



按新课标模块编写的最新数学竞赛教材

马 兵 主编

专题分册

高中数学竞赛 标准教材



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社



高中数学竞赛标准教材 (高一分册)

高中数学竞赛标准教材 (高二分册)

高中数学竞赛标准教材 (专题分册)

高中数学竞赛标准教材 (模拟训练)

新课标高中数学竞赛通用教材 (高一分册)

新课标高中数学竞赛通用教材 (高二分册)

新课标高中数学竞赛通用教材 (综合分册)

ISBN 978-7-308-05372-3



9 787308 053723 >

定价：32.00元

高中数学竞赛标准教材

(专题分册)

马兵 主编

- 赛点提炼
- 赛题探究
- 赛场训练



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛标准教材. 专题分册/马兵主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2007. 6

ISBN 978-7-308-05372-3

I. 高... II. 马... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082236 号

高中数学竞赛标准教材(专题分册)

主 编 马兵

责任编辑 杨晓鸣 魏文娟

封面设计 成功

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 浙江省良渚印刷厂

开 本 787×1092 1/16

印 张 25

印 数 0001—8000

字 数 640 千字

版 印 次 2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-05372-3

定 价 32.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前言

高中数学怎样学,说法很多,有人说难题不用做,把基础搞好就可以,以不变应万变;有人主张以历年考试真题为训练目标,万变不离其宗;有人搞题海战术,反复做题,达到熟能生巧的程度,一切问题迎刃而解.我认为与其说数学水平体现在高考和竞赛的成绩上,还不如说取决于解题能力的高低,只注重基础知识,而忽视能力训练,不利于学生数学综合素养的培养;光做难题不善于提炼方法,同样也不利于学生全面发展.对即将参加高考和竞赛学生而言,学好数学重要的一环就是学习解题,首先要在解题中学解题,因此要做好题,精做题.做好题是本书写作的目标,精做题则要求解题后的反思和总结,多提一些诸如“解法是否有普通意义?有无更好的解法?定理或方法还有哪些变形?这类问题还有哪些解法?这种方法还有哪些应用和推广?”的问题.在解题中提炼方法,做到站在竞赛的水平看高考;同时立足基础,驾轻就熟,以不变应万变来应对比赛;培养不畏艰险,永往直前的科学精神.这是我认为学好数学应具备的心态.

写本书之前,笔者在高中执教数学11年,起初按高考要求教了4年,接下来讲了4年奥林匹克数学,接着又按高考要求从高一到高三教了一轮.这些年一直在为高考、竞赛而解题,逐渐积累了一些方法和题目.2007年年初在杭州与老朋友包善贤老师相遇,在他的推动下有了写本书的想法,在此对他的支持和帮助表示感谢.

张利民

2007年5月

目 录

第一章 代数问题

第一节 函数与函数方程	1
题型一 映射与函数	3
题型二 函数基本性质	4
题型三 函数最值问题	7
题型四 构造函数解题	11
题型五 函数的迭代	13
题型六 函数不动点解题应用	16
题型七 函数方程求解	19
题型八 数学竞赛中的函数问题	22
赛场训练	25
第二节 多项式与方程(组)	26
题型一 多项式的基本概念	30
题型二 多项式的整除问题	32
题型三 多项式的根与系数	33
题型四 整系数多项式问题	34
题型五 简单方程(组)的解	36
题型六 条件方程组的构造性解法	39
题型七 数学竞赛中的多项式问题	43
题型八 多项式中的一些综合问题	45
赛场训练	49
第三节 不等式与最值	49
题型一 不等式证明的基本方法	52
题型二 不等式证明的构造方法	55
题型三 平均值不等式证题	57
题型四 柯西不等式解题	60
题型五 排序不等式应用	62
题型六 不等式的齐次与非齐次式	64
题型七 不等式证明的导数法	67

题型八 数学竞赛中的不等式题	70
赛场训练	75

第四节 数列与数学归纳法	76
题型一 等差与等比数列	80
题型二 数列通项的求法	83
题型三 数列的性质	86
题型四 构造递推式解题	88
题型五 用周期性解题	90
题型六 数列问题中的特殊化	93
题型七 数学归纳法证题	95
题型八 数学竞赛中的数列题	98
赛场训练	102

第二章 数论问题

第五节 整数与余数	104
题型一 整数的表示方法	106
题型二 整数的整除问题	108
题型三 最大公约数与最小公倍数	110
题型四 素数及唯一分解定理	111
题型五 整数问题的不等式估计	113
题型六 数学竞赛中的整除问题	115
赛场训练	118
第六节 同余	119
题型一 整除和余数问题	120
题型二 求解和证明问题	122
题型三 数论定理应用	124
题型四 数论中的存在性问题	126
题型五 阶及其应用	129
题型六 数学竞赛中的同余问题	131
赛场训练	133
第七节 不定方程	134
题型一 不定方程的基本概念	135
题型二 不定方程的分解求法	136

