

首都师范大学初等教育研究所
首都师范大学初等教育学院
组织编写

实践取向

小学教师教育教程



数学教学基础

郜舒竹 主编

SHIJIAN QUXIANG
XIAOXUE JIAOSHI JIAOYU JIAOCHENG
SHUXUE JIAOXUE JICHU



教育科学出版社

实践取向

小学教师教育教程



数学教学基础

郜舒竹 主编

教育科学出版社
· 北 京 ·

责任编辑 杨晓琳

版式设计 尹明好

责任校对 张 珍

责任印制 曲凤玲

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教学基础/郜舒竹主编. —北京: 教育科学出版社,

2007. 3

实践取向小学教师教育教程

ISBN 978-7-5041-3771-5

I. 数… II. 郜… III. 数学课-教学研究-小学-
师资培训-教材 IV. G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 027696 号

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号 市场部电话 010-64989009

邮 编 100101 编辑部电话 010-64989593

传 真 010-64891796 网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

印 刷 北京人卫印刷厂

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 16.25

字 数 249 千

定 价 25.00 元

版 次 2007 年 3 月第 1 版

印 次 2007 年 3 月第 1 次印刷

印 数 1-5 000 册

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

前言

2001年7月国家教育部颁布《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（以下简称数学课程标准）以来，我国数学课程改革的实验已经经历了5年的时间。在此期间，广大一线教师面对诸多的新理念、新教材、新教法，不可避免地产生了大量的困惑与问题。为了使得教师教育更具针对性和实效性，我们及时搜集并整理了来自一线教师的困惑与问题，通过大量国内外文献的检索，编撰出本书。

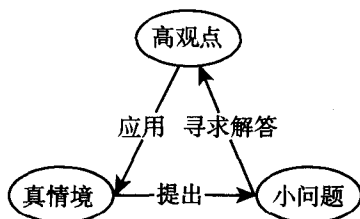
本书作为小学数学教师的培训教材，其目的在于从数学学科的角度为小学教师教育提供素材。其内容涉及数学教育所研究的核心领域，主要包括数学教师的研究、数学教材的研究、学生的数学学习研究这样三个核心领域。

关于数学教师的研究，主要讨论在我国数学教育研究中相对忽视的数学观和数学知识两个方面，国外已有的研究表明，这两个方面在教师知识结构和能力结构中占有核心地位。数学教材是沟通教师与学生的载体，是开展数学教学和数学学习的重要依据，本书基于一线教师对于数学教材所提出的问题与困惑讨论了教材的相关理论，同时也介绍了国外小学数学教材的发展状况。学生的数学学习这一研究领域在数学教育研究中至关重要，是所有其他方面研究的基础。本书中选择学生的数学错误作为研究视角，重点讨论错误的辨别、错误产生的原因以及错误产生的合理性，期望读者能够把学生数学错误的研究长期、深入地继续下去。

除此之外，本书还对课程改革后小学数学教材中出现的新专题进行了分析与讨论，主要涉及对教学内容的理解、教学方式的选择以及评价等方面。其内容贴近一线教师的教学实践，同时反映国内外诸多的研究成果，为读者展示了丰富、系统的教育教学观念、教学设计策略以及相关的理论。

本书的设计思路是从小学数学教学真实的情境中提取教师所熟悉的小

问题开展分析与研究，进而利用相关的理论观点从较高的视角审视、解决这样的小问题。建议教师们按照这样的思路，重新回到自己的教学实践中，继续提取新的问题并尝试去解决这些问题，我们希望得到的效果是如下图所示的良性循环。



为了更好地体现这种培训思路，我们还编写了《实践取向小学教师教育教程——数学教学案例》一书，其目的在于使得“真情境”的内容更加鲜活、丰富，同时也为教师们提供更多可操作的教学策略和方法。

本教程全部内容都是基于大量的文献检索和现场调查，是作者近几年来从事数学教育和小学教师教育的研究成果。因此，本书对于数学教育的相关研究亦应有一定的参考。尽管初衷良好，限于水平，疏漏仍然难免，企盼读者及同行的慧眼使之更加完善。

