列张成的矢量空间中，线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解**。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列张成的矢量空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间，或者称为 $\boldsymbol{A}$ 的值空间，记为 $R(\boldsymbol{A})$。具体到方程组(1.1.1)，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间是由它的两个列矢量 $[1,5,2]^T$ 和 $[0,4,4]^T$ 张成的平面(图 1.1.1)。推广到一般情况，线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间是由其 n 个列矢量(如果这 n 个列矢量是线性无关的)张成的矢量空间，它是矢量空间 R^n 的子空间。

系数矩阵 A 为方阵时，也不一定总有解。如上例，把矩阵 A 的两个列矢量相加作为第三个列矢量，得到矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\5&4&9\\2&4&6\end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

线性方程组 $Ax=b$ 有解的条件同样是矢量 $\vec{b}$ 位于 A 的列空间中，由于第三列是前两列的线性组合，第三个列矢量位于前两个列矢量张成的空间上，A 的列空间没有变化，方程组仍为超定方程组，矢量 $\vec{b}$ 必须位于图 1.1.1 所示的平面上才有解。

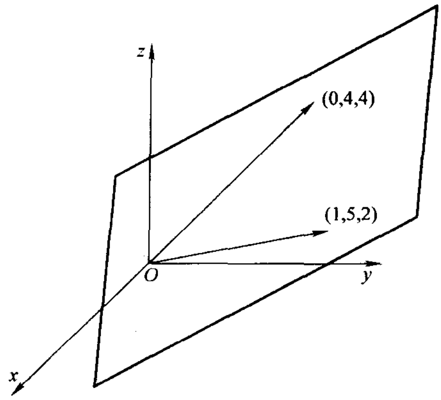

图 1.1.1 列空间

如果矩阵 A 满秩，情况就不同了，它的三个列矢量线性无关，它们张成一个三维矢量空间，A 矩阵的列空间是整个 R^3。矢量 $\vec{b}$ 可以是这个空间中的任意一个矢量。这时方程组为恰定方程组。

如果方程的数目小于未知数的数目，即 $m<n$。假设 A 是行满秩的，即 A 的秩 r 等于 m。由于方程数 m 小于变量数 n，方程组为欠定方程组。这种情况在冗余自由度机器人逆运动学问题中会遇到。由线性代数可知，方程组的解不唯一，在所有的解矢量中，有一个解矢量是最小范数解。其他的解可以认为是由这个解和线性方程组对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 通解的和。齐次线性方程的这些解组成了矢量空间 R^n 中的一个子空间，称为矩阵 A 的零空间，或者称为 A 的核，它的维数是 $n-m$，记作 $N(A)$。如果矩阵 A 的秩 $r<m$，零空间的维数则为 $n-r$。类似地，齐次线性方程组 $A^{\mathrm{T}}x=0$ 的全体解组成了矢量空间 R^m 的一个子空间，称为矩阵 A 的左零空间，它的维数是 $m-r$，记作 $N(A^{\mathrm{T}})$。如果矩阵行满秩，即 $m=r$，$N(A^{\mathrm{T}})$ 为零。

A 的 r 个线性无关行在 n 维矢量空间中张成一个 r 维子空间，它是矩阵 A^{T} 的列空间，记作 $R(A^{\mathrm{T}})$，称为矩阵 A 的行空间。

定理 1.1.2 任何 $m\times n$ 矩阵 A，其零空间 $N(A)$ 与行空间 $R(A^{\mathrm{T}})$ 互为矢量空间 R^n 中的正交子空间，并且 $R^n=R(A^{\mathrm{T}})\oplus N(A)$。

证明：设 $\vec{\omega}$ 是零空间 $N(A)$ 中任意矢量，由零空间的定义可知 $A\omega=0$，这个等式写成展开形式为

$$A\omega=\begin{bmatrix}A_{\text{row1}}\\A_{\text{row2}}\\\vdots\\A_{\text{row}m}\end{bmatrix}\omega=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

