按新课标模块编写的最新数学竞赛教材

马 兵 主编

专题分册

高中数学竞赛
标准教材

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛标准教材（高一分册）

高中数学竞赛标准教材（高二分册）

高中数学竞赛标准教材（专题分册）

高中数学竞赛标准教材（模拟训练）

新课标高中数学竞赛通用教材（高一分册）

新课标高中数学竞赛通用教材（高二分册）

新课标高中数学竞赛通用教材（综合分册）

ISBN 978-7-308-05372-3

9 787308 053723 >

定价：32.00元

高中数学竞赛标准教材

（专题分册）

马兵　主编

- 赛点提炼
- 赛题探究
- 赛场训练

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛标准教材．专题分册/马兵主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-308-05372-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．马…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082236 号

高中数学竞赛标准教材(专题分册)

主　　编　马兵

责任编辑　杨晓鸣　魏文娟
封面设计　成功
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　浙江省良渚印刷厂
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　25
印　　数　0001－8000
字　　数　640 千字
版 印 次　2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05372-3
定　　价　32.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　言

高中数学怎样学，说法很多，有人说难题不用做，把基础搞好就可以，以不变应万变；有人主张以历年考试真题为训练目标，万变不离其宗；有人搞题海战术，反复做题，达到熟能生巧的程度，一切问题迎刃而解.我认为与其说数学水平体现在高考和竞赛的成绩上，还不如说取决于解题能力的高低，只注重基础知识，而忽视能力训练，不利于学生数学综合素养的培养；光做难题不善于提炼方法，同样也不利于学生全面发展.对即将参加高考和竞赛学生而言，学好数学重要的一环就是学习解题，首先要在解题中学解题，因此要做好题，精做题.做好题是本书写作的目标，精做题则要求解题后的反思和总结，多提一些诸如“解法是否有普通意义？有无更好的解法？定理或方法还有哪些变形？这类问题还有哪些解法？这种方法还有哪些应用和推广？”的问题.在解题中提炼方法，做到站在竞赛的水平看高考；同时立足基础，驾轻就熟，以不变应万变来应对比赛；培养不畏艰险，永往直前的科学精神.这是我认为学好数学应具备的心态.

写本书之前，笔者在高中执教数学 11 年，起初按高考要求教了 4 年，接下来讲了 4 年奥林匹克数学，接着又按高考要求从高一到高三教了一轮.这些年一直在为高考、竞赛而解题，逐渐积累了一些方法和题目.2007 年年初在杭州与老朋友包善贤老师相遇，在他的推动下有了写本书的想法，在此对他的支持和帮助表示感谢.

张利民

2007 年 5 月

目　录

第三章　平面几何

第四章　组合数学

第一章　代数问题

第一节　函数与函数方程

函数既是高中数学，更是高等数学的基础，是高中数学竞赛的重要内容之一. 在“高中数学联赛”中主要考查函数的性质（函数解析式、定义域和值域、函数单调性、周期性）、二次函数、反函数及与函数有关的其他问题（函数最值问题，函数图象变换及应用，构造函数解题）.

函数方程的解法是古老的分析问题之一. 早在 230 多年前的 1769 年法国数学家、力学家达朗贝尔在论证力的合成时，就导出了函数方程：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. 法国数学家柯西给出了这个方程的解，并创造了一种解函数方程，被后人称为柯西方法. 许多数学家都曾对函数方程进行过研究，可是至今还没有完整的理论和解法. 一些简单的函数方程，只需要以初等数学为工具，这类题目经常在数学竞赛中出现. 在 IMO 竞赛中，从 20 世纪 70 年代以来，几乎每年都会有一道有关函数方程方面的题目.

赛点提炼

定义 1.1　设 A 和 B 是两个给定的集合，如果按照某种对应法则 f，使得对于每一个 $x\in A$，通过 f，唯一确定一个 $y\in B$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个映射，记为 $f\colon A\to B$.

集合 A 叫做映射 f 的定义域，集合 B 叫做映射 f 的值域，称 y 为 x 在映射 f 作用下的象，记作 $y=f(x)$，并用符号 $f\colon x\mapsto y$ 表示，称 x 为 y 的一个原象.

定义 1.2　设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果对任意的 $a_1, a_2\in A$，当 $a_1\neq a_2$ 时，必有 $f(a_1)\neq f(a_2)$，那么称 f 是 A 到 B 的一个单射；如果对于任意 $b\in B$，均存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$，那么称 f 是 A 到 B 的一个满射.