参与本书设计、编写的人员包括（按姓氏音序）：池佳、高珊、郜舒竹、洪小辉、姜巍、李燕、吴万岭、薛涟霞，全书由郜舒竹统稿。编写过程中，得到了首都师范大学初等教育学院院长王智秋教授的悉心指导，同时得到了教育科学出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

郜舒竹
2007年元月
于首都师范大学

目 录

第一章 小学教师的数学观.....	1
第一节 数学观.....	3
一、什么是数学观.....	3
二、数学观的研究内容.....	4
三、数学哲学研究中的数学观.....	4
四、关于“什么是数学”的经纬之说.....	5
五、数学教师的数学观.....	7
第二节 教师数学观的相关研究.....	8
一、数学教师数学观的历史演变.....	8
二、对数学教师数学观的分类.....	14
三、对数学观的实证研究及其结果.....	16
第三节 对教师数学观的研究.....	17
一、教师数学观的分类.....	17
二、问卷编写的依据.....	18
三、研究的结果.....	19
四、调查研究结果的启示.....	21
第四节 案例与评析.....	22
参考文献.....	27
第二章 数学教师的学科知识.....	30
第一节 教师的学科知识面临挑战.....	31
第二节 数学教师的知识结构.....	36
一、教师知识.....	36
二、教师知识的结构.....	39
三、数学教师知识的构成.....	44
第三节 数学教师的学科知识.....	46



一、学科知识——教师知识的基础	46
二、教师数学学科知识的构成	48
三、教师学科知识的水平	52
第四节 教师数学学科知识的案例与思考	58
参考文献	62
第三章 数学教材	65
第一节 关于“小学数学教材”的诸多困惑	65
第二节 数学教材	72
一、什么是教材	72
二、教材的作用	73
三、数学教材的结构	75
四、我国小学数学教材的结构及特点	76
五、教材内容的选取	77
第三节 小学数学教材的编写依据	79
一、数学的特点	79
二、小学生数学学习的特点	83
三、社会发展的需要	84
四、数学课程标准	85
第四节 小学数学教材新特点	86
一、密切联系生活	86
二、突出问题解决	87
三、拓宽探索空间	88
四、注重情感体验	89
五、提供实践活动	90
第五节 国外小学数学教材	91
一、小学数学教材改革的发展简史	91
二、国外小学数学教材特点	92
参考文献	101
第四章 小学生数学错误的研究	103
第一节 问题的来源	103

一、真实的错误案例·····	103
二、为什么要研究学生的数学错误·····	105
第二节 数学错误研究框架·····	111
一、数学错误研究的基本领域·····	112
二、数学错误研究的主要内容·····	112
三、数学错误研究的常用方法·····	114
第三节 识别“错误”的标准·····	115
一、关于错误的相关界定·····	116
二、数学知识错误的标准·····	117
第四节 数学错误的规律·····	119
一、数学概念错误·····	120
二、数学计算错误·····	121
第五节 学生做题时为什么出错·····	124
一、小学生如何学习数学·····	124
二、错误原因的维度划分·····	129
第六节 问题与讨论·····	136
参考文献·····	140
 第五章 教师对待学生数学错误的态度·····	143
第一节 学生错误存在的合理性和必然性·····	143
一、错误的研究基础·····	144
二、错误存在的心理学基础·····	146
三、小学生数学学习的特点和层级·····	147
四、学习水平的层级理论·····	148
第二节 学生错误是有效的教学资源·····	154
一、学生错误的价值·····	154
二、对学生错误的利用·····	166
第三节 教师对待学生数学错误的态度·····	168
一、教师对待学生数学错误的态度·····	168
二、教师对待学生数学错误的实然态度·····	169
三、教师对待学生数学错误的应然态度·····	176

参考文献	183
第六章 走进数学课堂	186
第一节 数学教学实例分析	186
第二节 数学教学机智	203
一、转变教育教学观念	203
二、关于主题图的使用	205
三、关于估算教学	207
四、关于统计与概率的教学	209
五、关于数学实践活动的教学	210
六、让课堂活起来	213
七、关于数学探究的教学	215
八、关于课堂评价	217
参考文献	221
第七章 数学教师的可持续发展	223
第一节 数学教师发展面临的问题	223
第二节 数学教师的专业化发展	225
一、教师专业发展成为必然	225
二、教师专业发展的含义	226
三、数学教师专业发展的途径	229
第三节 成为反思型数学教师	230
一、什么是教学反思	230
二、如何进行教学反思	232
三、如何写好教学反思	237
第四节 数学教师成为研究者	238
一、教师成为研究者的源起与历程	238
二、对“研究”的理解	239
三、教师成为研究者的意义	240
四、教师成为研究者的途径	241
参考文献	250

