高等学校教材

Calculus

微积分

第二版

下册

闫站立 编

高等教育出版社

高等学校教材

微　积　分

第　二　版

下　　册

闫站立　编

高等教育出版社

内容简介

本书是为大学非数学类理工科各专业编写的微积分教科书。全书分为三部分：（一）一元函数微积分；（二）多元函数微积分；（三）专题，分编为上、下两册。

下册（多元函数微积分、专题）共8章。多元函数微积分部分着重用类比方法和线性代数的有关知识，讲解多元函数微积分的基本概念和运算方法以及在几何和物理中的应用；专题是专为部分理科专业增加的内容，供计划教学时数较多的专业选用。

下册在内容的处理上有以下特点：(1) 为了把二元函数中的概念和结论与一元函数中的概念和结论做对比，或把它们推广到一般情形，书中既把数组（x，y）看作 Oxy 平面上的点 $P(x, y)$，又把它看作 Oxy 平面上的向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，所以二元函数 $f(x, y)$ 又可记成 $f(P)$ 或 $f(\boldsymbol{r})$；(2) 把不属于微积分主体部分的有关知识，编入阅（选）读或节后的注释中，目的是减少课堂讲授学时数和培养学生的阅读能力。

习题后给出了答案、提示或选解。

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下册/闫站立编．—2版．—北京：高等教育出版社，2007.11

ISBN 978-7-04-022518-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.闫…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第155685号

策划编辑　张长虹　责任编辑　董达英　封面设计　王凌波　责任绘图　黄建英
版式设计　张　岚　责任校对　殷　然　责任印制　宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	2001年2月第1版
			2007年11月第2版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	25.25	印　　次	2007年11月第1次印刷
字　　数	470 000	定　　价	26.40元

物料号　22518-00

目　录

微积分（二）　多元函数微积分

微积分（三）　专题（供理科专业选用）

微积分（二）
多元函数微积分

自变量多于一个的函数称为多元函数．多元函数微积分是一元函数微积分的类比或自然推广，它是由19世纪及其以后的数学家们完成的.

为了借助几何直观，也是为了简单起见，一般都是先讨论二元函数 $z=f(x,\ y)$．它有两个自变量，表示成数组 $(x,\ y)$，并把 $(x,\ y)$ 看作坐标平面 Oxy 上的点 $P(x,\ y)$ 或向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$．因此，二元函数 $z=f(x,\ y)$ 有时记成 $z=f(P)$ 或 $z=f(\boldsymbol{r})$．同样，三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 有三个自变量 x，y，z，并把数组 $(x,\ y,\ z)$ 看作空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点 $P(x,\ y,\ z)$ 或向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$．因此，三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 有时记成 $u=f(P)$ 或 $u=f(\boldsymbol{r})$．这种采用函数的记号 $f(P)$ 或 $f(\boldsymbol{r})$ 的好处，一是便于同一元函数做对比，二是当把二元或三元函数的某些概念和结论推广到更多个自变量的函数时，并不会遇到原则性的困难.

虽然说多元函数微积分中的许多概念和结论，都是一元函数微积分中的概念和结论的类比或推广，但由于研究的环境和对象改变了，不仅一元函数中的少数结论（譬如函数极限的单调有界原理）不能类比到多元函数上来，而且还会出现其特有的性质或结论．因此，读者在学习多元函数微积分时，要特别注意它与一元函数微积分的相同点与不同点.

第 11 章

多元函数微分法

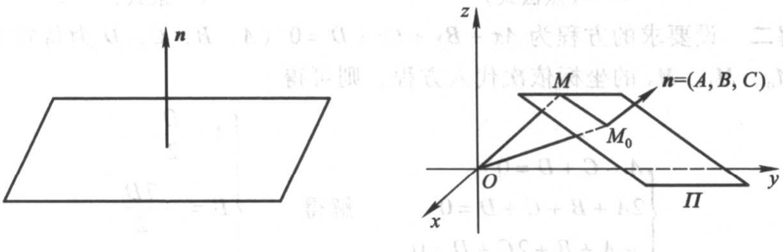
一元函数（一个自变量的函数）微积分的基本概念和结论，可类比或推广到多元函数上来. 只要读者已经理解了一元函数微积分的基本概念和结论，并掌握了一元函数微积分的运算方法，那么在学习多元函数微积分时，除了在计算上会感到有些繁，在理论上应该不会遇到太大的困难.

