



北京工业大学

“211工程”资助出版

现代计算 固体力学

杨庆生 编著



科学出版社

www.sciencep.com

034/28

2007



北京工业大学

"211 工程"资助出版

现代计算固体力学

杨庆生 编著

北 京

内 容 简 介

本书讲述了计算固体力学的基本原理、应用技术和最新发展状况,详细阐述了工程问题有限元分析的基本方法和程序,介绍了有限元法应用中的若干技术和经验。本书注重原理与实践、理论与应用的结合。

本书可作为工程类各专业研究生和工科本科生的教材,可供科技人员、计算力学应用人员和软件开发人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代计算固体力学/杨庆生编著. —北京:科学出版社,2007
ISBN 978-7-03-019505-0

I. 现 … II. 杨… III. 计算固体力学 IV. 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 117602 号

责任编辑:董安齐 任加林 / 责任校对:柏连海
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 8 月第一次印刷 印张: 23 3/4

印数: 1—2 500 字数: 459 900

定价: 40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA08)

总 序

“211工程”是我国建国以来教育领域唯一的国家重点建设工程,以便我国向21世纪重点建设一百所高水平大学,使其成为我国培养高层次人才,解决经济建设、社会发展和科技进步重大问题的基地,形成我国高等学校重点学科的整体优势,增强和完善国家科技创新体系,跟上和占领世界高层次人才培养和科技发展的制高点。

中国高等教育发展迅猛,尤其是1400所地方高校已经占全国高校总数的90%,成为我国高等教育实现大众化的重要力量,成为区域经济和社会发展服务的重要生力军。“211工程”建设对于我校实现跨越式发展、增强服务北京的能力起到了重大的推动作用。

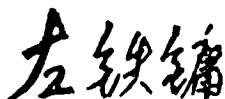
在北京市委市政府的高度重视和大力支持下,1996年12月我校通过了“211工程”部门预审,成为北京市属高校唯一进入国家“211工程”重点建设的百所大学之一,2001年6月以优异成绩通过国家“211工程”一期建设验收,2002年10月顺利通过国家“211工程”二期建设可行性论证。我校紧紧抓住这一难得的历史性发展机遇,根据首都经济和社会发展的需要,坚持“科学定位,找准目标,发挥优势,办出特色”的办学方针和“立足北京,融入北京,辐射全国,面向世界”的定位指导思想,以学科建设为龙头,师资队伍建设为关键,重点建设了电子信息、新材料、光机电一体化、城市建设与交通、生物医药、环境与能源、经济与管理类学科,积极发展了人文社会科学类学科,加强了基础类学科,形成了规模、层次及布局合理的学科体系,实现了从工科大学向以工为主,理、工、经、管、文、法相结合的多科性大学转变,从教学型大学向教学研究型大学的转变。

我校现有9个博士后科研流动站,6个一级学科博士学位授权点,25个二级学科博士学位授权点,55个硕士学位授权点。教师中有院士6人,博士生导师150人,教授230人,专任教师中具有博士学位的教师比例达到30%。我校年科研经费已达到2.3亿元,年获得国家自然科学基金资助项目近40项,材料学科获全国百篇优秀博士学位论文奖,抗震减灾学科与交通学科2002年分别获得国家科技进步二等奖,计算机学科2003年获得国家科技进步二等奖,光电子学科在新型高效高亮度半导体发光二极管、新医药与生物工程学科在国家P3实验室建设和抗HIV药物的研制、环境与能源工程学科在奥运绿色建筑标准与大气环境治理、光学学科在大功率激光器研制、管理科学与工程学科在国家中长期能源规划等方面均取得了特色鲜明的科研成果。

为了总结和交流北京工业大学“211 工程”建设的科研成果,学校设立“211 工程”专项资金资助出版系列学术专著,这些专著从一个侧面代表了我校教授、学者的学科方向、研究领域、学术成果和教学经验。

展望北京工业大学的未来,我们任重而道远。我坚信,只要我们珍惜“211 工程”建设和奥运羽毛球馆建设这两大机遇,构建高层次学科体系,营造优美的大学校园,在把我校在建设成为国内一流大学的进程中就一定能够为“新北京、新奥运”的宏伟蓝图做出自己应有的贡献。