若 $A=B$，f 定义为 $f\colon x\mapsto x$（其中 $x\in A$），则这个映射称为 A 上的恒等映射（或单位映射）.

定义 1.3　设 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 f 既是单射，又是满射，那么 f 称为一一对应（或双射）.

- 恒等映射是一一对应.

如果集合 A 与集合 B 之间存在一一对应 f，那么集合 A 与集合 B 的元素个数相等，即 $|A|=|B|$.

反过来，如果 $|A|=|B|$，那么在集合 A 与集合 B 之间必存在一个一一对应，这只要将 A 中的第一个元素与 B 中的第一个元素对应，A 中的第二个元素与 B 中的第二个元素对应，依此类推即可.

定义 1.4　从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f\colon A\to B$ 叫做 A 到 B 的函数，记作：$y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$. 这里的数集 A 称为函数 f 的定义域. 对于 A 中的每一个元素 x，根据对应法则 f 所对应的 B 中的元素 y，称为 f 在点 x 的函数值，记为 $f(x)$. 全体函数值的集合 $f(A)=\{y\mid y=f(x),\ x\in A\}\subseteq B$，称为函数 f 的值域.

定义 1.5　设有两个函数：$f=f(u)$，$u\in D$；$u=g(x)$，$x\in E$.

如果集合 $E^*=\{x\mid g(x)\in D,\ x\in E\}\neq\varnothing$，则对每一个 $x\in E^*$，可通过函数 g 对应 D 中唯一一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一一个值 y. 这样就确定了一个定义在 E^* 上，以 x 为自变量，y 为因变量的函数，记作 $y=f(g(x))$，$x\in E^*$ 或 $y=(f\cdot g)(x)$，$x\in E^*$，称为由函数 f 和 g 经过复合运算得到的复合函数.

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$.　① 若对于值域 $f(D)$ 中每一个值 y_0，D 中有且只

有一值 x_0，使得 $f(x_0)=y_0$，则按此对应法则能得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作：f^{-1}：$f(D)\to D$ 或

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D). \quad ②$$

习惯上，我们用 x 作为自变量的记号，y 为因变量的记号，因此，函数①的反函数②可改写为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D；且 D 是关于原点对称的数集. 若对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数. 若对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数.

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I. 如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上是增函数，如图 1-1(1)所示.

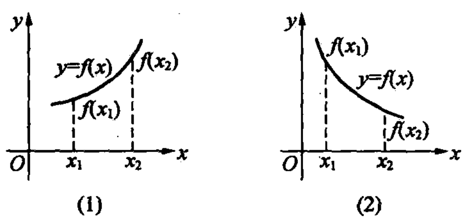

图 1-1

函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上是减函数，如图 1-1(2)所示.

如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上是增函数或减函数，那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上有(严格的)单调性，这一区间叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对每个 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么称 $f(x)$ 是周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期；如果 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小值 T_0，那么称 T_0 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期.

一般说函数的周期都是指最小正周期.

定义 1.10 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在 $x_0\in D$，使得对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值，简记为 $f_{\max}$；若存在 $y_0\in D$，使得对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant f(y_0)$，则称 $f(y_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最小值，简记为 $f_{\min}$.

定义 1.11 设 f：$D\mapsto D$ 是一个函数，对任意 $x\in D$，记

$$f^{(0)}(x)=x,$$
$$f^{(1)}(x)=f(x),$$
$$f^{(2)}(x)=f(f(x)),$$
$$f^{(3)}(x)=f(f(f(x))),$$
$$\cdots$$
$$f^{(n+1)}(x)=f(f^{n}(x)),$$
$$\cdots$$

则称 $f^{(n)}(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 D 上的 n 次迭代，并称 n 是 $f^{(n)}(x)$ 的迭代指数. 如果 $f^{(n)}(x)$ 有反函数，则记为 $f^{(-n)}(x)$，于是，迭代指数可取所有整数. 求一个函数的 n 次迭代，是数学竞赛中的一种基本题型. 对于一些简单的函数，它的 n 次迭代是容易得到的.

若 $f(x)=x+c$，则 $f^{(n)}(x)=x+nc$，

$f^{(-1)}(x)=x-c$，$f^{(-n)}(x)=x-nc$.

