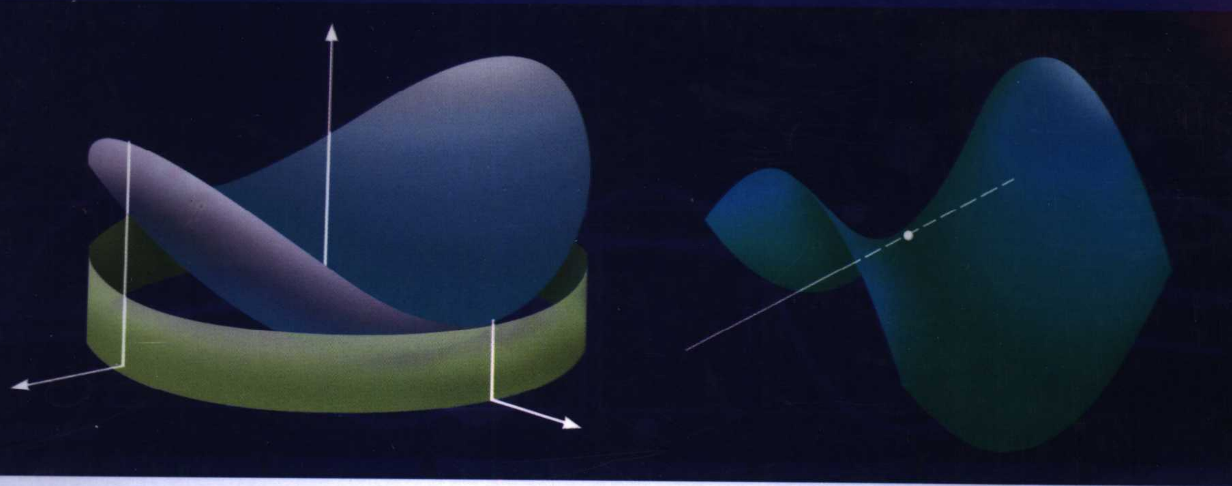

21世纪高等学校数学系列规划教材

高等数学

（经济管理类）

孙洪波　张文国　崔秀山　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪高等学校数学系列规划教材

高等数学

（经济管理类）

主编　孙洪波　张文国　崔秀山
主审　杨骅飞

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本教材根据教育部最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，按照新形势下数学教材改革和建设新的精神，结合编者多年的教学实践，为高等院校经济、管理类各专业高等数学课程的教学需要而精心编写。教材力求体现经济、管理专业的特点；体现因材施教；体现数学的素质教育和应用数学能力的培养。

本教材具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的特点。全书内容包括：函数与极限，一元函数微积分学及其应用，多元函数微积分学及其应用，微分方程和差分方程，无穷级数。

本书适合各类高等学校，尤其是第二、三类院校经济、管理类专业教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经济管理类/孙洪波，张文国，崔秀山主编. 北京：中国铁道出版社，2007.7

(21 世纪高等学校数学系列规划教材)

ISBN 978-7-113-08167-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①孙…②张…③崔… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 133581 号

书　　名：高等数学(经济管理类)
作　　者：孙洪波　张文国　崔秀山　主编
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：路　瑶
封面制作：白　雪
校　　对：毛玉兰
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
开　　本：730×988　1/16　印张：20.75　字数：402 千
版　　本：2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-113-08167-6/O·165
定　　价：29.00 元

前　言

进入新的世纪以来，我国的高等教育发生了很大的变化；同时，经济高速发展，科学技术日新月异，社会全面进入了信息时代。高等院校基础课的教学面临着许多前所未有的问题，特别是经济管理类数学课程的教学，遇到了前所未有的困难。正是在这样一种形势下，我们在总结多年经济管理类本科数学教学经验，以及探索经济管理类数学教学发展动向、分析国内外同类教材变革的基础上，根据教育部最新《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，编写了这本适合于经济管理类本科生各专业使用的高等数学教材。

本书遵循注重基本概念、基本理论和基本方法，注重培养数学基本能力和基本素养，力求贴近实际、贴近经济管理类学生学习数学的需要。本书具有以下特色：

第一，突出经济管理类高等数学的基本思想和基本方法。力求使学生在学习过程中较好地了解经济管理类高等数学的基本内容，领会高等数学的思想方法，不过分强调严密的论证和推理过程，而更多地使学生体会高等数学的本质和高等数学的作用。