第一章

1

小学教师的数学观

2001年,我国开始推行新一轮课程改革,对于数学教育的改革,首先应当重新思考这样一个基本问题——什么是数学。对于一名数学教育工作者来说,对数学的看法与之教学实践有着密切的关系。以下是一份关于小学教师数学观的调查问卷,读者可以借此做一个自我测试。

小学教师数学观调查问卷

本问卷的目的在于全面了解数学教师对数学教学的真实看法。回答没有对错之分,不必留姓名,因此您不必有任何顾虑。您真实的回答对我们的研究将大有帮助。

非常感谢您的支持与合作!

一、以下说法您属于哪一项,请在该项上画√

1. 您所在的学校(城区,郊区)
2. 您是否学过高等数学(是,否)
3. 您刚工作时的学历(中专,大专,本科或以上)
4. 您的性别(男,女)
5. 您从事数学教育工作(1—5年,5—10年,10年以上)
6. 您的职称(低于小学一级,小学一级,小学高级,中学高级)

二、量表题(根据下列要求,在括号中填入相应数字)

非常同意	比较同意	中立	比较反对	非常反对
5	4	3	2	1

- () 1. 数学课本上的例题一定要讲,练习题要全做。
- () 2. 小学数学中的基础知识也应当随时代的发展而变化。
- () 3. 学生要学好数学就必须做大量的练习。

- () 4. 数学的课堂教学应当以学生的活动为主。
- () 5. 计算教学应当特别重视对算理的理解。
- () 6. 备课的主要依据应当是数学课本及相应的教学参考书。
- () 7. 学生的数学成绩并不重要,重要的是他是否喜欢数学。
- () 8. 生活中处处充满了数学问题,我们应该努力去发现它们。
- () 9. 学习新知识前,应该首先复习与之相关的旧知识。
- () 10. 新知识点的教学应当主要由教师讲授。
- () 11. 批改完作业后应该及时发下去让学生改错。
- () 12. 教师在备课时应当首先思考学生的学而不是教师的教。
- () 13. 小学数学知识是今后学习数学必不可少的基础。
- () 14. 在数学课堂上,应当经常问“为什么……”这样的问题。
- () 15. 在数学课堂上,教师应该给学生足够的时间进行学习活动,而不必顾忌是否能完成教学任务。
- () 16. 数学成绩好的学生,其他学科的成绩一定不会很差。
- () 17. 在数学教学中应当根据学生情况,对课本内容作相应的调整。
- () 18. 数学教师要特别重视解题方法的教学。
- () 19. 数学教师的最重要职责就是使学生牢固记忆数学中的概念、公式、方法等知识。
- () 20. 数学课堂上,教师应该关注那些不积极举手发言的学生。
- () 21. 数学概念应该在理解的基础上记忆。
- () 22. 小学生在数学学习过程中不应该使用计算器。
- () 23. 备课时应该首先钻研教材、理解教材。
- () 24. 考试成绩是评价学生数学学习水平的唯一标准。
- () 25. 在计算机逐渐普及的今天,熟练的计算能力就不再需要了。
- () 26. 每一位学生都要完成统一布置的数学作业。
- () 27. 数学教学应该特别注重揭示知识点间的联系。
- () 28. 数学教师应该努力了解学生的生活经验。
- () 29. 数学课堂上教师的语言应该简单、科学和准确。
- () 30. 数学教师应当有权利依据自己学生的情况选择或编写数学教科书。

三、简答题

数学是什么?

