奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

立体几何

【吴国建 编著】

奥博丛书
高中数学奥林匹克系列
浙江奥数网 www.zjaoshu.com
西泠印社出版社

立体几何

【吴国建 编著】

12345678901234567
234556-4534574.456787867
012478+78665
4534234/43454
21374678546789456789
1237864534531.4486786
453678964523451(12564564
2123156486115
6546515648

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试. 立体几何/吴国建主编. - 杭州：西泠印社出版社，2006.6

(奥博丛书)

ISBN 7 - 80735 - 077 - 6

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 吴...　Ⅲ. 立体几何课—高中—解题　Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064127 号

吴国建：东阳中学教学处主任，高级教师、教育硕士，浙江师范大学兼职教师，数学奥林匹克一级教练，2002、2005年全国高中数学竞赛优秀教练员。长期从事数学教学和教育研究、奥数辅导，发表专业论文30余篇，主编或参编教学用书10余册，主持或参与课题研究8项，辅导学生参加全国联赛获一等奖近10人，2002、2005两届东阳中学均获全国联赛浙江省团体优胜奖。

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说："欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书，则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的。"其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味（taste），也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单墫

2006年3月16日

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

本册主编　吴国建

丛书总策划　徐　莹

丛书审稿　王祖樾　李名德　徐士英　王航平

业务联系　地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室

电话：0571－85028528　85021510

传真：0571－85028578

目 录

第1章 立体几何基础知识

第2章 立体几何中的证明问题

第3章 立体几何中的计算问题

第4章 多面体与球

第5章 空间向量与立体几何

第1章 立体几何基础知识

1.1 平面基本性质

知识概要

一、平面的概念与性质

平面是从实体中抽象出来的一个概念，它没有大小、没有边界、没有厚薄，可以无限延伸，常用平行四边形表示平面，记作平面 α、β、γ…或平面 AC 等. 水平放置的平面，作图时通常将平行四边形的锐角画成 $45°$，横边画成邻边的两倍. 当一个平面的一部分被另一部分遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画. 如果点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；如果点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$. 如果直线 l 上任一点都在平面 α 内，则称直线 l 在平面 α 内或平面 α 经过直线 l，记作 $l\subset\alpha$；否则称直线 l 在平面 α 外，记作 $l\not\subset\alpha$，如图 1－1.

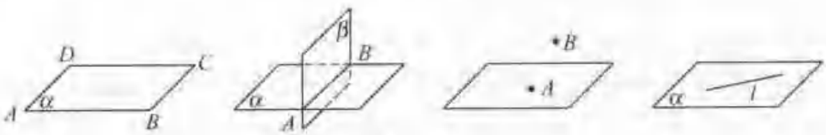
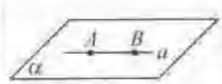
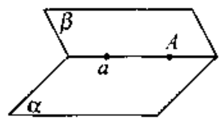
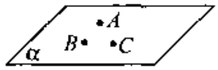
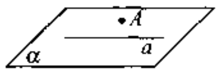
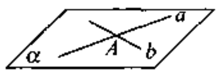
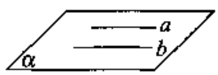


图 1－1

二、平面具有以下公理及推论

基本性质	作用	图形	符号表述
公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内	判定直线是否在平面内		$A\in a$，$B\in a$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow a\subset\alpha$

（续　表）

基本性质	作　用	图　形	符号表述
公理2：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线	1. 判定两个平面相交 2. 证明点在直线上 3. 证明诸点共线 4. 画两个平面交线		$A\in\alpha$、$B\in\beta\Rightarrow A\in\alpha$ $\alpha\cap\beta=a$
公理3：经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面	1. 确定平面 2. 证明两平面重合 3. 证明点线共面 4. 作截面和辅助平面		A、B、C 不共线，则过 A、B、C 可作平面 α
推论1：经过一条直线和直线外一点，有且只有一个平面			$A\notin a$，则过 A 和 a 可作平面 α
推论2：经过两条相交直线，有且只有一个平面			$a\cap b=A$，则过 a，b 可作一平面 α
推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面			$a\parallel b$，则过 a，b 可作平面 α

例题精讲

例1　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 D_1C_1，B_1C_1 的中点，$AC\cap BD=P$，$A_1C_1\cap EF=Q$.

求证：(1) D，B，F，E 四点共面；

(2) 若 A_1C 交平面 $DBEF$ 于 R 点，则 P，Q，R 三点共线.