§11－0　平面与直线的方程·二次曲面

这一节的内容属于空间解析几何，它是学习多元函数微积分所需要的基础知识. 学习过空间解析几何基础知识的读者，粗读一下本节的内容就可以了.

（一）平面与直线的方程

1. 平面方程　垂直于某平面的向量称为该平面的法向量（图 11－1（1））.



(1)　　(2)

图 11－1

设非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$ 是某个平面 Π 的法向量（图 11－1（2）），点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为该平面上的固定点，而点 $M(x,\ y,\ z)$ 为该平面上任一点，则

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{（两向量垂直的充要条件）}$$

而$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$，$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，于是得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{11-1}$$

或

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0) \tag{11-2}$$

反之，只要点 (x, y, z) 满足这个方程，则它一定在该平面上（只要把上述过程倒推回去就行了）. 读者看到，平面方程是一个三元一次方程（$D=0$ 时表示它过原点），而任何一个三元一次方程（有些系数可能为零），只要 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$，则表示一个平面，且 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 就是该平面的法向量（法向量不是唯一的，但它们都平行）. 方程（11-1）称为平面的点法式方程，而方程（11-2）称为平面的一般式方程.

特别，坐标面 Oxy 的方程是 $z=0$ [因为 $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ 是法向量且 $D=0$]；坐标面 Oyz 的方程是 $x=0$；坐标面 Ozx 的方程是 $y=0$.

例 1 求通过点 $M_0(1, 0, -1)$，$M_1(2, 1, 1)$ 与 $M_2(-1, 1, 2)$ 的平面方程.

解一 $\overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2}$是它的法向量，而

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (1, 1, 2), \qquad \overrightarrow{M_0M_2} = (-2, 1, 3)$$

所以

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = (1, -7, 3) = \boldsymbol{n}$$

又它过点 $M_0(1, 0, -1)$，从而该平面的方程是

$$\underset{\text{（点法式）}}{(x-1) - 7(y-0) + 3(z+1) = 0} \quad \text{或} \quad \underset{\text{（一般式）}}{x - 7y + 3z + 2 = 0}$$

解二 设要求的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$（A，B，C，D 为待定常数）. 将点 M_0，M_1，M_2 的坐标依次代入方程，则可得

$$\begin{cases} A - C + D = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ -A + B + 2C + D = 0 \end{cases} \qquad \text{解得} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{D}{2} \\ B = -\dfrac{7D}{2} \\ C = \dfrac{3D}{2} \end{cases}$$

因此得

$$\frac{D}{2}x - \frac{7D}{2}y + \frac{3D}{2}z + D = 0$$

消去 D 得平面方程 $x-7y+3z+2=0$（一般式）.

读者看到，表面上看方程（11－2）中有四个待定常数，而实质上只有三个相互独立的待定常数．这与几何中的结论“不在同一直线上的三点决定一个平面”是一致的．

小结：

第一，求平面的点法式方程时，应首先找出平面上的已知点 M_0 和它的法向量 $\boldsymbol{n}$；

第二，平面的一般式方程中不含常数项时，说明平面通过坐标原点；

第三，平面同时与三个坐标轴相交且不通过坐标原点时，它的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (abc\neq 0)$$

其中 a，b，c 为它在相应坐标轴上的截距（图 11－2）.