若 $f(x)=x^3$，则 $f^{(n)}(x)=x^{3^n}$，

$f^{(-1)}(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$f^{(-n)}(x)=x^{\frac{1}{3^n}}$.

若 $f(x)=ax+b$，则

$$f^{(n)}(x)=a^n\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a},$$

$$f^{(-1)}(x)=\frac{1}{a}\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a},$$

$$f^{(-n)}(x)=\frac{1}{a^n}\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}.$$

定义 1.12 含有未知函数的等式叫做函数方程.

例如：(1) $f(x)=f(-x)$，

(2) $f(x)=-f(-x)$，

(3) $f(x+T)=f(x)$(常数 $T\neq 0$)，

(4) $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$，

(5) $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x+1$，都是函数方程，其中 $f(x)$ 是未知函数.

定义 1.13 如果函数 $f(x)$ 在其定义域内的一切值均满足所给函数方程，那么称 $f(x)$

是该函数方程的解.

函数方程的解是一个或几个,甚至无限多个函数.例如,上述函数方程(1)(2)(3)的解分别是一切偶函数,一切奇函数,一切以 T 为周期的函数.

定义 1.14 寻求函数方程的解或证明函数方程无解的过程,叫做解函数方程.

有关函数方程方面的题目大致可分为三类:(一)确定函数的表达式;(二)确定满足函数方程的函数的性质;(三)确定函数值.

解函数方程没有统一的方法,但还是有一些基本的解法.常见的方法有:(1)定义法;(2)换元法;(3)解方程组法;(4)赋值法;(5)待定系数法;(6)递推法;(7)数列法;(8)数学归纳法;(9)参数法;(10)函数迭代法;(11)不动点法;(12)反证法;(13)柯西方法;(14)构造法.

赛题探究

题型一 映射与函数

例 1 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$.

(1)从 A 到 B 的不同的映射有多少个?

(2)从 A 到 B 的映射满足 $f(a_1)>f(a_2)\geqslant f(a_3)$,确定这样的映射 $f: A\to B$ 的个数.

【讲解】 (1)确定 a_1 的象,有 3 种方法;确定 a_2 的象,有 3 种方法;确定 a_3 的象,也有 3 种方法.所以,从 A 到 B 不同的映射共有 $3\times 3\times 3=27$(个).

(2)由 $f(a_1)>f(a_2)\geqslant f(a_3)$ 知,$f(a_1)=0$ 或 1.

若 $f(a_1)=0$,则 $f(a_2)=f(a_3)=-1$.

若 $f(a_1)=1$,则 $f(a_2)=f(a_3)=0$,

或 $f(a_2)=f(a_3)=-1$,

或 $f(a_2)=0$, $f(a_3)=-1$.

综上,共有 4 种满足题意的映射.

例 2 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1)写出一个 $f: A\to B$,使得 f 是单射,并求 A 到 B 的单射个数;

(2)写出一个 $f: A\to B$,使得 f 不是单射,并求所有这种映射的个数;

(3)A 到 B 的映射能否是满射?

【讲解】 (1)映射 f: $a_1\mapsto b_1$, $a_2\mapsto b_2$, $a_3\mapsto b_3$ 就是 A 到 B 的一个单射.

这种映射的个数为 $P_4^3=24$(个).

(2)映射 f: $a_1\mapsto b_1$, $a_2\mapsto b_1$, $a_3\mapsto b_1$ 即为所求.

这种映射的个数为 $4^3-P_4^3=40$(个).

(3)答案是否定的.由于集合 A 中的每一个元素恰与集合 B 中的一个元素对应,而 $|A|=3$, $|B|=4$(用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数),所以集合 B 中至少有一个元素,在集合 A 中找不到与它对应的元素.因而 A 到 B 的满射不存在.

例 3 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义,且 $f(x-y)=f(x)\cdot g(y)-g(x)\cdot f(y)$, $f(-2)=f(1)\neq 0$,求 $g(1)+g(-1)$ 的值.

【讲解】 因为

$$f(x-y)=f(x)\cdot g(y)-g(x)\cdot f(y),$$

则

$$f(y-x)=f(y)\cdot g(x)-g(y)\cdot f(x),$$

从而

$$f(x-y)=-f(y-x).$$

因此 $f(x)$ 为奇函数.