分析　证明点或线共面的问题，往往可根据平面的基本性质利用题给部分元素作出一个平面，再依据题设中的条件或公理去证明其余点或直线在所作的平面内，从而判定点或直线共面．这种方法称为纳入平面法．欲证若干点共线，也要根据平面的基本性质找出相关平面与平面的交线，证明这些点在这两个平面的交线上.

证明　(1) 如图1-2，

$\because$ EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线，

$\therefore$ $EF\parallel B_1D_1$.

在正方体 AC_1 中，$B_1D_1\parallel BD$，$\therefore$ $EF\parallel BD$.

EF，BD 确定一个平面，即 D，B，F，E 四点共面.

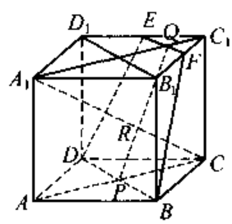


图1-2

(2) 在正方体 AC_1 中,设 A_1ACC_1 确定的平面 α,又设平面 $DBFE$ 为 β.

$\because Q \in A_1C_1$, $\therefore Q \in \alpha$,又 $Q \in EF$,$\therefore Q \in \beta$,

则 Q 是 α,β 的公共点.

同理 P 点也是 α,β 的公共点,$\therefore \alpha \cap \beta = PQ$.

又 $A_1C \cap \beta = R$, $\therefore R \in A_1C$, $R \in \alpha$,

且 $R \in \beta$,则 $R \in PQ$,即 P,Q,R 三点共线.

例2 一条直线与三条平行线都相交,求证这四条直线共面.

已知:直线 $a /\!/ b /\!/ c$,直线 l 分别交 a,b,c 于 A,B,C 三点.求证:直线 a,b,c,l 共面.

证明 $\because l \cap a = A$,$\therefore$ 可过直线 a,l 确定平面 α.

$\because a /\!/ b$,$\therefore$ 可过直线 a,b 确定平面 β.

$\because l \cap a = A$, $\therefore A \in \beta$,$A \in l$. $\because b \cap l = B$, $\therefore B \in \beta$, $B \in l$,

$\therefore l \subset \beta$.

又 $\because$ 过 a,l 只有一个平面, $\therefore \alpha$,β 重合,

$\therefore b \subset \alpha$,同理可证 $c \subset \alpha$.

即 l,a,b,c 共面.

评注 (1) 先分别利用题给的部分点、线元素作出不同的两个平面 α,β,再根据平面的基本性质确定 α,β 重合.这种证明共面的方法叫做同一法.同一法也是证明点线共面的常用方法.

(2) 本题结论可以推广为:与同一条直线相交的所有平行线都在同一个平面内.

例3 三个平面两两相交,得到三条交线.若其中两条交于一点,则第三条也过这个交点.

分析 在证明三条直线 a,b,c 交于一点时,可以先找出两直线 a,b 的交点 P,然后证明 P 点在以 c 为交线的两个平面上,从而确定点 P 在直线 c 上.

已知:如图 1-3 所示,$\alpha \cap \beta = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\alpha \cap \gamma = c$,且 $a \cap b = P$.求证:$P \in c$.

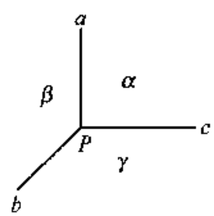


图 1-3

证明 $\because \alpha \cap \beta = a$, $a \cap b = P$,

$\therefore P \in \alpha$, $P \in \beta$.

又 $\beta \cap \gamma = b$, $P \in b$,

$\therefore P \in \gamma$,

则 P 既在 α 上，又在 γ 上，

$\therefore$ P 在 α,γ 的交线 c 上，即 $P\in c$.

评注 本例的结论可进一步推广：三个平面两两相交，三条交线互相平行或交于一点.

例 4 在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB,AD 的中点，G,H 分别是 BC,CD 上的点，但 $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{HC}=2$.

求证：直线 EG,FH,AC 相交于一点.

分析 要证明三条直线交于一点，应先证明其中两条直线交于一点，再验证另一条直线也过这一点.

证明 如图 1-4，因为 E,F 分别是 AB,AD 的中点，

所以 $EF \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \dfrac{1}{2}BD$.

又因为 $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{HC}=2$，所以 $GH \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \dfrac{1}{3}BD$，

所以 $EF\parallel GH$，且 $EF\neq GH$，

故四边形 $EFGH$ 是梯形，

因此 EG,FH 的延长线必交于一点.