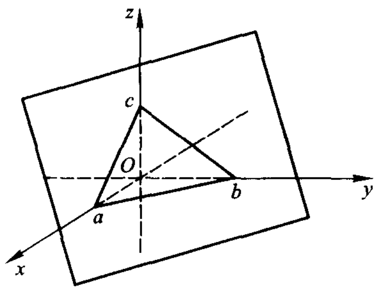


图 11－2

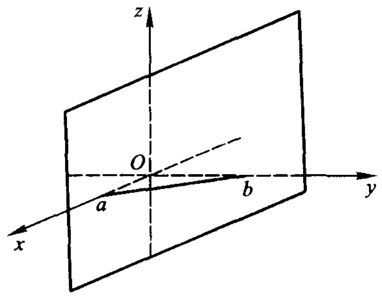


图 11－3

第四，平面的一般式方程中缺少哪个坐标，说明平面平行于哪个坐标轴．例如平面

$Ax+By+D=0$ 平行于 Oz 轴（化成截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，见图 11－3）

若方程中缺少两个坐标时，说明平面平行于哪两个坐标轴决定的坐标平面．例如平面 $x=a$ 平行于坐标平面 Oyz，且在 Ox 轴上的截距为 a.

2. 直线方程　平行于某一直线的向量称为该直线的方向向量（图 11－4（1））.

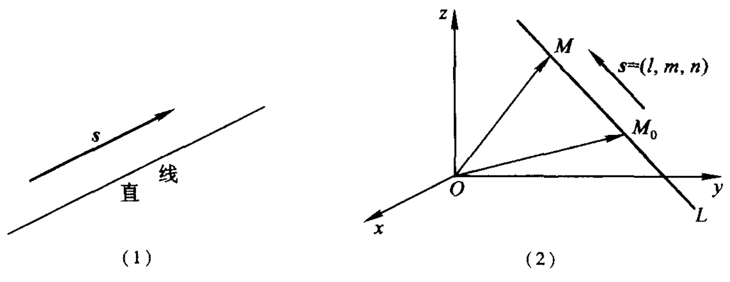


图 11－4

设非零向量 $s=(l, m, n)$ 是某条直线 L 的方向向量（图 11-4（2）），点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为该直线上的固定点，点 $M(x, y, z)$ 为该直线上任一点. 因为 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ 平行于 $s=\{l, m, n\}$，则有实数 t 使

$$\overrightarrow{M_0M}=ts \quad 或 \quad (x-x_0, y-y_0, z-z_0)=(tl, tm, tn)$$

因此得

$$x=x_0+tl,\ y=y_0+tm,\ z=z_0+tn$$

反之，只要点 (x, y, z) 满足这一方程（参数方程），则它一定在这一直线上. 于是，就称

$$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+tn \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty) \tag{11-3}$$

为该直线的参数式方程（t 是参数）. 因为由它可得

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (=t) \tag{11-4}$$

所以这也是上述直线 L 的方程，称它为直线的点向式方程（也称它为标准方程或对称方程）. 请读者注意，有时可能会有 $l=0$ 或 $m=0$ 或 $n=0$（但不会全是 0），在这种情形下，譬如 $l=0$（$m\neq0$，$n\neq0$），就把方程（11-4）形式上仍记成

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

最左端一式的意思是 $x=x_0$，所以又可把它确切地记成

$$\begin{cases} x=x_0 & （平行于坐标面 Oyz 且在 Ox 轴上的截距为 x_0 的平面） \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} & （平行于 Ox 轴的平面，因为方程中缺少坐标 x） \end{cases}$$

它是两个平面的交线（图 11-5）.

