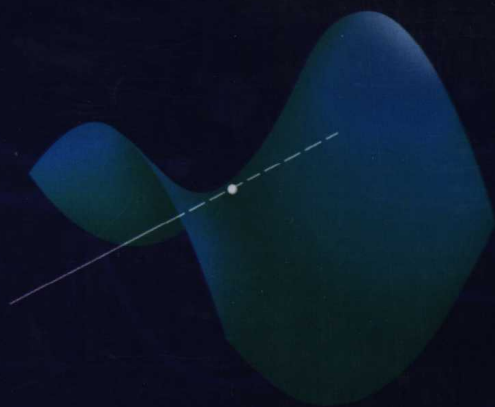
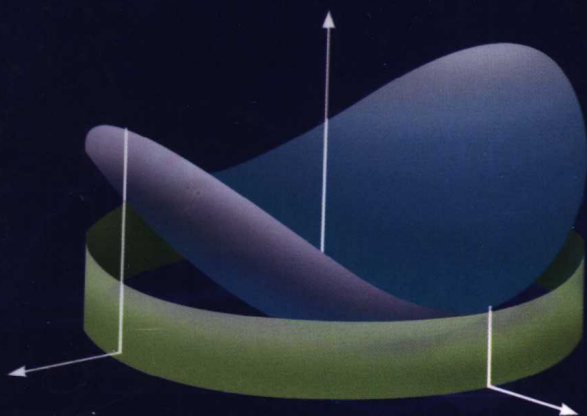




21世纪高等学校数学系列规划教材

高等数学

(经济管理类)

孙洪波 张文国 崔秀山 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪高等学校数学系列规划教材

高等数学

(经济管理类)

主编 孙洪波 张文国 崔秀山

主审 杨骅飞

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本教材根据教育部最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,按照新形势下数学教材改革和建设新的精神,结合编者多年的教学实践,为高等院校经济、管理类各专业高等数学课程的教学需要而精心编写。教材力求体现经济、管理专业的特点;体现因材施教;体现数学的素质教育和应用数学能力的培养。

本教材具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的特点。全书内容包括:函数与极限,一元函数微积分学及其应用,多元函数微积分学及其应用,微分方程和差分方程,无穷级数。

本书适合各类高等学校,尤其是第二、三类院校经济、管理类专业教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经济管理类/孙洪波,张文国,崔秀山主编. 北京:
中国铁道出版社,2007.7
(21世纪高等学校数学系列规划教材)
ISBN 978-7-113-08167-6

I. 高… II. ①孙…②张…③崔… III. 高等数学—高等
学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 133581 号

书 名:高等数学(经济管理类)
作 者:孙洪波 张文国 崔秀山 主编
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
策划编辑:李小军
责任编辑:李小军 徐盼欣
封面设计:路 瑶
封面制作:白 雪
校 对:毛玉兰
印 刷:北京市兴顺印刷厂
开 本:730×988 1/16 印张:20.75 字数:402 千
版 本:2007年8月第1版 2007年8月第1次印刷
书 号:ISBN 978-7-113-08167-6/O·165
定 价:29.00 元

版权所有 侵权必究

本书封面贴有中国铁道出版社激光防伪标签,无标签者不得销售
凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社计算机图书批销部调换。

前 言

进入新的世纪以来,我国的高等教育发生了很大的变化;同时,经济高速发展,科学技术日新月异,社会全面进入了信息时代。高等院校基础课的教学面临着许多前所未有的问题,特别是经济管理类数学课程的教学,遇到了前所未有的困难。正是在这样一种形势下,我们在总结多年经济管理类本科数学教学经验,以及探索经济管理类数学教学发展动向、分析国内外同类教材变革的基础上,根据教育部最新《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》,编写了这本适合于经济管理类本科生各专业使用的高等数学教材。

本书遵循注重基本概念、基本理论和基本方法,注重培养数学基本能力和基本素养,力求贴近实际、贴近经济管理类学生学习数学的需要。本书具有以下特色:

第一,突出经济管理类高等数学的基本思想和基本方法。力求使学生在过程中较好地了解经济管理类高等数学的基本内容,领会高等数学的思想方法,不过分强调严密的论证和推理过程,而更多地使学生体会高等数学的本质和高等数学的作用。

第二,体现基本能力的培养。本书叙述通俗易懂,又不失较严谨的数学逻辑,通过学习,可使学生掌握高等数学的基本概念、基本思想和基本方法。

第三,注重高等数学的实际应用。本书对基本概念的引入,力求从通俗的实际问题出发,自然而然地引出,例题和习题尽量采用经济、金融、管理领域和日常生活中的实际问题,希望以此提高学生的学习兴趣,以及利用高等数学工具解决实际问题的能力,达到学以致用,提高数学素质和素养的目的。

第四,考虑到各类学校的特点,本书对部分超出基本要求的内容以小字号排印,以体现各种不同的需求。

本书由孙洪波、张文国、崔秀山任主编,北京理工大学理学院杨骅飞教授担任主审。全书由孙洪波编写第七章的第一节至第八节,张文国编写第一、六、八章,崔秀山编写第二、三、四、五章。北京理工大学珠海学院基础部数学教研室教师王晓燕、刘志波、赵志红、贾云涛分别为本书第二、三、四、五章选编了全部习题和答案,并校对了相应的书稿;赵志红还编写了第七章的第九节,并选配了习题和答案。北京师范大学珠海校区数学系段文喜副教授在本书编写过程中提出了许多宝贵的建议。在此,向他们深表谢意。同时,感谢北京理工大学珠海学院、北京理工大学珠海学院教务处和中国铁道出版社对本书的顺利出版所给予的帮助和支持。

由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有疏漏和不足之处,望广大读者和同行专家批评指正。

编 者

2007年7月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合	1
二、函数	4
习题 1-1	9
第二节 数列的极限	10
一、数列极限的概念	10
二、收敛数列的性质	14
三、数列极限存在准则	17
习题 1-2	20
第三节 函数的极限	21
一、函数极限的概念	21
二、无穷小量与无穷大量	25
三、函数极限的性质及运算法则	27
四、两个重要极限	30
五、无穷小的比较	33
六、曲线的渐近线	35
习题 1-3	38
第四节 函数的连续性	39
一、连续函数的概念与基本性质	39
二、函数的间断点及其分类	44
三、闭区间上连续函数的性质	46
习题 1-4	47
第一章总习题	48
第二章 导数与微分	50
第一节 导数的概念	50
一、引例	50
二、函数导数的定义	51

三、导数的几何意义	54
四、函数可导性与连续性的关系	55
习题 2-1	56
第二节 函数的求导法则与基本初等函数求导公式	57
一、函数的和、差、积、商的求导法则	57
二、反函数的求导法则	58
三、复合函数的求导法则	60
四、基本初等函数的导数公式	63
习题 2-2	63
第三节 高阶导数	65
习题 2-3	67
第四节 隐函数的求导法则及对数求导法	68
一、隐函数的导数	68
二、对数求导法	69
习题 2-4	70
第五节 函数的微分	70
一、微分的定义	70
二、微分的几何意义	72
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	72
习题 2-5	74
第六节 导数在经济学中的应用	75
一、边际函数	75
二、边际成本	76
三、边际收益	76
四、边际利润	77
五、函数的弹性	78
习题 2-6	80
第二章总习题	81
第三章 微分中值定理与导数应用	83
第一节 微分中值定理	83
一、罗尔中值定理	83
二、拉格朗日中值定理	85
三、柯西中值定理	87
四、三个微分中值定理的关系	88