第二，体现基本能力的培养。本书叙述通俗易懂，又不失较严谨的数学逻辑，通过学习，可使学生掌握高等数学的基本概念、基本思想和基本方法。

第三，注重高等数学的实际应用。本书对基本概念的引入，力求从通俗的实际问题出发，自然而然地引出，例题和习题尽量采用经济、金融、管理领域和日常生活中的实际问题，希望以此提高学生的学习兴趣，以及利用高等数学工具解决实际问题的能力，达到学以致用，提高数学素质和素养的目的。

第四，考虑到各类学校的特点，本书对部分超出基本要求的内容以小字号排印，以体现各种不同的需求。

本书由孙洪波、张文国、崔秀山任主编，北京理工大学理学院杨骅飞教授担任主审。全书由孙洪波编写第七章的第一节至第八节，张文国编写第一、六、八章，崔秀山编写第二、三、四、五章。北京理工大学珠海学院基础部数学教研室教师王晓燕、刘志波、赵志红、贾云涛分别为本书第二、三、四、五章选编了全部习题和答案，并校对了相应的书稿；赵志红还编写了第七章的第九节，并选配了习题和答案。北京师范大学珠海校区数学系段文喜副教授在本书编写过程中提出了许多宝贵的建议。在此，向他们深表谢意。同时，感谢北京理工大学珠海学院、北京理工大学珠海学院教务处和中国铁道出版社对本书的顺利出版所给予的帮助和支持。

由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，望广大读者和同行专家批评指正。

编　者
2007 年 7 月

目　录

第一章

函数与极限

在初等数学中的我们主要研究了一些不变的量，也涉及到有关变量的一些简单的研究，高等数学课程将进一步对变量进行较深入的研究. 所谓函数关系就是变量与变量之间的依赖关系，极限方法与理论则是研究函数的基本方法与理论基础. 本章先复习函数的相关知识，然后介绍极限与函数连续性的基本概念、基本性质和基本理论，为学习高等数学打下一个良好的基础.

第一节 函　数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 例如，我校今年入学的全体新生构成一个集合，我班的全体同学构成一个集合，某商店的所有商品构成一个集合，全体实数构成一个集合，等等. 一般地，所谓**集合**(简称**集**)是指具有某种特定性质的对象的全体，组成这个集合的每个对象称为这个集合的**元素**(简称**元**).

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in} A$(或 $a\notin A$). 只含有有限个元素的集合称为**有限集**，否则称为**无限集**.

集合的表示方法通常有两种：列举法和描述法.

所谓列举法，是指把集合的全体元素一一列举出来. 例如，由 100 个元素 x_1，x_2，$\cdots$，x_{100} 组成的集合 A 可表示为：

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_{100}\};$$

所谓描述法，是指把集合的元素所具有的共同特征描述出来. 例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集 B 可表示为：

$$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}.$$

常见几个的集合：

实数集：$\mathbf{R}=\{$全体实数$\}$；

复数集：$\mathbf{C}=\{x+y\mathrm{i}\mid x,y\in\mathbf{R},\ \mathrm{i}=\sqrt{-1}\}$；

整数集：$\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$；

自然数集：$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

正整数集：$\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

有理数集：$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+,\text{且 } p,q \text{ 互质}\right\}$；

空集：$\varnothing$，不含任何元素的集合. 如$\{x\mid x^2=-1,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$.

2. 集合的关系

(1) **子集**　设 A、B 为两个集合，若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

例如，整数集、有理数集、实数集、复数集的关系为：$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

约定：空集$\varnothing$是任何一个集合 A 的子集，即$\varnothing\in A$.

(2) **相等**　若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

例如，设 $A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，则显然 $A=B$.

(3) **真子集**　若 $A\subset B$，但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$.

例如，有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集，即 $\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

3. 集合的运算

集合有三种基本运算：并、交、差.