北京工业大学校长
中国科协副主席
中国工程院院士



2004 年 3 月

前 言

计算力学已经成为科学研究和工程技术中的有力工具。现代计算固体力学的研究和应用范围很广,已经扩展到从结构到非结构、线性到非线性的几乎所有数理方程控制的问题。有限元法作为求解数学物理方程的一种数值方法,在现代计算固体力学中占有突出的优势地位。有限元法具有非常强的逻辑性和系统性,以及完整的理论基础和可靠的工程应用。精确化、智能化、简单化和大规模化成为当今计算固体力学的突出特点;集成化和商品化技术的应用极大地推进了计算固体力学的迅速发展。

当今的计算固体力学已经形成庞大的理论和应用体系,特别是有关有限元法的著作和教材已经难计其数。学术著作往往关注某一专门领域,涉猎范围狭窄。讲义和教材则从最基本的概念讲起,预备知识占用相当大的篇幅。重要的是教材应不断更新,以反映本学科事实存在的发展状况。然而,现有的相关教材雷同现象日甚,内容日趋陈旧,不能反映现代计算固体力学的现状,也不能很好地适应创新人才培养的教学需要。

撰写本书的目的主要有两个。首先是为了教学的需要,因而本书的内容包括了从基本理论到最新发展的广泛问题,以求对教学对象提供较为全面的计算固体力学知识,这对工程类研究生的教学尤为迫切。其次,希望用全新的体系改变目前的有限元著作中普遍存在的理论与实现的脱节现象,弥补理论、程序与应用之间的空隙。

基于上述考虑,本书具有以下特点:保持内容的完整性和系统性,但对传统的位移有限元法部分进行了重新整合与压缩;突出计算固体力学的实现过程,特别是应用中遇到的技术问题;注重介绍解决特殊问题的特殊技术和有限元法的商业技术,以与当今有限元商业技术的发展相适应;注意介绍计算固体力学的最新发展和先进技术等。但是,当今的计算固体力学已经形成庞大的学科体系,不可能全面进行介绍。为了控制篇幅,我们对内容进行了精选:一是重点放在工程上常用的范围内;二是

大幅度压缩诸如线性方程组求解和特征值计算方法等非本课程本质的内容。

本书共分为三部分,十五章。第一部分为有限元法的基础部分,含有一、二、三章。第一章为绪论,介绍了现代计算固体力学的基本原理和发展过程。第二章以全新的体系介绍了弹性力学的基本理论。第三章为有限元法的数学基础,重点介绍了加权余值法和变分法。

第二部分为有限元法的基本部分,这是本书的主体部分,共有八章。第四章和第五章的主要内容为传统的位移有限元法,用统一的自然坐标系贯通了三角形单元和四边形单元的数学表示。第六章主要介绍位移元在计算机实现中的若干问题和处理方法。第七章介绍杆件问题中的有限元法。第八章为板壳问题的有限元法,详细介绍了广受瞩目的退化壳单元,并给出相应的源程序。第九章以弹塑性、粘塑性问题为例,介绍了以增量本构理论为特征的物理非线性问题和基于形变理论的有限元分析方法。第十章为振动和动力学的问题,以模型化和应用技术为主,不罗列过多的求解方法和公式。第十一章介绍有限元应用中的若干技术。

第三部分为有限元法的特殊问题和高等部分,属于有限元法的扩展,共有四章。第十二章命名为特殊有限元法,介绍处理一些特殊问题的特殊方法。第十三章为非结构有限元法,介绍有限元法在场问题中的应用。第十四章为耦合问题,主要包括多场耦合与多孔介质中的流固问题。第十五章为多变量有限元法,介绍混合元、杂交元和拟协调元的原理和应用。

本书给出了比较多的数值例题,特别地阐述了这些问题的定性和定量分析的思路和方法,指出了分析中应注意的问题。这对于读者利用有限元程序进行实际问题的分析具有实用价值。

考虑到不同层次的读者需要,书中在不同的阶段给出相应的计算机程序,这些程序都是独立的完整的程序,并且能够在计算机上顺利运行。第四章给出了平面问题的三角形单元程序。第六章给出了平面问题和轴对称问题的位移元程序。第八章给出了一个含有空间梁单元、板弯曲单元和壳体单元的有限元程序。第九章介绍了弹塑性问题有限元程序,可以处理多种屈服条件。这些程序用 F77 语言编写,并与 Visual Fortran 和 F90 相容。所有的程序采用完全相同的变量命名方法和程序结构,易于阅读和理解。这些程序经过简单的修改和扩充可以应用于工程

问题的分析。

本书可以作为本科生或研究生的教材。工科本科生可以选用第一、二章和四至六章,总学时大约 32~48 学时,再选学第七和八章中的部分内容,可以满足 64 学时的要求。对于工程类研究生,全部内容的教学约需要 60 学时。