设 $EG\cap FH=P$，

因为 $GE\subset$ 平面 ABC，$FH\subset$ 平面 ACD，

$\therefore$ $P\in$ 平面 ABC，$P\in$ 平面 ACD，

$\therefore$ $P\in AC$，

即 AC 必过 EG 与 FH 的交点 P，

故直线 EG,FH,AC 必相交于一点.

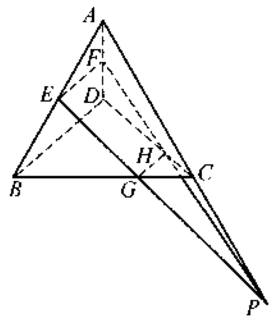


图 1-4

例 5 一个平面把空间分成 2 部分，两个平面最多把空间分成 4 部分，三个平面最多把空间分成 8 部分，那么，四个平面最多把空间分成几部分.

解 设第四个平面为 α，前 3 个平面与 α 都相交，且交线中没有两条平行、没有三线共点时，这四个平面把空间分成的部分最多. 这时，α 被前 3 个平面的交线最多分成 7 部分. 每一个部分都作为前三个平面已剖分的空间中某些新出现的空间的“隔板”，因此，在三个平面已剖分空间最多数目的基础上要加 7，即 15 部分.

关于点划分直线、直线划分平面、平面划分空间的问题，在各类竞赛试题

中屡有出现.通过研究,有如下基本规律.

分割元素数	被分成的部分的份数		
	点分直线	直线分平面	平面分空间
0	1	1	1
1	2	2	2
2	3	4	4
3	4	7	8
4	5	11	15
…	…	…	…
n	$n+1$		

设 n 个点分直线所成的部分数为 l_n,n 条直线把平面划分成的最多的部分数为 P_n,则 $P_{n+1}=P_n+l_n=P_n+(n+1)$.

设 n 个平面把空间划分成的最多的部分数为 K_n,

则 $K_{n+1}=K_n+P_n$.

利用递推数列的知识,可以求得 $P_n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1$,

$K_n=\frac{n^3}{6}+\frac{5n}{6}+1$.

例6 设空间被分为5个不交的非空集合,求证:一定有一个平面,它至少与其中的四个集合有公共点.

证明 设任意一个平面至多与其中3个集合相交,在不同的集合中各取一点,记为 A,B,C,D,E,则其中任意4点不共面,因而其中任意3点不共线,而且可过其中3点作一平面,使得其他两点位于该平面的两侧(平面 ABC,ABD,ABE 之一就具有这种性质).设这个平面过 A,B,C 三点,则它与直线 DE 的交点 F 属于各含点 A,B,C 的三个集合中的一个,设属于含点 A 的集合.于是过点 D,E,F,B 的平面至少与4个集合相交,矛盾.故命题成立.

1.2 多面体与欧拉公式

知识概要

一、多面体

由若干个平面多边形围成的几何体叫多面体. 围成多面体的各个多边形叫多面体的面,两个面的公共边叫多面体的棱,若干个面的公共顶点叫做多面体的顶点. 一个多面体至少有四个面,多面体依照它的面数分别叫做四面体、五面体、六面体等.

将多面体的任何一个面伸展为平面,如果所有其他各面都在这个平面的同侧,这样的多面体叫做凸多面体.

如果每个面都是有相同边数的正多边形,且以每个顶点为其一端都有相同数目的棱的凸多面体,叫正多面体. 正多面体只有五种:正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体. 其中正四面体、正八面体、正二十面体的面是正三角形,正六面体的面是正方形,正十二面体的面是正五边形.

常见的多面体有:

1. 棱柱:有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,这些面围成的几何体叫做棱柱. 两个互相平行的面叫棱柱的底面,其余各面叫棱柱的侧面,两个面的公共边叫棱柱的棱,侧面与底面的公共顶点叫棱柱的顶点,不在同一面上的两个顶点的连线叫棱柱的对角线,两个底面间的距离叫做棱柱的高.

如图 1-5,可记为棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$,也可记作棱柱 AC',多边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$ 是底面,四边形 $ABB'A'$,$BCC'B'$ 等是侧面,AA',BB' 等是侧棱,AC',BE' 等是对角线,HH' 是高. 按底面多边形的边数分,棱柱可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱…,按侧棱与底面是否垂直的关系分,棱柱可分为直棱柱和斜棱柱. 底面是正多边形的直棱柱叫正棱柱.