以上问卷的主体部分是 30 道量表题,可以考查教师在三种数学观上的倾向程度,三种数学观及其相关的题目分别如下:

工具主义数学观:第 1、3、6、10、11、16、19、22、24、26 题;

柏拉图主义数学观:第 5、8、9、13、14、18、21、23、27、29 题;

问题解决数学观:第 2、4、7、12、15、17、20、25、28、30 题。

量表部分共分为 5 个等级:1 表示非常反对;2 表示比较反对;3 代表中立;4 表示比较同意;5 表示非常同意。在每一类数学观上的满分是 50 分。如果在某一观念所得的总分越高,说明对这一观念认可程度越高。

本章主要介绍关于数学观的各家之说,涉及数学史以及数学哲学方面的内容,并从实证的角度谈了一些重要的研究。在此之后,呈现了对部分小学教师进行问卷和访谈研究所得出的主要研究结论。

第一节 数学观

一、什么是数学观

数学观是指人们对数学的总的根本的看法。在实际教学中,研究教师的数学观对数学教学有十分重要的作用,教师的数学观与其实际教学有着密不可分的关系(如图 1-1 所示),同时教学实践还受多种社会因素的影响。郑毓信(2001)提到,对教师的数学观应作广义的理解,它同时包含

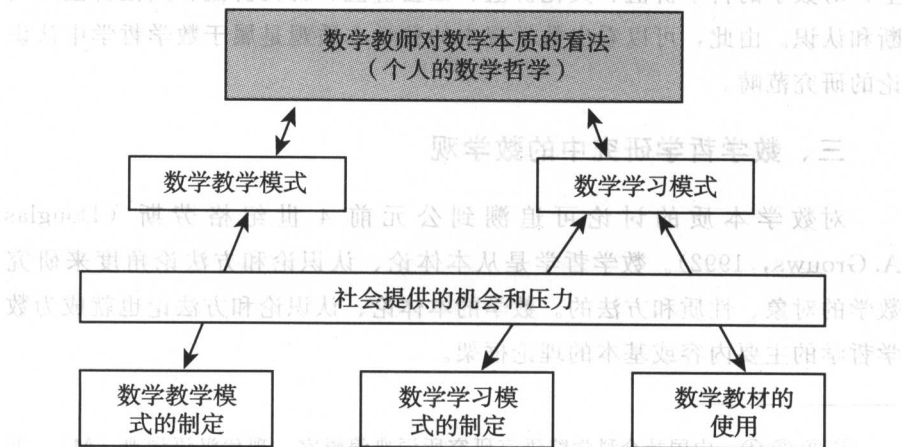


图 1-1 数学观与教学实践的关系

了对“什么是数学”和“应当怎样去从事数学研究”的认识。从图 1-1 可以看出,教师的数学观不但影响到他们对数学教学和数学学习的看法,还间接作用于实际的数学教学,因此它在数学教学中处于十分核心的地位,一个数学工作者的数学观决定了他从事数学活动的方式。

二、数学观的研究内容

“世界观”是指人们对世界的总的根本的看法^①。“观念”在现代汉语词典中有两个意思:思想意识;客观事物在人脑里留下的概括的形象^②。“观”指对事物的认识或看法^③。在英语中“belief”表示观念的意思,它的意思是所相信的事物,是人的思想体系的一部分。由此看来,数学观属于观念的范畴,“数学观”是指人们对数学的总的根本的看法。国内学者黄秦安(2004)认为数学观由数学知识观、数学本质观和数学价值观构成。数学知识观主要包括必备的、一定质量与数量的数学知识、技能、能力、数学思想方法以及对数学知识的总体看法两部分。数学本质观是指对数学本质的认识,即数学本质上到底是什么。在现代汉语词典中“本质”指事物本身所固有的,决定事物性质、面貌和发展的根本属性。事物的本质是隐蔽的,是通过现象来表现的,不能用简单的直观去认识,必须透过现象掌握本质^④。在英语中“nature”表示本质的意思,它指某人或某物区别于其他个体的性质或特征。数学价值观是在一定数学本质观念的基础上,对数学的科学价值、文化价值、社会价值、历史价值和其他价值的判断和认识。由此,可以看出数学观中的数学本质观是属于数学哲学中认识论的研究范畴。

三、数学哲学研究中的数学观

对数学本质的讨论可追溯到公元前 4 世纪格劳斯(Douglas A. Grouws, 1992)。数学哲学是从本体论、认识论和方法论角度来研究数学的对象、性质和方法的。数学的本体论、认识论和方法论也就成为数学哲学的主要内容或基本的理论框架。

①②③④ 中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典 [M]. 北京:商务印书馆, 2005.