本书作为研究生教材曾在北方交通大学对土木工程和力学专业的硕士和博士研究生讲授多轮,在北京工业大学对机械工程和力学专业的硕士和博士研究生讲授多轮;作为本科生教材,曾对机械工程、汽车工程和安全工程专业的本科生讲授多轮。本书曾作为航天工业集团运载火箭研究院科技人员的培训讲义。

本书的编写曾得到许多专家、同事和历届研究生的帮助和鼓励。作者谨向他们表示衷心的感谢。

本书肯定存在不足和需要进一步改进之处,诚恳地希望使用本书的读者提出批评和建议。

目 录

总序

前言

第一章 绪论	1
1.1 计算固体力学	1
1.2 计算固体力学的基本方法	2
1.2.1 有限元法	2
1.2.2 边界元法	3
1.2.3 加权余值法	3
1.2.4 变分法	3
1.3 计算固体力学的发展历史和应用现状	4
1.4 本书的结构	5
第二章 弹性力学的基本理论	7
2.1 变形与应变	7
2.2 平衡方程, 应力-应变关系	10
2.3 弹性力学问题的建立与求解	13
2.3.1 平面问题	15
2.3.2 扭转问题	16
2.4 弹性体的能量	17
习题	19
第三章 计算力学的数学基础	21
3.1 引言	21
3.2 加权余值法	22
3.3 变分原理	24
3.4 约束与广义变分原理	27
3.4.1 约束变分原理	27
3.4.2 广义变分原理	28
3.5 固体力学中的各种变分原理	29
3.5.1 最小势能原理	29
3.5.2 最小余能原理	31
3.5.3 Hellinger-Reissner 变分原理	32
3.5.4 Hu-Washizu 广义变分原理	33

3.6	Ritz 法与 Galerkin 法	35
3.6.1	Ritz 法	35
3.6.2	Galerkin 法	36
第四章	有限元法的基本概念和原理	38
4.1	单元位移模式	38
4.2	单元刚度阵和有限元方程的建立	41
4.3	整体有限元方程的组装	43
4.4	边界条件的引入与方程的求解	46
4.5	有限元解答的本质	48
4.6	平面三角形单元程序	48
4.6.1	程序框图	48
4.6.2	变量说明	48
4.6.3	输入输出文件	49
4.6.4	例题	50
4.6.5	程序源码	52
	习题	60
第五章	单元构造与分析	62
5.1	建立单元形函数的方法	62
5.2	矩形单元 Lagrange 族和 Serendipity 族	63
5.2.1	Lagrange 插值法	63
5.2.2	Serendipity 族	64
5.3	等参元	66
5.4	数值积分	70
5.4.1	Gauss 积分公式	70
5.4.2	积分阶数的选择	74
5.4.3	应力计算	76
5.5	各种 C^0 等参元	76
5.5.1	2 节点杆单元	77
5.5.2	3 节点杆单元	77
5.5.3	3 节点三角形单元(常应变三角形 CST)	77
5.5.4	6 节点三角形单元(T6)	77
5.5.5	4 节点四边形单元(Q4)	78
5.5.6	6 节点四边形单元(Q6)	78
5.5.7	8 节点四边形单元(Q8)	78
5.5.8	4 节点四面体实体单元(3DT4)	78
5.5.9	10 节点四面体实体单元(3DT10)	78

5.5.10	15 节点三棱柱实体单元(P15)	79
5.5.11	8 节点六面体实体元(H8)	79
5.5.12	20 节点六面体实体元(H20)	80
5.6	轴对称问题	81
5.7	非协调元	82
5.8	单元精度比较	84
	习题	86
第六章	有限元法的计算机实现	89
6.1	有限元法的实施过程	89
6.2	有限元网格的自动划分	89
6.3	初步分析:单元测试与网格测试	90
6.4	计算结果的评价与误差分析	92
6.5	自适应与缩减网格有限元法	94
6.6	二维固体力学有限元程序	96
	习题	129
第七章	杆件有限元法	132
7.1	等截面直杆单元	132
7.1.1	拉压杆单元	132
7.1.2	扭转杆单元	133
7.2	等参梁单元	134
7.2.1	无剪梁单元	134
7.2.2	Timoshenko 梁单元	135
7.3	二维和三维杆单元	137
7.3.1	二维杆单元	137
7.3.2	三维杆单元	138
	习题	139
第八章	板和壳体有限元法	142
8.1	板弯曲问题的基本理论	142
8.1.1	Kirchhoff 薄板理论	142
8.1.2	Mindlin 板理论	145
8.2	基于板弯曲理论的单元	145
8.2.1	基于 Kirchhoff 假设的矩形单元	145
8.2.2	基于 Mindlin 假设的四边形等参元	148
8.2.3	离散的 Kirchhoff 单元	150
8.3	关于板弯曲单元的讨论	151
8.3.1	降阶积分与选择积分	151