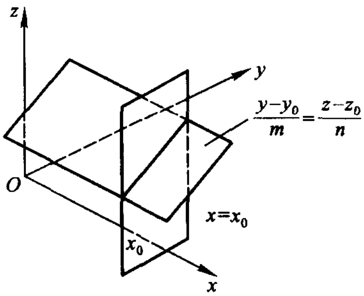


图 11-5

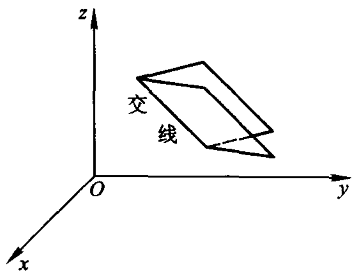


图 11-6

一般地，两个不平行的平面相交的交线（图 11-6）表示成

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{11-5}$$

称它为直线的一般式方程. 两个平面的一般式方程（三元一次方程）的联立方程组（11-5），只要两者的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1) \quad 与 \quad \boldsymbol{n}_2=(A_2,\ B_2,\ C_2)$$

不平行（即 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\neq\boldsymbol{0}$），它就表示一条直线（即它们的交线）.

直线的参数式方程与点向式方程之间的转换是容易的（如上面的做法）. 把它们转换为直线的一般式方程也是容易的，例如由式（11-4）可得直线的一般式方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m} \\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

但是由直线的一般式方程转换为直线的点向式或参数式方程，要麻烦一点. 请读者认真看一下例 2.

例 2 把直线的一般式方程

$$\begin{cases} 2x+y-z-1=0 & ① \\ x-2y+z=0 & ② \end{cases}$$

化为点向式方程和参数式方程.

解 先在交线上找出一点. 为此，设 $x=0$（取其他任一数值都可以），求解二元一次方程组

$$\begin{cases} y-z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases} \quad 即 \quad y=-1,\ z=-2$$

即找出了交线上一点（0，-1，-2）. 其次，交线既在平面①上，又在平面②上，所以交线既垂直于平面①的法向量，又垂直于平面②的法向量，即它同时垂直于

$$\boldsymbol{n}_1=(2,\ 1,\ -1) \quad 与 \quad \boldsymbol{n}_2=(1,\ -2,\ 1)$$

因此，向量积 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 是交线的方向向量，而

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$$

不妨取 $\boldsymbol{s}=(1,\ 3,\ 5)$ 为交线的方向向量（因为 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 平行）. 于是，交线的点向式方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{5}$$

从而参数式方程为

$$x=t,\ y=-1+3t,\ z=-2+5t\quad(-\infty<t<+\infty)$$

小结：

第一，求直线的点向式方程时，应首先找出直线上的已知点 M_0 和它的方向向量 $\boldsymbol{s}$；

第二，直线方程除点向式方程外，还有参数式方程和一般式方程，以及两点式方程（见习题）.

习题与注释

1. 在空间直角坐标系中，下列方程表示的平面有什么明显的特征？请画出它们的图形：

(1) $x=a$；　(2) $y=b$；　(3) $z=c$；　(4) $x+2y=1$；

(5) $y-z=0$；　(6) $x-y+z=0$；　(7) $2x+y+z=1$.

2. 求下列各平面的方程：

(1) 过点 $A(1,2,3)$ 且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(-2,0,1)$；

(2) 过点 $A(1,1,1)$ 和 Oy 轴；

(3) 过点 $A(2,0,1)$ 且与 Oz 轴垂直；

(4) 过点 $A(1,1,-1)$ 且平行于平面 $x-2y+3z+2=0$；

(5) 过点 $A(1,-5,1)$ 与点 $B(3,2,-2)$ 且平行于 Oy 轴；

(6) 过 Ox 轴且垂直于平面 $5x+3y-2z+3=0$；

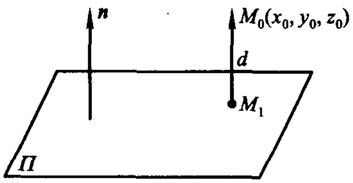
(7) 过三点 $A(1,-1,-2)$，$B(0,3,2)$ 与 $C(3,-1,1)$.