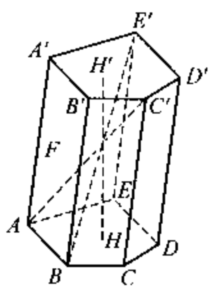


图 1-5

棱柱有以下性质:

(1) 侧棱都相等,侧面是平行四边形;

(2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形；

(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

常见的四棱柱有：

(1) 平行六面体：底面是平行四边形的四棱柱；

(2) 直平行六面体：侧棱与底面垂直的平行六面体；

(3) 长方体：底面是矩形的直平行六面体；

(4) 正四棱柱：底面是正方形的长方体；

(5) 正方体：棱长都相等的长方体.

以上概念的关系可表示如下：

$$\text{棱柱}\to\text{四棱柱}\begin{matrix}\nearrow\text{平行六面体}\searrow\\ \searrow\text{直四棱柱}\nearrow\end{matrix}\text{直平行六面体}\to\text{长方体}\to\text{正四棱柱}\to\text{正方体}$$

2. 棱锥：有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，这些面围成的几何体叫做棱锥. 这个多边形叫棱锥的底面，其余各面叫做棱锥的侧面，各侧面的公共顶点叫棱锥的顶点，顶点到底面的距离叫棱锥的高.

如图 1-6，可记作棱锥 $S-ABCDE$，其中多边形 $ABCDE$ 是棱锥的底面，三角形 SAB，SBC 等是侧面，SA，SB 等是侧棱，S 是顶点，SO 是高.

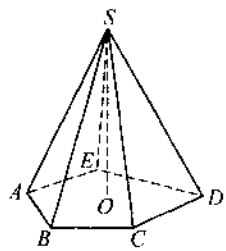


图 1-6

关于一般棱锥，有如下重要性质，可称之为平行截面定理.

定理：如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么截面和底面相似，并且它们的面积的比都等于截得的棱锥的高与已知棱锥的高的平方比.

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面内的射影是底面中心，这样的棱锥叫做正棱锥. 正棱锥有如下性质：

(1) 各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等，它叫做正棱锥的斜高.

(2) 棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形；棱锥的高、侧棱和侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形，如图 1-7. 这些特征

三角形是解决棱锥问题的基本工具.

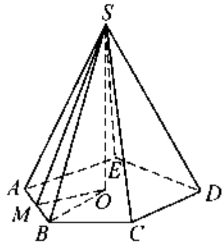


图 1－7

二、欧拉公式

多面体是由它的面围成的立体图形,假定这些多面体的表面是用橡胶薄膜(可以伸缩但不会破裂)做成的,如果向它们内部充气,那么多面体的表面就能逐渐变为一个球面.像这样表面经过这种连续变形可变为球面的多面体,叫做简单多面体.数学家欧拉通过对多面体的顶点、面、棱的研究,得到如下结论:

简单多面体的顶点数 V、面数 F 和棱数 E 之间有关系式 $V+F-E=2$.

此公式称为欧拉公式.利用欧拉公式,可以证明正多面体有且只有五种.应当指出的是:欧拉公式只适用于简单多面体.

例题精讲

例 1 (2004 年全国高考试题)下面是关于四棱柱的四个命题:

(1) 若有两个侧面垂直于底面,则该四棱柱为直四棱柱.

(2) 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面,则该四棱柱为直四棱柱.

(3) 若四个侧面两两全等,则该四棱柱为直四棱柱.

(4) 若四棱柱的四条对角线两两相等,则该四棱柱为直四棱柱.

其中,真命题的编号是________.

简解 (1)错,必须是两个相邻的侧面;(2)正确;(3)错,反例,可以是一个斜四棱锥;(4)正确,对角线两两相等,则此二对角线组成的平行四边形为矩形.

例 2 设四面体 $ABCD$ 的六条棱中至多有一条边大于 1,求六条边之和的最大值.

解 设 AB,AC,BC,BD,CD 均不大于 1,将 $\triangle ABC$ 绕 BC 转动,使点 A 在平面 BCD 上,设为 A_1,故 $A_1D\geqslant AD$.

以 B,C 为圆心、以 1 为半径作圆,构成一个橄榄形,若两圆的公共弦为

EF，则 EF 和 BC 相互垂直平分，显然 D,A_1 均在这个椭圆形内. 设 $EF=2b$，$BC=2a$，

所以 $a^2+b^2=1\quad\left(a\leqslant\frac{1}{2}\right)$，于是 $b\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2=2-(a-b)^2\leqslant2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$，

从而 $a+b\leqslant\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

所以四面体六边之和 $\leqslant AB+AC+BD+CD+A_1D+BC\leqslant4+2(a+b)\leqslant5+\sqrt{3}$.

在 A,B,C,D 共面并且三角形 ABC、三角形 DBC 都是边长为 1 的正三角形时等号成立.