8.3.2	内部自由度	152
8.3.3	板弯曲单元的小片检验	153
8.3.4	板单元的应用	153
8.4	壳体单元的一般论述	154
8.5	退化壳单元	155
8.5.1	单元的几何定义	156
8.5.2	坐标系	157
8.5.3	位移场	158
8.5.4	应变-位移关系	159
8.5.5	单元刚度矩阵	162
8.5.6	等效节点载荷	162
8.5.7	应力计算	164
8.6	轴对称壳单元	166
8.7	壳体单元的应用	168
8.7.1	旋转壳	169
8.7.2	一般壳	171
8.8	梁、板和壳体有限元程序	173
	习题	220
第九章	材料非线性问题的有限元法	222
9.1	材料非线性问题的有限元方程	222
9.2	弹塑性问题有限元方程的建立	226
9.3	弹塑性问题的计算方法	230
9.4	蠕变问题的有限元法	232
9.4.1	蠕变问题的基本公式	232
9.4.2	全显式初应变法	234
9.4.3	具有修正刚度的全显式法	234
9.5	粘弹性和粘塑性力学的有限元法	235
9.5.1	粘弹性	235
9.5.2	粘塑性问题	236
9.6	弹塑性有限元程序	238
	习题	285
第十章	动力学问题的有限元法	287
10.1	振动的基本方程	287
10.2	缩减与模态方程	293
10.2.1	缩减	293
10.2.2	模态方程	296
10.3	谐响应分析	297

10.4	动力响应分析	298
10.5	响应谱分析	301
10.6	评述、模型化考虑	303
10.7	应用	307
10.7.1	振动	308
10.7.2	谐响应	308
10.7.3	动力响应	310
10.7.4	响应谱分析	311
	习题	311
第十一章	有限元法的实现与应用技巧	314
11.1	模型考虑	314
11.2	单元的选择和混合使用	315
11.3	变换	317
11.4	内部约束	318
11.5	子结构	319
11.6	对称性	321
第十二章	特殊有限元法	324
12.1	界面元	324
12.2	奇异元	327
12.3	无限元	330
12.4	刚性有限元	332
第十三章	非结构有限元法	336
13.1	稳态场问题	336
13.2	稳态场有限元的基本理论	337
13.3	稳态温度场的有限元分析	339
13.4	热应力的计算	342
	习题	343
第十四章	耦合问题的有限元法	345
14.1	力-电耦合问题的有限元法	345
14.2	流固耦合有限元法	347
第十五章	多变量有限元法	352
15.1	引言	352
15.2	应力杂交元	354
15.3	位移杂交元	357
15.4	拟协调元	358
15.5	混合有限元法	361
	参考文献	365

第一章 绪 论

1.1 计算固体力学

我们知道,弹性力学的基本问题归结为用偏微分方程表示的基本方程和相应的边界条件。这些方程是完全封闭的,从理论上讲可以得到解析解。但实际上,只有在非常简单的情况下,才能求出这些方程的解析解。于是,人们很早就开始致力于寻求在工程上更有意义的近似解或数值解,从而提出了各种各样的方法。随着计算机和计算技术的发展,这些数值方法的解决问题能力和应用范围越来越大,逐渐形成了计算固体力学(computational solid mechanics)这门学科分支。

计算固体力学是一个集力学、数学和计算机科学为一体的综合学科。首先,计算固体力学的发展离不开数值方法的完善。一般的物理场问题,在数学上都可以归结为偏微分方程的边值问题。就像弹性力学问题求解一样,这些偏微分方程的求解是一个非常困难的数学问题。变分法、有限元法、边界积分方程法等都是求解偏微分方程常用的近似方法,这些方法实际上也是计算固体力学的主要方法。甚至有些方法本身是从力学上首先提出和应用,然后在数学上推广的。因此数值方法本身的不断完善是计算固体力学发展的重要基础。