习题 3-1	88
第二节 洛必达法则	89
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	89
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	91
三、 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 型未定式的极限	92
习题 3-2	94
第三节 泰勒公式简介	95
习题 3-3	97
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	97
一、函数的单调性	97
二、曲线的凹凸性与拐点	99
习题 3-4	101
第五节 函数的极值与最值	102
一、函数的极值及其求法	102
二、最大值与最小值问题	105
三、经济应用问题举例	106
习题 3-5	108
第六节 函数图形的描绘	109
习题 3-6	111
第三章总习题	111
第四章 不定积分	112
第一节 不定积分的概念与性质	112
一、原函数与不定积分	112
二、不定积分的性质	115
三、基本积分公式	116
习题 4-1	119
第二节 换元积分法	120
一、第一换元法 (凑微分法)	120
二、第二换元法 (变量代换法)	125
习题 4-2	128
第三节 分部积分法	129
习题 4-3	132
第四节 有理函数积分简介	132

习题 4-4	135
第四章总习题	135
第五章 定积分及其应用	137
第一节 定积分的概念	137
一、引例	137
二、定积分的定义	139
三、定积分的几何意义	141
习题 5-1	142
第二节 定积分的性质	142
习题 5-2	144
第三节 微积分基本公式	144
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系	145
二、积分上限函数及其导数	145
三、牛顿—莱布尼兹公式 (微积分基本公式)	148
习题 5-3	150
第四节 定积分的计算	151
一、定积分的换元积分法	151
二、定积分的分部积分法	154
习题 5-4	155
第五节 广义积分与 Γ 函数	156
一、无穷区间上的广义积分 (无穷限的广义积分)	156
二、无界函数的广义积分	159
三、 Γ 函数*	161
习题 5-5	162
第六节 定积分在几何学上的应用	163
一、平面图形的面积	164
二、旋转体的体积	168
三、平行截面面积为已知的立体的体积	169
习题 5-6	171
第七节 定积分在经济问题中的应用	172
一、由边际函数求原函数	172
二、由变化率求总量	172
三、资本现值和投资问题	173
习题 5-7	174

第五章总习题	175
第六章 微分方程与差分方程	177
第一节 微分方程的基本概念	177
一、引例	177
二、微分方程的基本概念	178
习题 6-1	180
第二节 一阶微分方程	180
一、变量可分离方程	180
二、齐次方程	181
三、一阶线性微分方程	183
习题 6-2	185
第三节 可降阶的高阶微分方程	186
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型微分方程	186
二、 $y''=f(x, y')$ 型微分方程	187
三、 $y''=f(y, y')$ 型微分方程	187
习题 6-3	188
第四节 高阶线性微分方程	188
一、高阶线性微分方程的解的结构	189
二、二阶常系数齐次线性微分方程	191
三、 n 阶常系数齐次线性微分方程	193
四、二阶常系数非齐次线性微分方程	194
习题 6-4	199
第五节 微分方程的应用举例	200
习题 6-5	204
第六节 差分方程初步	204
一、差分的概念及性质	204
二、差分方程的基本概念	206
三、线性差分方程解的结构	207
四、一阶常系数线性差分方程	207
习题 6-6	210
第六章总习题	210
第七章 多元函数微积分学及其应用	212
第一节 空间直角坐标系	212
一、空间直角坐标系	212

二、空间两点的距离	213
习题 7-1	214
第二节 曲面与空间曲线	214
一、曲面及其方程	214
二、空间曲线及其在坐标面上的投影	217
习题 7-2	218
第三节 多元函数、极限和连续	218
一、二元函数的概念	219
二、二元函数的极限	220
三、二元函数的连续性	221
习题 7-3	222
第四节 偏导数与全微分	223
一、偏导数的概念及计算	223
二、高阶偏导数及其求法	225
三、全微分的概念	226
习题 7-4	228
第五节 多元复合函数和隐函数的求导法则	228
一、多元复合函数的求导法则	228
二、隐函数的求导法则	232
习题 7-5	234
第六节 多元函数的极值和最值	235
一、多元函数的极值	235
二、多元函数的条件极值	237
三、多元函数的最值	239
习题 7-6	241
第七节 二重积分的概念与性质	242
一、二重积分的概念	242
二、二重积分的性质	244
习题 7-7	245
第八节 二重积分的计算及简单应用	246
习题 7-8	255
第九节 三重积分简介	257
一、三重积分的概念	257
二、三重积分的计算	258