(1) **并**　由属于集合 A 或者属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

(2) **交**　由既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(3) **差**　由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差**，记作 $A\backslash B$. 即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

(4) **全集与余集**　假设我们研究某问题总限定在一个较大的集合 I 中，而研究的其他集合都是 I 的子集，这时我们称 I 为**全集**；若 $A\in I$，称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集**，记作 A^{C}. 即

$$A^{\mathrm{C}}=I\backslash A=\{x\mid x\in I \text{ 但 } x\notin A\}.$$

设 A、B、C 为任意三个集合，则以下运算律成立：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$, $(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$.

4. 区间、邻域

(1) **区间**　设 $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, 则有以下定义(等号左边的符号为记号):

开区间: $(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$, 称 a,b 为开区间 $(a,\ b)$ 的端点;

闭区间: $[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$, 称 a,b 为闭区间 $[a,\ b]$ 的端点;

半开区间: $(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$, $[a,\ b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$;

无穷区间: $(-\infty,\ a)=\{x\,|\,x<a\}$, $(-\infty,\ a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$,

$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$, $[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$,

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$.

在今后的叙述中,若所涉及的区间不需要区分是否含有端点,以及是否是有限区间,我们便把它简称为区间. 图 1-1 是部分区间的示意图.

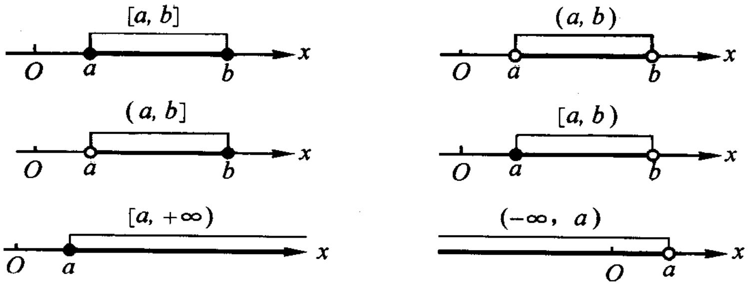

图　1-1

(2) **邻域**　设 a 为任意实数,常数 $\delta>0$, 称开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$, 称 a 为**邻域中心**, δ 为**邻域半径**(如图 1-2 所示). 即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

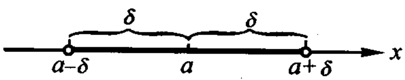

图　1-2

若在上述点 a 的 δ 邻域中去掉邻域中心 a, 则称之为点 a 的 δ **去心邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$(如图 1-3 所示). 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,\ a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

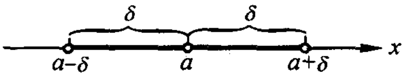

图 1-3

在今后的叙述中，若不必指明点 a 的邻域（或去心邻域）的半径，则简记为$U(a)$（或$\mathring{U}(a)$）.

为了叙述方便，我们有时称$(a-\delta,a)$为点 a 的 δ **左邻域**，称$(a,\ a+\delta)$为点 a 的 δ **右邻域**.

二、函数

1. 函数的概念

定义 1 设 D 是一个非空实数集合，有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$.

按照函数的定义，对于每个 $x\in D$，都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，称 y 为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$. 因变量 y 与 x 之间的这种依赖关系通常称为**函数关系**. 函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 $f(D)$或 R_f，即

$$f(D)=R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

函数的记号可用任意英文字母或希腊字母表示，如 $f(x)$，$F(x)$，$g(x)$，$G(x)$，$\varphi(x)$，$\Phi(x)$，…，等等.

函数的表示方法主要有三种：表格法、图示法、公式法（解析法）. 这些方法在中学大家都已经熟悉了，这里不再赘述.

函数的定义域通常按以下两种情形确定：

(1) 对于有实际背景的函数（即就实际问题建立的函数关系），按变量的实际意义确定函数的定义域.

例如，自由落体运动中，物体运动的初始时刻记为 $t=0$，落到地面的时刻记为 $t=T$，则下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

其定义域为$[0,\ T]$.

又如，某种产品的年产值 $p=p(x)$，其中 x 为年产量，t;年最大产量为 X，则定义域为 $0\leqslant x\leqslant X$.

(2) 对于不考虑实际背景的用算式表达的函数，约定这种函数的定义域是使算式有意义的一切实数.