其次,计算机的发展和应用为计算固体力学提供了有力的工具和支持。尽管有些方法的萌芽很早,但一直不能推广应用,其原因是没有处理大规模数据的手段和能力。计算机的应用和逐渐普及,有力地推动了计算固体力学的发展,不仅提高了计算固体力学的解题能力和数据处理规模,而且迅速扩大了计算固体力学向其他学科分支的渗透和发展,带动了一大批相关的学科分支的迅速成长。一些起源于计算固体力学的数值方法迅速在其他学科中得到应用,如有限元法等。

计算固体力学已经成为与理论固体力学和实验固体力学并行的学科分支,数值方法成为继理论研究和实验研究之后的另一个重要手段。计算固体力学不仅能够解决和验证经典的理论问题,而且极大地扩大了经典力学的研究范围,成为解决新的力学问题的主要手段。现在,计算固体力学的方法已经应用到弹塑性问题、时间相关的粘弹塑性问题、动力学问题、微细观力学问题、多物理场耦合问题、非结构位势问题、非线性大变形问题、非连续介质问题等。另外,在流体力学领域也形成了计算流体力学的分支。

1.2 计算固体力学的基本方法

计算固体力学已经形成一个庞大的学科体系,它包含了很多数值方法。主要的方法包括有限元法、边界元法、变分法和加权余值法等,其中有限元法占有突出的优势地位,无论从基本理论、程序实现和工程应用经验方面,还是从方法本身的适用范围与可靠性方面,有限元法被人们接受的程度远远超过其他方法。下面简要介绍一下这些方法的基本概念。

1.2.1 有限元法

有限元法(finite element method)是求解微分方程近似解的一般方法,大部分用微分方程表示的边值问题,都可用有限元法求解。有限元法的基本思想是将在一个域内满足平衡微分方程和应力边界条件的边值问题用最小势能原理代替,这样,一个微分方程控制的问题变成了一个积分方程控制的问题。然后找一组试探解使其满足最小势能原理,这组解就是原问题的近似解。有限元法的步骤可以归纳为以下几点:

1) 将所研究的区域分割成一系列有限大小的区域,这些小区域称为有限单元(element),单元的形状一般采用三角形或四边形,这样一个具有无限自由度的连续问题化为有限自由度的离散问题,如图 1.1 所示。

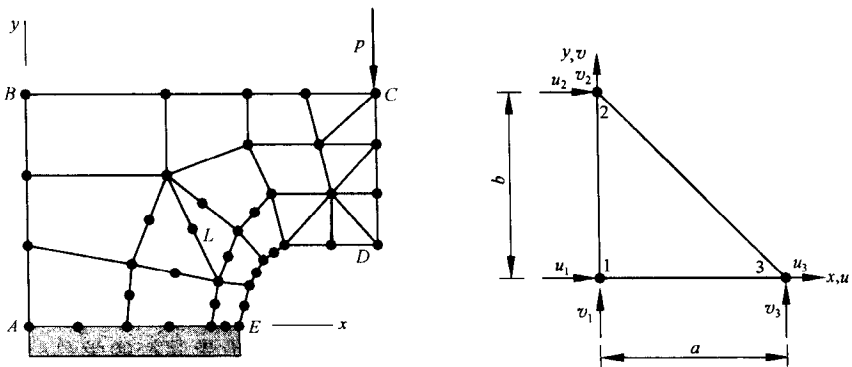


图 1.1 结构离散化

2) 假设这些单元之间仅在边界的若干点上相互联结,这些联节点称为节点(node),节点一般选在三角形和四边形的角点上或边中间点上,选择节点的物理量(如位移、应力)作为基本未知量。

3) 在单元内,选择一组连续函数,以使单元内任一点的物理量唯一地由节点物理量表示。

4) 根据物理关系建立单元内的平衡方程。

5) 按照一定次序将各个单元重新拼装成原来的整体区域,并在一定边界条件下求解。

有限元法作为一种近似求解方法,具有较强的逻辑性,其概念也容易理解。有限元法的广泛应用得益于它的一般性和多能性。现在,有限元法可应用于几乎所有的微分方程控制的物理问题。有限元法特别适合于传统解析法束手无策的多相介质问题、不规则边界问题、复杂边界条件问题、物理量局部剧变问题等。

当然,有限元法也有其不足,主要在于大量输入数据的繁重准备工作和输出数据的整理工作。不过,随着前后处理软件的进一步完善,这种状况正在改变。

1.2.2 边界元法

边界元法(boundary element method)的基本思想是首先建立域内物理量与边界物理量的关系,这样就将域内的微分方程转化为边界积分方程。然后对边界积分方程进行离散化,求出数值解。边界元法可以归结为三个步骤:

1) 选取基本解,建立边界值与域内物理量的关系。不同的基本解造成不同的边界元法,有多种基本解的选取方法。例如选取 Kelvin 解,则得到边界一点集中力作用下的域内位移和应力,对于整个边界积分,得到域内位移、应力与边界值的关系。

2) 对边界进行离散,数值求解边界积分方程,得到边界上的位移和面力分布。

3) 利用边界积分方程求出域内的位移和应力。

边界元法可以看作有限元法的一种缩减网格的方法。边界元法只需对边界进行离散,使问题降低了一维,减少了离散误差,特别适合于无限大区域问题,但是对于各向异性和非线性问题的处理还比较繁琐,从目前的应用情况看,远不如有限元法的范围广泛。

1.2.3 加权余值法

加权余值法(weighted residual method)是一种求解微分方程的基本方法。当我们选取一组函数作为微分方程的解时,如果这组解能使微分方程精确满足,这组解就是精确解或解析解;如果这组解是近似解,就不能精确满足微分方程,存在一个所谓的余值或残值。但是这个余值要在整个域上加权平均等于零,这样的解是我们所寻求的。这个过程将一个在域内每点精确满足微分方程的问题变成平均意义上的近似满足。加权余值法的含义就是寻求使余值加权平均等于零的近似解。

1.2.4 变分法

变分法(variational method)是一种古老的方法,它把微分方程转变为积分方程,然后对积分方程变分得到一组近似解。近似解的不同模式和选取方法造成不同的变分法。有限元法可以认为是变分法的发展或其中的一种。

考虑到实际的应用和本书篇幅限制,本书主要介绍有限法。其他的方法会随时提到,但不做系统的介绍。

1.3 计算固体力学的发展历史和应用现状

计算固体力学的历史可能很难追溯到源头,但是利用差分计算导数的近似方法,在弹性力学中很早就开始应用了。像利用变分原理进行近似计算的 Ritz 法也早就应用于平面问题和板的弯曲问题。

结构力学应用于建筑结构的分析已经有 100 多年的历史。最初,杆件的刚度矩阵用最基本的强度理论导出,直接刚度法的出现使得单元刚度矩阵可以组成整体刚度矩阵,以建立节点位移与节点力的关系。

从 1906 年开始,研究人员陆续提出了网格模拟(lattice analogy)法求解连续体的问题,也就是用规则排列的弹性杆模拟连续体。1943 年, Courant 用定义在三角形区域上的分片多项式插值去求近似数值解,这种方法实际上是变分问题的 Rayleigh-Ritz 解法。一般认为, Courant 的解法是有限元法的基础。

由于受到当时计算能力的限制,这些工作在当时被认为是没有多大的应用价值。直到 1953 年,工程师们可以用矩阵表示结构的刚度方程并用数字计算机进行求解。在 1956 年, Turner、Clough、Martin 和 Topp 的经典论文首次提出了有限元法的概念。从此,有限元法开始应用于工程实际。在 1960 年, Clough 首次引用了有限元(finite element)的术语。

在 20 世纪 60 年代初期,有限元法被认为是一种完美无缺和无所不能的方法,成为学术界的热门研究领域。其研究工作在世界范围内沿着不同的方向迅速展开,发展了大量新单元,如弯曲单元、曲壳单元、等参元等。一系列的研究进展使人们认识到有限元法是求解偏微分方程的一般性方法。此时,有限元已经得到更广泛的应用,从弹性问题到非线性问题,从静力问题到动力问题,已经渗透到固体力学的各个部分。另外,有限元法在土力学、流体力学、热动力学、电磁学领域也获得广泛的应用。在有限元发展的过程中,大批的数学家也加入到这一研究队伍中,并利用变分原理奠定了有限元法的数学基础。

值得指出的是,中国科学家对有限元法的发展做出了举世公认的贡献。例如,冯康院士与国外学者同时独立地提出了有限元法的概念;胡海昌院士的广义变分原理奠定了构造新型单元的最基本的数学基础;唐立民教授等的拟协调元方法开辟了构造新单元的更大视野。这些工作在国际上有很大的影响,并广泛应用于各种工程问题。

有限元法的出现,使经典力学的面貌发生了根本性的变化,带动了传统学科的发展和新的力学分支如计算固体力学、计算流体力学、计算细观力学等的产生。由于计算力学的发展,传统的结构分析正在向分析、设计、优化、制造和控制的综合化