习题 7-9	262
第七章总习题	263
第八章 无穷级数	265
第一节 常数项级数的概念和性质	265
一、常数项级数的概念	265
二、无穷级数的基本性质	267
习题 8-1	270
第二节 常数项级数的审敛法	271
一、正项级数及其审敛法	271
二、交错级数及其审敛法	278
三、绝对收敛与条件收敛	280
习题 8-2	282
第三节 幂级数	283
一、函数项级数的概念	283
二、幂级数及其收敛性	284
三、幂级数的运算	288
习题 8-3	291
第四节 函数展开成幂级数	291
一、泰勒 (Taylor) 级数	291
二、函数展开成幂级数	293
习题 8-4	298
第五节 函数幂级数展开式的应用	298
一、计算函数的近似值	299
二、计算定积分的近似值	300
三、欧拉公式	301
习题 8-5	302
第八章总习题	303
习题参考答案	305

第一章

函数与极限

在初等数学中的我们主要研究了一些不变的量,也涉及到有关变量的一些简单的研究,高等数学课程将进一步对变量进行较深入的研究.所谓函数关系就是变量与变量之间的依赖关系,极限方法与理论则是研究函数的基本方法与理论基础.本章先复习函数的相关知识,然后介绍极限与函数连续性的基本概念、基本性质和基本理论,为学习高等数学打下一个良好的基础.

第一节 函 数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.例如,我校今年入学的全体新生构成一个集合,我班的全体同学构成一个集合,某商店的所有商品构成一个集合,全体实数构成一个集合,等等.一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的对象的全体,组成这个集合的每个对象称为这个集合的元素(简称元).

通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,则说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$ (或 $a \notin A$).只含有有限个元素的集合称为有限集,否则称为无限集.

集合的表示方法通常有两种:列举法和描述法.

所谓列举法,是指把集合的全体元素一一列举出来.例如,由 100 个元素 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ 组成的集合 A 可表示为:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\};$$

所谓描述法,是指把集合的元素所具有的共同特征描述出来.例如,方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解集 B 可表示为:

$$B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

常见几个的集合:

实数集: $\mathbf{R} = \{\text{全体实数}\}$;

复数集: $\mathbf{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}\}$;

整数集: $\mathbf{Z} = \{\text{全体整数}\}$;

自然数集: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

正整数集: $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

有理数集: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}_+, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}$;

空集: $\emptyset$, 不含任何元素的集合. 如 $\{x | x^2 = -1, x \in \mathbf{R}\} = \emptyset$.

2. 集合的关系

(1) **子集** 设 A, B 为两个集合, 若集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).

例如, 整数集、有理数集、实数集、复数集的关系为: $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

约定: 空集 $\emptyset$ 是任何一个集合 A 的子集, 即 $\emptyset \in A$.

(2) **相等** 若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

例如, 设 $A = \{2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 则显然 $A = B$.

(3) **真子集** 若 $A \subset B$, 但 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

例如, 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集, 即 $\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

3. 集合的运算

集合有三种基本运算: 并、交、差.

(1) **并** 由属于集合 A 或者属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并, 记作 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

(2) **交** 由既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交, 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

(3) **差** 由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差, 记作 $A \setminus B$. 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

(4) **全集与余集** 假设我们研究某问题总限定在一个较大的集合 I 中, 而研究的其他集合都是 I 的子集, 这时我们称 I 为全集; 若 $A \in I$, 称 $I \setminus A$ 为 A 的余集, 记作 A^c . 即

$$A^c = I \setminus A = \{x | x \in I \text{ 但 } x \notin A\}.$$

设 A, B, C 为任意三个集合, 则以下运算律成立:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(3) \text{ 分配律 } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

$$(4) \text{ 对偶律 } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

4. 区间、邻域

(1) **区间** 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, 则有以下定义(等号左边的符号为记号):

开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 称 a, b 为开区间 (a, b) 的端点;

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 称 a, b 为闭区间 $[a, b]$ 的端点;

半开区间: $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$;

无穷区间: $(-\infty, a) = \{x | x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$,

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, [a, +\infty) = \{x | x \geq a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R} = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

在今后的叙述中,若所涉及的区间不需要区分是否含有端点,以及是否是有限区间,我们便把它简称为区间. 图 1-1 是部分区间的示意图.