又
$$\begin{aligned} f(1)&=f(-2)=f(-1-1)\\ &=f(-1)\cdot g(1)-g(-1)\cdot f(1)\\ &=-f(1)[g(1)+g(-1)], \end{aligned}$$

且 $f(1)\neq 0$,

所以 $g(1)+g(-1)=-1$.

小结 根据函数 f 的性质,推知它为奇函数,为了得到 $g(1)+g(-1)$ 的值,将 $f(-2)$ 写成 $f(-1-1)$,是一个技巧.

例 4 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(2)=0$.对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$$f(x+4)=f(x)+f(2-x) \quad ①$$

成立,求 $f(1998)$ 的值.

【讲解】 在①式中令 $x=-2$,则

$$\begin{aligned} f(2)&=f(-2)+f(4)\\ &=-f(2)+f(4). \end{aligned}$$

从而 $f(4)=2f(2)=0$.

又在①中令 $x=0$,得

$0=f(4)=f(0)+f(2)=f(0)$.

再令 $x=4$,得

$f(8)=f(4)+f(-2)=0$.

一般地 $f(4k)=0$ 及 $f(4k+2)=0$,

于是 $f(1998)=f(499\times4+2)$

$=f(2)=0$.

小结 反复利用条件式①及 $f(2)=0$,求得 $f(4)=f(8)=f(4k)=0$ 及 $f(6)=f(4k+2)=0$. 但并不能设 $f(x)$是以 4 为周期的函数. 事实上,在①式中不能断定 $f(2-x)\equiv0$.

例 5 给定一个正整数 n,有多少个满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$ 的四元有序整数组 (a, b, c, d)?

【讲解】 做映射 $f:(a, b, c, d)\rightarrow(a, b+1, c+2, d+3)$.

于是 f 是从集合 $A=\{a, b, c, d\}|0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n\}$ 到集合 $B=\{(a, b', c', d')|0\leqslant a<b'<c'<d'\leqslant n+3\}$ 的一个映射. 容易验证这个映射是一一对应. 所以 $|A|=|B|$.

由于 $|B|$ 就是集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n+3\}$ 的四元子集的个数,即 C_{n+4}^4,从而 $|A|=C_{n+4}^4$.

例 6 已知 a, b, c, d 为非零实数,$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,$x\in\mathbf{R}$,且 $f(19)=19$, $f(97)=97$. 若当 $x\neq-\dfrac{d}{c}$ 时,对于任意实数 x,均有 $f[f(x)]=x$,试求出 $f(x)$ 值域以外的唯一数.

【讲解】 由题设,对任意实数 $x\neq-\dfrac{d}{c}$,有 $f[f(x)]=x$,所以

$$\frac{a\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=x.$$

化简,得

$(a+d)cx^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0$.

由于上述方程对 $x\neq-\dfrac{d}{c}$ 恒成立,故 $a+d=0$,且 $d^2-a^2=0$,所以 $d=-a$.

又 $f(19)=19$, $f(97)=97$,即 19, 97 是方程 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ 的两个根,即 19, 97 是方程 $cx^2+(d-a)x-b=0$ 的两个根,故由韦达定理,得 $\dfrac{a-d}{c}=116$, $-\dfrac{b}{c}=1843$.

结合 $d=-a$,得 $a=58c$, $b=-1843c$, $d=-58c$,从而

$$f(x)=\frac{58x-1843}{x-58}=58+\frac{1521}{x-58}.$$

于是 $f(x)$ 取不到 58 这个数,即 58 是 $f(x)$ 值域外的唯一数.

题型二 函数基本性质

例 7 设常数 $a>1>b>0$,则当 a, b 满足什么关系时,$\lg(a^x-b^x)>0$ 的解集为 $(1, +\infty)$?

【讲解】 因为 $a^x-b^x>0$,故 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x>1$.

又因为 $\dfrac{a}{b}>1$,所以当 $x\in(0, +\infty)$ 时,欲使 $\lg(a^x-b^x)>0$ 的解集为 $(1, +\infty)$,只需 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,且 $f(1)=0$.

设 $x_2>x_1>0$,

若 $f(x_1)-f(x_2)$

$=\lg(a^{x_1}-b^{x_1})-\lg(a^{x_2}-b^{x_2})$

$=\lg\left(\dfrac{a^{x_1}-b^{x_1}}{a^{x_2}-b^{x_2}}\right)<0$,

则需 $\dfrac{a^{x_1}-b^{x_1}}{a^{x_2}-b^{x_2}}<1$,

即 $a^{x_1}-a^{x_2}<b^{x_1}-b^{x_2}$. ①

因为 $x_2>x_1>0$, $a>1>b>0$,

故 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$, $b^{x_1}-b^{x_2}>0$.