数学本体论是关于存在及数学本质和规律的学说，它在数学哲学中表现为，数学对象及其存在性和客观性。

数学认识论涉及哲学上思维与存在的关系，它主要研究数学的本质或性质、数学理论真理性的标准等问题。

数学方法论是关于认识世界和改造世界的方法的理论。一般认为，由于认识和改造对象的不同，形成普遍性程度不同的三个层次的方法论：哲学方法论、一般科学方法论和具体科学方法论。数学作为一门具体科学，它的方法论应该属于具体科学方法论。数学方法论就是以具体的数学研究方法为对象，探讨各种数学方法的性质、特点和联系，并从个性中找出共性、从个别中探求一般，从而找出具有普遍意义的方法，得出关于数学研究方法的规律性认识（林夏水，2003）。

四、关于“什么是数学”的经纬之说

以上讨论了数学观的所属范畴及研究内容，教师的数学观对他们的实际教学会产生深远的影响，那么到底什么是数学，人们是怎样看待数学的呢？以下列举了一些学者对数学的看法。

中国古代有学者认为数学是术^①，是用来解决生产与生活问题的计算方法；古希腊学者认为数学是理念，是关于世界本质的学问。数学对象是不依赖于人类思维的客观存在，但可以通过亲身体验，借助观察试验和抽象获得相关的知识。由此看出，古代学者对数学大致有两种看法，一种认为它是用来解决实际问题的，是一种实践的经验，是与人的生产生活紧密联系的；一种认为它是超脱于人类物质世界的一种思想意识。现在还有一些观点认为数学是一个公理体系；数学是结构的科学，其任务就是在许多不同的背景下，以精确的和客观的形式，系统地分析共同的和基本的结构特征。

恩格斯断言，数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学，所以是非常现实的材料。弗赖登塔尔（H. Freudenthal）认为，数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映，也是组织这些现象的工具，因而数学在现实世界中有它的现象学基础。柯尔

^① 即方法、策略。

莫哥洛夫 (A. H. Kojimoropob) 也提出数学的研究对象产生于现实, 但数学又必须离开现实 (抽象), 由于数学内容的不断丰富, 应用范围的不断扩大, 因而并非完全脱离现实; 他同时又主张, 所有数学的基础是纯集合论, 数学的各专门分支研究各种特殊的结果, 每一种结构由相应的公理体系所确定。

同时也有人认为数学全然不涉及观察、归纳、因果等方法; 数学家工作的起点, 只需要少数公理。还有人认为数学家需要有高度的直觉和想象力。步入现代社会人们又提出了许多对数学的看法, 如数学是模式的科学; 数学是科学, 数学更是一门创造性的艺术; 数学是科学, 数学也是一门技术; 数学是一种语言; 数学是一种文化 (唐瑞芬, 2001)。

数学发展史上对数学的看法, 还存在着类似于哲学史上二元论的思想, 如:

◆ 数学认识究竟是一种“发现”, 还是一种“发明”。

“我认为, 数学的实在存在于我们之外。我们的职责是发现它或是遵循它, 那些被我们所证明并被我们夸大为是我们‘发明’的定理, 其实仅仅是我们观察的记录而已。” (G. Hardy)

“数学是人类的发明, 这一点是最纯粹的自明之理, 是稍微观察一下就能发现的事实。”

“我们已经克服了这样的概念, 即认为数学真理具有独立的和远离我们头脑的存在。我们居然有过这种概念, 但这一点就够奇怪的了。” (E. Kasner 和 J. Newman)

持“发明说”的数学家还往往强调数学活动的“构造性”, 即如:

“数学家是‘通过构造’而工作的, 它们‘构造’越来越复杂的组合。” (H. Poincare)