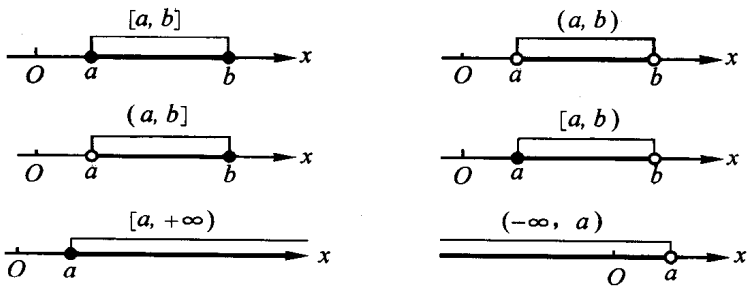


图 1-1

(2) **邻域** 设 a 为任意实数, 常数 $\delta > 0$, 称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 称 a 为邻域中心, δ 为邻域半径(如图 1-2 所示). 即

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

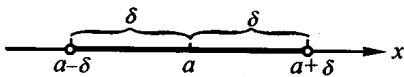


图 1-2

若在上述点 a 的 δ 邻域中去掉邻域中心 a , 则称之为点 a 的 δ 去心邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$ (如图 1-3 所示). 即

$$\dot{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

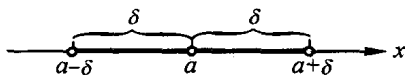


图 1-3

在今后的叙述中,若不必指明点 a 的邻域(或去心邻域)的半径,则简记为 $U(a)$ (或 $\dot{U}(a)$).

为了叙述方便,我们有时称 $(a-\delta, a)$ 为点 a 的 δ 左邻域,称 $(a, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 右邻域.

二、函数

1. 函数的概念

定义 1 设 D 是一个非空实数集合,有一个对应规则 f ,使每一个 $x \in D$,都有一个唯一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数,记作 $y=f(x), x \in D$.

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域,记作 D_f , 即 $D_f=D$.

按照函数的定义,对于每个 $x \in D$, 都有一个唯一确定的实数 y 与之对应,称 y 为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $y=f(x)$. 因变量 y 与 x 之间的这种依赖关系通常称为函数关系. 函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 $f(D)$ 或 R_f , 即

$$f(D)=R_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

函数的记号可用任意英文字母或希腊字母表示,如 $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$, $G(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, $\dots$, 等等.

函数的表示方法主要有三种:表格法、图示法、公式法(解析法). 这些方法在中学大家都已经熟悉了,这里不再赘述.

函数的定义域通常按以下两种情形确定:

(1) 对于有实际背景的函数(即就实际问题建立的函数关系),按变量的实际意义确定函数的定义域.

例如,自由落体运动中,物体运动的初始时刻记为 $t=0$, 落到地面的时刻记为 $t=T$, 则下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, 0 \leq t \leq T.$$

其定义域为 $[0, T]$.

又如,某种产品的年产值 $p=p(x)$, 其中 x 为年产量, t ; 年最大产量为 X , 则定义域为 $0 \leq x \leq X$.

(2) 对于不考虑实际背景的用算式表达的函数,约定这种函数的定义域是使算式有意义的一切实数.

例如, $y = \ln(1-x)$ 的定义域 $D = \{x \mid x < 1\}$;

$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域 $D = \{x \mid |x| > 1\}$.