3. **平面的截距式方程**　若平面在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的截距依次为 a，b，$c(a\neq0,\ b\neq0,\ c\neq0)$，证明它的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

4. **点到平面的距离**　如第 4 题图所示，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



第 4 题图

证　如图所示，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面 Π 的法向量. 设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为点 M_0 到平面 Π 的垂线的垂足，则向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行，故数量积

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=\pm|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{M_1M_0}|=\pm d|\boldsymbol{n}|$$

注意到 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$（因为点 M_1 在平面上），与

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=Ax_0+By_0+Cz_0+D$$

故

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. 求点 $(-1,2,-3)$ 到平面 $5x-3y+z+4=0$ 的距离.

6. 求两平行平面 $2x-y+2z+9=0$ 与 $4x-2y+4z-21=0$ 之间的距离.

7. 求下列各直线的方程：

(1) 过点 $A(1,1,1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{s}=(1,0,0)$；

(2) 过点 $A(2,1,1)$ 且垂直于平面 $x-2y+z-4=0$；

(3) 过点 $A(1,2,-1)$ 和点 $B(1,0,2)$.

8. **直线的两点式方程** 设点 $A_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $A_2(x_2,y_2,z_2)$. 证明过此两点的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

9. 化直线

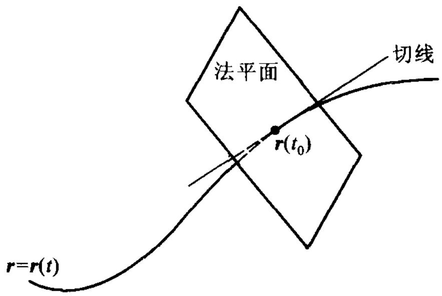
$$\begin{cases}2x+3y-z-4=0\\3x-5y+2z+1=0\end{cases}$$

为点向式方程和参数式方程.

10. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z-1=0$ 和 $y-3z-2=0$ 都平行的直线.

11. **空间曲线的切线与法平面** 设有空间曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$



第 11 题图

其中 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 可微分（§10-3）且 $|\boldsymbol{r}'(t_0)|\neq0$. 于是，曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 上点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的切向量为切线的方向向量，即

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

根据直线的点向式方程（11-4），曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 上点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处切线的方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

过点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 且垂直于上述切线的平面称为曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 处的法平面，而 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 正好是这个法平面的法向量. 因此，上述法平面的方程（点法式）为

$$x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0$$

答案与提示

2. (1) $2x-z+1=0$; (2) $x-z=0$; (3) $z=1$;
(4) $x-2y+3z+4=0$; (5) $3x+2z-5=0$; (6) $2y+3z=0$;
(7) $12x+11y-8z-17=0$.

5. $\frac{2}{7}\sqrt{35}$; 6. $\frac{13}{2}$.

7. (1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$ 或 $\begin{cases}y=1,\\z=1;\end{cases}$ (2) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$;

(3) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}.\end{cases}$

9. 在交线上任取一点，如（2，-7，-21），而方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(2,\ 3,\ -1)\times(3,\ -5,\ 2)$$

答案是$\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{-7}=\frac{z+21}{-19}$和$\begin{cases}x=2+t,\\y=-7-7t,\\z=-21-19t.\end{cases}$

10. 与两平面都平行，即它与两平面的法向量都垂直. 因此，直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,\ 0,\ 2)\times(0,\ 1,\ -3)$$

答案是$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

（二）二次曲面

在平面解析几何中，二元一次方程表示直线，二元二次方程表示抛物线、双曲线或椭圆（包括圆）. 同样，在空间解析几何中，三元一次方程表示平面，而三元二次方程表示曲面，称它为二次曲面. 由于一般的二次曲面的多样性和复杂性，为简单起见，我们只讨论后面要用到的特殊二次曲面. 读者在学习平面解析几何时都已经知道，解析几何是根据坐标法并用代数方法研究几何问题. 在空间直角坐标系中，一般曲面的方程为

$$F(x, y, z)=0$$

在特殊情形下，方程中可能会缺少一个或两个坐标. 当然，不是随便一个方程都能表示实在的曲面，因为它可能无解.