◆ 除“发现”与“发明”的对立以外, 还有“逻辑”与“直觉”的对立。

“数学首先是一种探讨研究的方法。这个方法包括对所讨论的概念认真地下定义以及明确地给出一些用于推理的基础假设。从这些定义和假设出发再运用最严格的逻辑推导出结论。然而数学家还需要有高度的直觉和想象力。正因为这种能力, 他们才能打破时代的僵化传

统并建立新的、革命性的概念。”(Y. Chavan)

“直觉比以往任何时候都更加成为数学发现的创造源泉。”
(N. Bourbaki)

由以上所述可以看出,如果从哲学的根本观点上来刻画数学的本质,不外乎以下两种不同的看法:一种是动态的,将数学描述为处于成长发展中,因而是不断变化的研究领域,即将数学看做是一个过程;另一种则是静态的,将数学定义为具有一整套已知的、确定的概念、原理和技能的体系。

五、数学教师的数学观

1. 教师如何看待数学教学

数学教师天天在教数学,但是否认真思考过这样的问题:为什么要进行数学教学?应当怎样去进行数学教学?我们是按照怎样的数学教学观在从事数学教学的?

这里涉及很多根本性的认识,比如数学教育的目标是什么?是纯数学的——主要关注数学知识的传授,人本主义的——主要涉及人的理性思维和创造性才能的充分发展,还是实用主义的——主要关注实用的数学技能的掌握。再如数学学习与数学教学活动的本质是什么?是学生对于老师所授予知识的被动的接受,还是以其已有的知识和经验为基础的、主动的建构过程,可以说教师的数学观和数学教学观,是其进行数学教学的基本出发点。由这些基本观念,也就决定了数学教学的内容、模式与方法、数学课堂活动的准则以及教师与学生各自的作用与地位等一系列问题的探讨与抉择,从而也就决定了数学教学的实施与效果。

数学教学观应该是数学教师对关于数学本质以及学习数学的认知过程的一种认识,他不仅涉及数学的性质与特征,更涉及获得知识的认知过程,或者说学习数学的规律。除了思考教学内容的数学知识与方法的科学性以外,必须确定对教学形式与方法的认识,同样要以科学的方法确定收数学知识的条件与实质。教师的数学观不同于教师的教学观,它在某种程度上决定着教学观,在数学教学中起着至关重要的作用。

2. 数学教师的数学观

数学自产生之日起就存在着两种数学观的对峙。一种是把数学看做解决实际问题的知识,以古巴比伦、埃及和中国为代表。另一种是把数学看做训练人的心智的工具,以古希腊为代表。人们对数学本身有自己的认识,当数学发展成为一门学科时,随着它作为一门学科的成长,我们就将它与数学教师、学习数学的学生紧密地联系在一起了。不仅要考虑数学本身,还要看到数学作为人类文化传统的性质,数学知识在被人接受和被人教授时的特点。数学教育中的数学观包括“数学”与“教育”这两个方面。“新数学运动”的失败在某种程度上要归咎于它过分强调了“数学”一方,忽视了“教育”一方,忽视了人的接受能力。进步主义倡导者提出“以儿童为中心”,当它在数学教育中极端推行后以失败告终,在某种程度上是因为它过分强调了“教育”一方,而忽视了“数学”一方。

数学教师的数学观是数学教育中的数学观,它要从数学教学的角度去看数学。数学教师的数学观不同于其他人的数学观,但也受其他人对数学的看法的影响,特别是要受到数学自身发展的影响,因此也更多地受到数学家的数学观的影响。人类社会对数学的需要程度,数学自身的前沿的发展,教育界的新观点都会影响到数学教师的数学观。每一位数学教师的数学观和整个教师群体的数学观都不是一成不变的。教师群体的数学观会随着社会的发展而发展,随着数学和教育的发展而发展。每一位数学教师的数学观也会随自身教学经验、自身数学知识的发展而发展。

第二节 教师数学观的相关研究

一、数学教师数学观的历史演变

1. 古希腊时期的数学观

(1) 古希腊时期人们对数学的看法

在古希腊时期,没有专门的数学教学和数学教师,有教育影响的是那些哲学家。他们的数学观对当时数学的教育有很大影响。影响力较大的有毕达哥拉斯(Pythagoras)学派、柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristoteles)。毕达哥拉斯学派认为,数学对象独立存在于可感事物之中;柏