2. 函数的几个特性

(1) 函数的有界性

若存在常数 M_1 , 使得当 $x \in I$ 时, 有 $f(x) \geq M_1$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有下界, 称 M_1 为 $f(x)$ 的一个下界;

若存在常数 M_2 , 使得当 $x \in I$ 时, 有 $f(x) \leq M_2$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有上界, 称 M_2 为 $f(x)$ 的一个上界;

若存在常数 M_1, M_2 , 使得当 $x \in I$ 时, 有 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

容易证明, $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是存在常数 $M > 0$, 使得当 $x \in I$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

另外, 从上述定义中还可以看出, 若 $f(x)$ 在 I 上有界, 则其界不唯一. 比某个固定的下界小的任何数都可作为它的下界, 比某个固定的上界大的任何数都可作为它的上界.

例如, $y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界, 这是因为对于一切 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $|\sin x| \leq 1$ (如图 1-4(a) 所示), 即 -1 是 $y = \sin x$ 的一个下界, 1 是它的一个上界, 显然任何小于等于 -1 的数都是它的下界, 任何大于等于 1 的数都是它的上界; 又如, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$ (如图 1-4(b) 所示), 即 $y = \arctan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界; 再如, 由于在 $(1, 2)$ 内, $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$, 所以, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内有界, 但它在 $(0, 1)$ 内只有下界, 而无上界 (由于当 x 从大于零的方向充分接近于零时, 函数 $f(x)$ 会无限变大), 因此, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界 (如图 1-4(c) 所示).

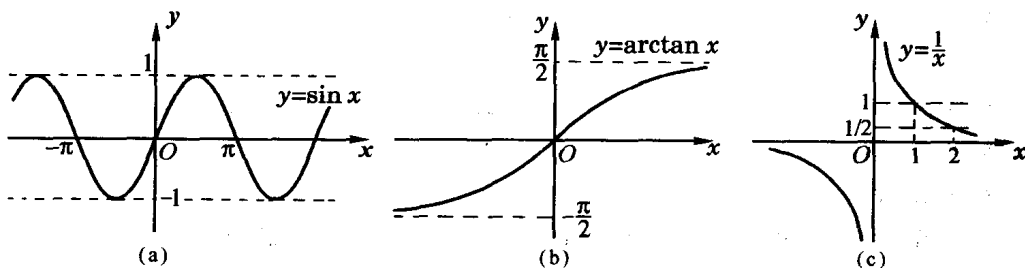


图 1-4

(2)函数的奇偶性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

如果对于任意 $x \in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)-f(x)=0$), 则称 $f(x)$ 为偶函数;

如果对于任意 $x \in D$, 都有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)+f(x)=0$), 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y=x^2$ 是偶函数; $y=\sin x$ 是奇函数; $y=0$ 既是奇函数又是偶函数; $y=x+\cos x$ 既不是奇函数又不是偶函数.

又如, 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数, 且 $f(x)=g(x)+h(x)$. 即任何一个定义域关于原点对称的函数都可以分解成一个奇函数与一个偶函数之和.

容易证明: 两个奇函数之积或两个偶函数之积都是偶函数, 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

(3)函数的周期性 如果存在常数 $T>0$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期. 我们知道周期函数的周期不唯一, 而通常所说的某函数的周期是指它的最小正周期.

例如, 中学所熟知的三角函数都是周期函数. $y=\sin x$ 的周期为 2π ; $y=\tan x$ 的周期 π ; 特别地, $y=1 (x \in \mathbf{R})$ 是周期函数, 任何正数都是它的周期, 但没有最小正周期.

(4)函数的单调性 设 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$.

如果对任意 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;

如果对任意 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加; $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加.

顺便指出, 我们将在第三章“微分中值定理与导数应用”中利用导数工具方便地研究函数的单调性.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 $f(D)$, 若对于任意 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$ 使得 $f(x)=y$, 记作

$$x=f^{-1}(y), y \in f(D),$$

称 f^{-1} 为 f 的反函数.