因此①式成立. 从而 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

又由 $f(1)=\lg(a-b)=0$,得

$a-b=1$, $a=b+1$.

总之,当 $a=b+1$ 时,$\lg(a^x-b^x)>0$ 的解集为 $(1, \infty)$.

小结　令 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$，将问题转化为该函数在 $(0,+\infty)$ 上为增函数且 $f(1)=0$，这就化简了原命题.

例 8　已知二次函数 $f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最小值为 2，求 a 的值.

【讲解】　将函数式配方：

$$f(x)=4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-2a+2.$$

(1) 当 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 1$，即 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，

$f_{最小}(x)=-2a+2=2$，故 $a=0$.

(2) 当 $\frac{a}{2}<0$，即 $a<0$ 时，

$f_{最小}(x)=f(0)=a^2-2a+2=2$.
故 $a=0$ 或 2，都与 $a<0$ 矛盾，故无解.

(3) 当 $\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，

$f_{最小}(x)=f(1)=4-4a+a^2-2a+2=2$.

解得 $a=3+\sqrt{5}$ 或 $a=3-\sqrt{5}$（舍去）. 总之，满足题且要求的值为 $a=0$ 和 $3+\sqrt{5}$.

小结　本题容易产生误解，以为只需考虑情况 1，而只求得一解 $a=0$. 实际上，还应该考虑 $\frac{a}{2}<0$ 和 $\frac{a}{2}>1$ 的情况，从而知 $a=3+\sqrt{5}$ 也是问题的解.

例 9　设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 满足

$$b[f(x+p)+f(x)]=a[1-f(x)f(x+p)]. \quad ①$$

这里 a，b，p 均为非零常数. 求证：$f(x)$ 是一个周期函数，并求其周期.

【讲解】　(1) 先证明 $f(x)\neq-\frac{b}{a}$，$x\in\mathbf{R}$.

事实上，若 $f(x)=-\frac{b}{a}$，则 $bf(x+p)-\frac{b^2}{a}=a+bf(x+p)$，而有 $a^2+b^2=0$，这与 a，b 是非零数矛盾.

(2) 由 ① 得

$$f(x+p)=\frac{a-bf(x)}{b+af(x)}\,(b+af(x)\neq 0)$$

$$=\frac{a-b\dfrac{a-bf(x-p)}{b+af(x-p)}}{b+a\dfrac{a-bf(x-p)}{b+af(x-p)}}$$

$$=\frac{b^2+a^2}{b^2+a^2}f(x-p)$$

$$=f(x-p).$$

所以，$f(x)$ 是以 $2p$ 为周期的函数.

小结　在思考时，实际上是先从第二步开始，然后再发现需要 $b+af(x)\neq 0$，于是要先证 $f(x)\neq-\frac{b}{a}$.

例 10　设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$，对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,\ l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立. 问：a 为何值时 $l(a)$ 最大？求出这个最大的 $l(a)$，并证明你的结论.

【讲解】　$f(x)=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+3-\frac{16}{a}$，

因为 $a<0$，所以 $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=3-\frac{16}{a}$.

分两种情况讨论：

(1) 当 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，如图 1-2(1) 所示，若使在整个区间 $[0,\ l(a)]$ 上，$|f(x)|\leqslant 5$ 恒成立，则 $0<l(a)<-\frac{4}{a}$，且 $l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=5$ 的较小根.

$$l(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}<\frac{1}{2}.$$

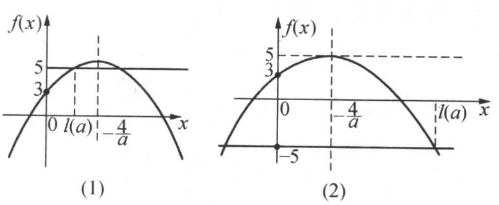

图 1-2

(2) 当 $3-\frac{16}{a}\leqslant 5$，即 $a\leqslant-8$ 时，如图 1-2(2) 所示，若使得在 $[0,\ l(a)]$ 上，$|f(x)|$

$\leqslant 5$ 恒成立，则 $l(a) > -\dfrac{4}{a}$，且 $l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=-5$ 的较大根.

$$l(a)=\frac{-8-\sqrt{64-32a}}{2a}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

当且仅当 $a=-8$ 时，等号成立.