例如，$y=\ln(1-x)$的定义域 $D=\{x \mid x<1\}$；

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\text{的定义域 } D=\{x \mid |x|>1\}.$$

2. 函数的几个特性

(1) 函数的有界性

若存在常数 M_1，使得当 $x\in I$ 时，有 $f(x)\geqslant M_1$，则称 $f(x)$在 I 上**有下界**，称 M_1 为 $f(x)$的一个**下界**；

若存在常数 M_2，使得当 $x\in I$ 时，有 $f(x)\leqslant M_2$，则称 $f(x)$在 I 上**有上界**，称 M_2 为 $f(x)$的一个**上界**；

若存在常数 M_1、M_2，使得当 $x\in I$ 时，有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，则称 $f(x)$在 I 上**有界**，否则称 $f(x)$在 I 上**无界**.

容易证明，$f(x)$在 I 上有界的充分必要条件是存在常数 $M>0$，使得当 $x\in I$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

另外，从上述定义中还可以看出，若 $f(x)$在 I 上有界，则其界不唯一. 比某个固定的下界小的任何数都可作为它的下界，比某个固定的上界大的任何数都可作为它的上界.

例如，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，这是因为对于一切 $x\in\mathbf{R}$，都有$|\sin x|\leqslant 1$(如图 1-4(a)所示)，即-1是 $y=\sin x$ 的一个下界，1 是它的一个上界，显然任何小于等于-1的数都是它的下界，任何大于等于 1 的数都是它的上界；又如，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$(如图 1-4(b)所示)，即 $y=\arctan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界；再如，由于在(1, 2)内，$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$，所以，$y=\frac{1}{x}$在(1, 2)内有界，但它在(0, 1)内只有下界，而无上界(由于当 x 从大于零的方向充分接近于零时，函数 $f(x)$会无限变大)，因此，$y=\frac{1}{x}$在(0, 1)内无界(如图1-4(c)所示).

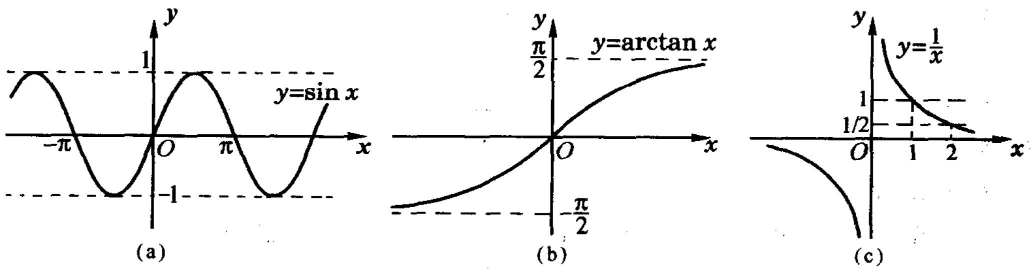

图 1-4

(2)函数的奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)-f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)+f(x)=0$），则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$y=x^2$ 是偶函数；$y=\sin x$ 是奇函数；$y=0$ 既是奇函数又是偶函数；$y=x+\cos x$ 既不是奇函数又不是偶函数.

又如，设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数，$g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数，且 $f(x)=g(x)+h(x)$. 即任何一个定义域关于原点对称的函数都可以分解成一个奇函数与一个偶函数之和.

容易证明：两个奇函数之积或两个偶函数之积都是偶函数，一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

(3)函数的周期性　如果存在常数 $T>0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 我们知道周期函数的周期不唯一，而通常所说的某函数的周期是指它的最小正周期.

例如，中学所熟知的三角函数都是周期函数. $y=\sin x$ 的周期为 2π；$y=\tan x$ 的周期 π；特别地，$y=1\ (x\in\mathbf{R})$ 是周期函数，任何正数都是它的周期，但没有最小正周期.

(4)函数的单调性　设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$.

如果对任意 x_1、$x_2\in I$，$x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；

如果对任意 x_1、$x_2\in I$，$x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 上单调增加；$y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加.

顺便指出，我们将在第三章“微分中值定理与导数应用”中利用导数工具方便地研究函数的单调性.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$，若对于任意 $y\in f(D)$，有唯一的 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D),$$

称 f^{-1} 为 f 的**反函数**.