例 3 $ABCD$ 是一个正方形，M 为 AB 上一点，N 为 BC 上一点，且 $AM=BN$，连 DM,DN 分别交对角线 AC 于点 P,Q，剪去 $\triangle MNB$. 求证：(1) 以 DM,DN 为折痕，将 DA 与 DC 重合，可以构成一个三棱锥的侧面；(2) 以线段 AP,PQ,QC 为边恰可构成有一个内角为 $60°$ 的三角形.

证明 (1) 因为 $AM=BN$，所以 $CN=BM$. 以 DM,DN 为折痕，使 DA 与 DC 重合，下证 AM,MN,CN 可构成一个三角形. 由于 $AM=BN<MN$，MN 为 AM,MN,CM 中最长的线段，又 $MN<MB+BN=AM+CN$，所以 AM,MN,CN 可构成一个三角形.

将 DA 与 DC 重合后，平面 DAM、平面 DMN、平面 DNC 恰构成一个三棱锥的侧面.

(2) 如图 1-8，在棱锥 D-$A(C)MN$ 中，AP 在面 ADM 内，PQ 在面 DMN 内，QA 在面 DAN 内，AP—PQ—$QA(C)$ 成封闭折线构成 $\triangle APQ$.

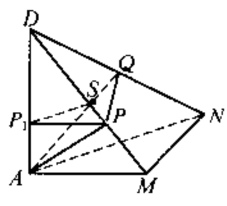


图 1-8

所以线段 AP,PQ,QC 可构成三角形 APQ 的三条边. 下面证 $\angle PAQ=60°$.

由于棱锥底面 $\triangle AMN\cong\triangle BMN$，

$\therefore\ \angle MAN=90°$.

又 $\angle DAM=90°$，$\angle DAN=90°$，AP 为 $\angle DAM$ 的平分线，AQ 为 $\angle DAN$

的平分线，作 $PP_1 \perp DA$ 于 P_1，过 P_1 作 $P_1S \parallel AN$ 交 AQ 于 S，

$\angle PP_1S = 90°$，$P_1A = P_1P = P_1S$，所以 $PA = SA = SP$，

$\therefore$ 三角形 PAS 为等边三角形，$\therefore \angle PAQ = PAS = 60°$.

例 4 （2002 年全国高考试题）

（Ⅰ）给出两块面积相同的正三角形纸片，如图 1－9(1)(2)，要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等．请设计一种剪拼方案，分别用虚线标示在图(1)(2)中，并作简要说明；

（Ⅱ）如果给出的是一块任意三角形的纸片（如图 1－9(3)），要求剪拼成一个直三棱柱模型，使它的面积与给出的三角形面积相等，请设计一种剪拼方案，用虚线标示在图(3)中．并作简要说明．

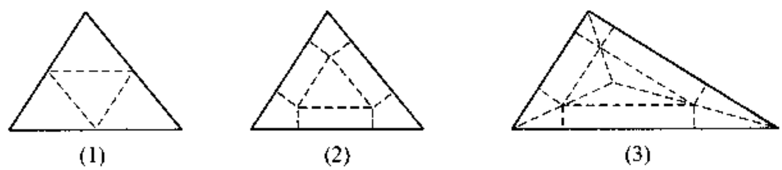


图 1－9

解 如图 1－9(1)，沿正三角形三边中点连线折起，可拼得一个正三棱锥．

如图 1－9(2)，正三角形三个角上剪出三个相同的四边形，其较长的一组邻边边长为三角形边长的 $\frac{1}{4}$，有一组对角为直角，余下部分按虚线折起可折成一个缺上底的正三棱柱，而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱柱的上底．

如图 1－9(3)，分别连接三角形的内心与各顶点，得到三条线段，再以这三条线段的中点为顶点作三角形，以新作的三角形为直三棱柱的底面；过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线，沿六条垂线剪下三个四边形，可以拼接成直三棱柱的上底；余下部分按虚线折起，成为一个缺上底的直三棱柱．即可得到直三棱柱模型．

例 5 用一块正三角形纸片，能不能剪拼成一个正四棱锥模型，能不能剪拼成一个正四棱柱模型，使它们的全面积都与原正三角形纸片的面积相等？若能，请设计一种剪拼方法；若不能，请说明理由．

解 能剪拼成一个正四棱锥．具体方法如图 1－10，作等边 $\triangle ABC$ 的内接正方形 $DEFG$，将 $\triangle DBG$ 与 $\triangle EFC$ 剪拼成一个矩形，使它的一边为 DE，