由于 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}>\dfrac{1}{2}$，因此，当且仅当 $a=-8$ 时，$l(a)$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

小结 解题思路是：设法将 $l(a)$ 表示成 a 的式子，再求它的最大值.

例 11 关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个实根为 α，$\beta(\alpha<\beta)$.

(1) 若 x_1，x_2 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{4x-t}{x^2+1}$，$f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值和最小值分别为 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$，$g(t)=f_{\max}-f_{\min}$，求 $g(t)$ 的最小值.

【讲解】 (1) 因为 x_1，$x_2\in[\alpha,\beta]$，所以由抛物线 $y=2x^2-tx-2$ 的开口向上，可知 $f(x_1)\leqslant 0$ 且 $f(x_2)\leqslant 0$.

即 $2x_1^2-tx_1-2\leqslant 0$，$2x_2^2-tx_2-2\leqslant 0$.

两式相加，得

$2(x_1^2+x_2^2)-t(x_1+x_2)-4\leqslant 0$，

故由平均值不等式可得

$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$.

(2) 依题意 $\alpha=\dfrac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}$，

$$\beta=\frac{t+\sqrt{t^2+16}}{4}.$$

所以

$$f(\alpha)=\frac{4\cdot\dfrac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}-t}{\left(\dfrac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}\right)^2+1}$$

$$=\frac{-16\sqrt{t^2+16}}{t^2+t^2+16-2t\sqrt{t^2+16}+16}=\frac{-8}{\sqrt{t^2+16}-t},$$

$$f(\beta)=\frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}.$$

由 $\sqrt{t^2+16}\geqslant|t|$，知 $f(\beta)>0>f(\alpha)$.

另一方面，设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{[4+t(x_1+x_2)-4x_1x_2]}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(x_1-x_2).$$

由(1)的结论可知 $f(x_1)<f(x_2)$. 从而 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数.

所以

$$g(t)=f_{\max}-f_{\min}=f(\beta)-f(\alpha)=\frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}-\frac{-8}{\sqrt{t^2+16}-t}=\sqrt{t^2+16}\geqslant 4.$$

等号在 $t=0$ 时取到. 因此，$g(t)$ 的最小值为 4.

小结 (2)中函数 $f(x)$ 中含有参数 t，对于每个 t 值，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上最大值与最小值是 t 的函数. 因此，$f(x)$ 应写成 $f(x,t)$，是二元函数.

例 12 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 满足条件：

(1) $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$；

(2) 当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$；

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$，使存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

【讲解】 因为 $f(x-4)=f(2-x)$，所以函数的图象关于 $x=-1$ 对称，

即 $-\dfrac{b}{2a}=-1$，$b=2a$.

由(3)可知，当 $x=-1$ 时，$y=0$，即 $a-b+c=0$.

由(1)得 $f(1)\geqslant 1$，由(2)得 $f(1)\leqslant 1$，所以 $f(1)=1$，即 $a+b+c=1$.

故有 $a=c=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

假设存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1,m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$.

取 $x=1$,有 $f(t+1)\leqslant 1$,即

$\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{2}(t+1)+\frac{1}{4}\leqslant 1$,

解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$.

对固定的 $t\in[-4,0]$,取 $x=m$,有 $f(t+m)\leqslant m$,即

$\frac{1}{4}(t+m)^2+\frac{1}{2}(t+m)+\frac{1}{4}\leqslant m$,

化简为

$m^2-2(1-t)m+(t^2+2t+1)\leqslant 0$,

解得 $1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$.

于是有 $m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$

$\leqslant 1-(-4)+\sqrt{-4(-4)}=9$.

当 $t=-4$ 时,对任意的 $x\in[1,9]$,恒有

$$f(x-4)-x=\frac{1}{4}(x^2-10x+9)=\frac{1}{4}(x-1)(x-9)\leqslant 0.$$

所以 m 的最大值为 9.

小结　用特值法,取 $x=1$,解得 $[-4,0]$为 t 的最终范围,进而在其中找到当 $t=-4$ 时 m 有最大值 9.若就 x 取遍$[1,m]$中的所有值,代入 $f(x+t)\leqslant x$,得关于t的不等式组来进行讨论也很简便.