1. 球面 最简单又是最常见的二次曲面之一是球面，它是空间中到一定点的距离保持不变的动点的轨迹，其中那一定点称为该球面的球心（图 11－7）. 在空间直角坐标系中，设球心为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，动点为 $M(x, y, z)$，则球面方程为

$$|\overrightarrow{M_0M}|=R \quad 或 \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (11-6)$$

其中的正数 R 称为该球面的半径. 特别，以原点 $O(0, 0, 0)$ 为球心的球面方程是 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

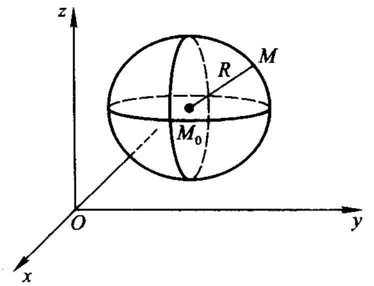


图 11－7

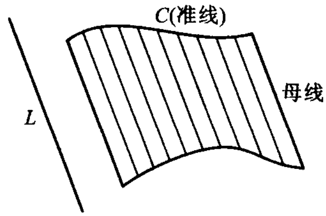


图 11－8

2. 柱面 平行于某固定直线 L 且与某固定曲线 C 相交的直线，沿曲线 C 平行移动所生成的曲面称为柱面（图 11－8），其中的曲线 C 称为该柱面的准线，而沿准线 C 平行移动的直线称为母线. 在空间直角坐标系中，若准线是 Oxy 平面上的圆（周）

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

而母线是垂直于 Oxy 平面的直线，则这样的柱面称为正圆柱面. 它的方程是

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (11-7)$$

看样子它的方程与准线方程是一样的，而由于坐标系不同，称前者为圆（周）（在 Oxy 平面上），称后者为圆柱面（在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中）. 在空间直角坐标系中，上述准线的方程应记成

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \\ z=0\end{cases}$$

即它是圆柱面（11－7）与平面 $z=0$ 的交线. 圆柱面（11－7）也是二次曲面. 特别地，若一个圆柱面的准线是 Oxy 平面上的圆（周）$x^2+y^2=R^2$，且 Oz 轴是它的中心轴时，则该圆柱面的方程是

$$x^2+y^2=R^2 \text{（图 11－9）}$$

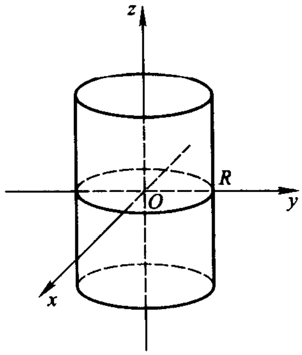


图 11－9

同理，若准线是 Oxy 平面上的椭圆，抛物线，双曲线，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2=2px,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

则当母线平行于 Oz 轴时，柱面依次称为椭圆柱面、抛物柱面、双曲柱面. 它们的方程形式上还是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2px,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11-8}$$

（图11－10）（图11－11）（图11－12）

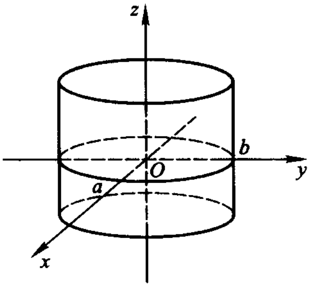


图 11－10

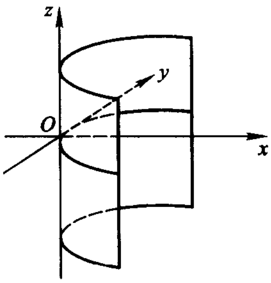


图 11－11

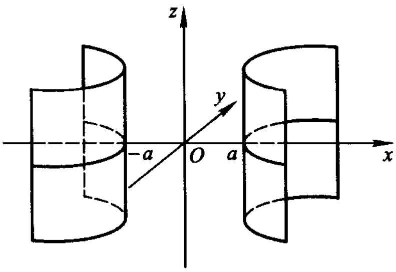


图 11－12