这说明矩阵 A 的每一行与 ω 的内积等于零，或者说 A^{T} 的每一列与 ω 的内积等于零，因此 ω 与 A^{T} 的每一列正交，即 ω 正交于 A^{T} 每一列张成的子空间，即 $R(A^{\mathrm{T}})$。这对于 $N(A)$ 中所有矢量也都是对的，因此 $N(A)$ 与 $R(A^{\mathrm{T}})$ 互为矢量空间 R^n 中的正交子空间。定理证毕。类似地，有关于矩阵 A 左零空间 $N(A^{\mathrm{T}})$ 与列空间 $R(A)$ 正交的定理 1.1.3。

定理 1.1.3　任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，其左零空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 与列空间 $R(\boldsymbol{A})$ 互为矢量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的正交子空间，并且 $\boldsymbol{R}^m=R(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$。

综如上述内容可知，给出一个 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$，与之相联系的有如下四个重要的子空间。

$\boldsymbol{A}$ 的列空间：它由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的列生成，用 $R(\boldsymbol{A})$ 表示。

$\boldsymbol{A}$ 的行空间：它由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的行生成，用 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 表示。

$\boldsymbol{A}$ 的零空间：它由满足齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的全体解组成，用 $N(\boldsymbol{A})$ 表示。

$\boldsymbol{A}$ 的左零空间：它由满足齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的全体解组成，用 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 表示。

R^n 中的两个子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$、$N(\boldsymbol{A})$；$R^m$ 中的两个子空间 $R(\boldsymbol{A})$、$N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$。它们的关系为

$$R^n=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\oplus N(\boldsymbol{A}),\quad \text{且 } R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\perp}=N(\boldsymbol{A})$$

$$R^m=R(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),\quad \text{且 } R(\boldsymbol{A})^{\perp}=N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

1.2　基底和坐标

一般矢量空间除了只由一个零元构成的空间外，都有无穷多个元(矢量)，如何把这无穷多个元全部表达出来，并且弄清它们之间的关系，即这个矢量空间的构造，是非常重要的。此外如何用比较具体的数学表达式来表示一个矢量空间，进行相应的运算是第二个重要问题。

在 R^2 中，$\vec{i}=(1,0)$ 和 $\vec{j}=(0,1)$ 是两个线性无关的矢量，R^2 中的任一矢量 $\vec{r}$ 是 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 的线性组合，即 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$。同样，$R^3$ 中 $\vec{i}=(1,0,0)$、$\vec{j}=(0,1,0)$ 和 $\vec{k}=(0,0,1)$ 是三个线性无关的矢量，R^3 中的任一矢量 $\vec{r}$ 是 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 的线性组合，即 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$。又如矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间中的任一矢量 $\vec{n}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系中解矢量的线性组合，即

$$\vec{n}=\sum_{i=1}^{m-r}k_i\vec{a}_i \tag{1.2.1}$$

式中，$\vec{a}_i$ 为基础解系中的解矢量；m 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数；r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；k_i 为任意实数。

这样有如下定义。

定义 1.2.1　在矢量空间 V 中，如果有某 n 个线性无关的元 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$，并且任意元都是 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 的线性组合，那么 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 称为 V 的基底，n 为 V 的维数，V 称为 n 维空间。

下面介绍矢量空间的另一个重要概念，假如 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 为 V 的基底，那么 V 中的任意矢量 $\vec{a}$ 都是 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 的线性组合，即 $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n$，这种表示是唯一的，即对于一个已经选定的基底来说，系数 k_1、k_2、…、k_n 是由 $\vec{a}$ 唯一确定的，这些由 $\vec{a}$ 唯一确定的系数 k_1、k_2、…、k_n 称为 $\vec{a}$ 对基底 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 的坐标。在基底已经给定的条件下，可以用坐标表示 $\vec{a}$，记成 $\vec{a}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$。

需要特别说明的是，对于一个矢量空间子空间，其维数 n_s 小于其坐标数目(即矢量空间的维数 n)，这时描述这个子空间中的矢量，不能说这个矢量是 n 维矢量，可以说这个矢量的长度是 n，其维数是 n_s。