记 $G(x)=f(x+t)-x$,则 $G(x)$为二次函数,由题意可知,原问题等价于 $G(x)\leqslant 0$,即函数图象在$[1,m]$上分布于 x 轴下方(图象端点可在 x 轴上),即

$$\begin{cases}G(1)\leqslant 0,\\ G(m)\leqslant 0\end{cases}$$

故
$$\begin{cases}\dfrac{(1+t)^2}{4}+\dfrac{1+t}{2}+\dfrac{1}{4}-1\leqslant 0, & ①\\ \dfrac{(t+m)^2}{4}+\dfrac{m+t}{2}+\dfrac{1}{4}-m\leqslant 0. & ②\end{cases}$$

由①得 $t^2+4t\leqslant 0$,解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$.

由假设知,关于 t②有解.设为$\{t|t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$,且与①的交集非空,即存在 $t\in\{t|-4\leqslant t\leqslant 0\}\cap\{t|t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$,则记

$$h(t)=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}(1+m)t+\frac{m^2}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}.$$

(1) 若 $-4<t_1<0<t_2$ 时,须有 $h(0)<0$,但 $h(0)=\frac{m^2}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(m-1)^2\geqslant 0$,

故此情况不存在.

(2) 若 $-4<t_1<t_2<0$ 时,则

$$\begin{cases}h(-4)>0,\\ h(0)>0,\\ -4<-(m+1)<0,\\ \Delta=\frac{1}{4}(1+m)^2-4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right)\geqslant 0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}m>9\text{ 或 }m<1,\\ m\neq 1,\\ -1<m<3,\\ m\geqslant 0.\end{cases}$$

故知 m 无解.

(3) 若 $-t_1\leqslant -4\leqslant t_2\leqslant 0$ 时,则

$$\begin{cases}h(-4)\leqslant 0,\\ h(0)\geqslant 0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}m^2-10m+9\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}(m-1)^2\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $1\leqslant m\leqslant 9$.

故知 m 最大值为 9.

题型三　函数最值问题

例 13　若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$在区间$[a,b]$上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,求$[a,b]$.

【讲解】　分三种情况讨论区间$[a,b]$.

(1) 若 $0\leqslant a<b$,则 $f(x)$在$[a,b]$上单调递减,故 $f(a)=2b$, $f(b)=2a$.

于是有
$$\begin{cases}2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},\\ 2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}.\end{cases}$$

解之得$[a, b]=[1, 3]$.

(2) 若$a<0<b$, $f(x)$在$[a, 0]$上单调递增,在$[0, b]$上单调递减.因此,$f(x)$在$x=0$处取最大值$2b$,在$x=a$或$x=b$处取最小值$2a$.

故$2b=\frac{13}{2}$, $b=\frac{13}{4}$.

由于$a<0$,又

$f(b)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$,

故$f(x)$在$x=a$处取最小值$2a$,即

$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$,解得

$a=-2-\sqrt{17}$.

于是得$[a, b]=\left[-2-\sqrt{17}, \frac{13}{4}\right]$.

(3) 当$a<b\leqslant 0$时,$f(x)$在$[a, b]$上单调递增,故$f(a)=2a$, $f(b)=2b$.

即$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$, $2b=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}$.

由于方程$\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$的两根异号,故满足$a<b<0$的区间不存在.

综上所述,所求区间为$[1, 3]$或$\left[-2-\sqrt{17}, \frac{13}{4}\right]$.

小结 对于一般的二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$在闭区间$[p, q]$上的最值,只能在$x=-\frac{b}{2a}$处及区间的两端点处取得,具体如下:

(1) 当$a>0$时,若$-\frac{b}{2a}\in[p, q]$,则

$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$,

$f(x)_{\max}=\max\{f(p), f(q)\}$;

若$-\frac{b}{2a}\notin[p, q]$,则

$f(x)_{\max}=\max\{f(p), f(q)\}$,

$f(x)_{\min}=\min\{f(p), f(q)\}$.

(2) 当$a<0$时,若$-\frac{b}{2a}\in[p, q]$,则

$f(x)_{\max}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$,

$f(x)_{\min}=\min\{f(p), f(q)\}$.

例 14 设$a\in\mathbf{R}$,函数$f(x)=ax^2+x-a(|x|\leqslant 1)$.

(1) 若$|a|\leqslant 1$,试证:$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}$;

(2) 求a的值,使函数$f(x)$有最大值$\frac{17}{8}$.

【讲解】 (1)

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|ax^2+x-a|\\&=|a(x^2-1)+x|\\&\leqslant|a(x^2-1)|+|x|\\&\leqslant|x^2-1|+|x|\\&=1-|x^2|+|x|\\&=-\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\\&\leqslant\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

(2) 当$a=0$时,$f(x)=x(|x|\leqslant 1)$的最大值是$f(1)=1$,与题设矛盾.

当$a\neq 0$时,$f(x)$为二次函数.

1) 当$a>0$时,其开口向上,故最大值只能在$x=-1$或$x=1$时取得,而

$f(-1)=a-1-a=-1$,矛盾.

$f(1)=a+1-a=1$,也矛盾.

2) 当$a<0$时,最大值同样不会在$x=1$和$x=-1$上取得,故使得

$f(x)=ax^2+x-a(|x|\leqslant 1)$

有最大值$\frac{17}{8}$,只能等价于

$$\begin{cases}-1<-\frac{1}{2a}<1,\\ f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\frac{17}{8},\\ a<0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a<-\frac{1}{2},\\ (a+2)\left(a+\frac{1}{8}\right)=0\end{cases}\Rightarrow a=-2.$$

因此,使函数$f(x)$有最大值的$a=-2$.

小结 本题可以用求导数方法来做.

例 15 对于$x\in\mathbf{R}$, $f(x)=\min\{4x+2, -12x^2+12, -2x+4\}$,求$f(x)$的表达式及

$f(x)_{\max}$.

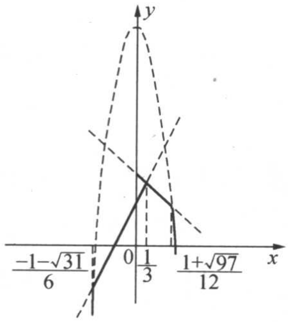

图 1-3

【讲解】 如图 1-3 所示，在同一直角坐标系中作出 $y_1=4x+2$，$y_2=-12x^2+12$，$y_3=-2x+4$ 的图象. 根据 $f(x)$ 的定义，可得 $f(x)$ 的分段表达式

$$f(x)=\begin{cases}-12x^2+12,\ x\leqslant\dfrac{-1-\sqrt{31}}{6}\text{ 或 } x\geqslant\dfrac{1+\sqrt{97}}{12},\\ 4x+2,\ \dfrac{-1-\sqrt{31}}{6}<x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ -2x+4,\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1+\sqrt{97}}{12}.\end{cases}$$

从图象上可以看出，当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，

$$f(x)_{\max}=\frac{10}{3}.$$

小结 该题涉及到两个一元一次函数与一个一元二次函数. 若能根据题设要求画出 $f(x)$ 的图象，再利用数形结合的方法则可以很直观地解决问题.

例 16 设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$. 求 $u=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}+\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}+\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}$ 的最小值.

【分析】 对于递增函数 $f(x)$，$x\in D$，若 $x_1, x_2\in D$，则 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0$.

对于递减函数 $f(x)$，$x\in D$，若 $x_1, x_2\in D$，则 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant 0$.

【讲解】 令

$$f(t)=\frac{t}{1+t^2},\ t\in(0,+\infty),$$

则 $f(t)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+t}$.

由于 $t+\dfrac{1}{t}$ 在 $(0, 1)$ 上递减，所以 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递增.

设 $x\in(0, 1)$，则

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left[f(x)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]\geqslant 0$，即

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{3}{10}\right)\geqslant 0$.

整理得 $\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

同理得 $\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(y-\dfrac{1}{3}\right)$,

$\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(z-\dfrac{1}{3}\right)$.

所以 $u\geqslant\dfrac{9}{10}(x+y+z-1)=0$,

当 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立.

故 u 的最小值为 0.

例 17 已知 α, β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha, \beta]$.

(1) 求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$；

(2) 求证：对于 $u_i\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)(i=1,2,3)$，若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

【讲解】 (1) 由于 $\alpha<\beta$，所以

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2+1}}{2},\ \beta=\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{2}.$$

令 $u=2x-t$，则 $x=\dfrac{u+t}{2}$,

$$f(x)=\frac{u}{\left(\dfrac{u+t}{2}\right)^2+1}=\frac{4u}{u^2+2tu+t^2+4}.$$

若 $u=0$，即 $x=\dfrac{t}{2}$，此时 $f(x)=0$.