题型三 不定方程的同余求法	139	题型三 结合几何图形的结构特点,利用旋转变换研究问题	208
题型四 解不定方程的常用技法	141	题型四 结合角平分线的性质,利用轴反射变换处理问题	210
题型五 不定方程与计数问题	143	题型五 根据几何图形线段比性质,利用位似变换解题	212
题型六 数学竞赛中的不定方程	144	题型六 利用反演变换解题	213
赛场训练	147	赛场训练	216
第八节 高斯函数 $[x]$ 与数论综合	147	第十二节 几何不等式	217
题型一 高斯函数简单应用	148	题型一 三角形中的典型不等式	219
题型二 高斯函数与方程、不等式	150	题型二 托勒密不等式证题	221
题型三 高斯函数与存在性命题	152	题型三 圆内接四边形中的不等式	223
题型四 数论的求解问题	155	题型四 等周极值问题	226
题型五 数论的证明问题	158	题型五 经典线性几何不等式	228
题型六 数论的综合问题	160	题型六 数学竞赛中的几何不等式	231
赛场训练	163	赛场训练	234
第三章 平面几何		第四章 组合数学	
第九节 平面几何解题思路	165	第十三节 组合问题	236
题型一 度量关系的证明	165	题型一 计数原理和计数公式	236
题型二 位置关系的证明	168	题型二 抽屉原理与平均值原理	240
题型三 面积关系解题	170	题型三 母函数和递推法计数	244
题型四 有关几何量的计算	173	题型四 配对原理(映射法计数)	247
题型五 轨迹问题	177	题型五 染色方法和赋值方法	250
题型六 几何证明的方法与技巧	179	题型六 反证法和利用极端原理	253
赛场训练	182	题型七 局部调整法与算二次	255
第十节 几个重要定理	183	题型八 数学竞赛中的存在性问题	258
题型一 梅内劳斯(Menelauss)定理	183	赛场训练	261
题型二 塞瓦(Ceva)定理	186	第十四节 组合极值	262
题型三 托勒密(Ptolemy)定理	190	题型一 不等式控制和累次极值	262
题型四 斯德瓦特(Stewart)定理和婆罗摩笈定理	193	题型二 对称处理和磨光变换	265
题型五 西姆松(Simson)定理和欧拉定理	196	题型三 离散型最值的估计	269
题型六 几个典型的几何问题	198	题型四 间距和划块估计	271
赛场训练	201	题型五 整体估计和参数估计	274
第十一节 几何中的运动	202	题型六 猜想与反证	277
题型一 结合几何图形的性质,利用平移变换研究问题	203	题型七 数学竞赛中的体育比赛问题	280
题型二 结合图形的对称性,利用反射变换研究问题	206		

题型八 数学竞赛中的组合极值问题	282	第十六节 图论及变换与对策	312
赛场训练	285	题型一 图的基本概念	312
第十五节 组合几何	286	题型二 树	315
题型一 凸图形与凸包	286	题型三 欧拉图	317
题型二 图形覆盖问题	289	题型四 平面图	319
题型三 极端原理和组合方法	293	题型五 竞赛图	321
题型四 构造方法	295	题型六 操作变换问题	324
题型五 格点及性质	298	题型七 数学博弈中的对策	327
题型六 组合求和	301	题型八 数学竞赛中的变换与对策	331
题型七 极值填数问题	304	赛场训练	335
题型八 数学竞赛中的组合几何	307	参考答案	337
赛场训练	311		

第一章 代数问题

第一节 函数与函数方程

函数既是高中数学,更是高等数学的基础,是高中数学竞赛的重要内容之一.在“高中数学联赛”中主要考查函数的性质(函数解析式、定义域和值域、函数单调性、周期性)、二次函数、反函数及与函数有关的其他问题(函数最值问题,函数图象变换及应用,构造函数解问题).

函数方程的解法是古老的分析问题之一.早在 230 多年前的 1769 年法国数学家、力学家达朗贝尔在论证力的合成时,就导出了函数方程: $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. 法国数学家柯西给出了这个方程的解,并创造了一种解函数方程,被后人称为柯西方法.许多数学家都曾对函数方程进行过研究,可是至今还没有完整的理论和解法.一些简单的函数方程,只需要以初等数学为工具,这类题目经常出现在数学竞赛中出现.在 IMO 竞赛中,从 20 世纪 70 年代以来,几乎每年都会有一道有关函数方程方面的题目.

赛点提炼

定义 1.1 设 A 和 B 是两个给定的集合,如果按照某种对应法则 f ,使得对于每一个 $x \in A$,通过 f ,唯一确定一个 $y \in B$,那么就称 f 是 A 到 B 的一个映射,记为 $f: A \rightarrow B$.

集合 A 叫做映射 f 的定义域,集合 B 叫做映射 f 的值域,称 y 为 x 在映射 f 作用下的象,记作 $y=f(x)$,并用符号 $f: x \mapsto y$ 表示,称 x 为 y 的一个原象.

定义 1.2 设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$,当 $a_1 \neq a_2$ 时,必有 $f(a_1) \neq f(a_2)$,那么称 f 是 A 到 B 的一个单射;如果对于任意 $b \in B$,均存在 $a \in A$,使得

$f(a)=b$,那么称 f 是 A 到 B 的一个满射.

若 $A=B$, f 定义为 $f: x \mapsto x$ (其中 $x \in A$),则这个映射称为 A 上的恒等映射(或单位映射).

定义 1.3 设 f 是 A 到 B 的一个映射.如果 f 既是单射,又是满射,那么 f 称为一一对应(或双射).

• 恒等映射是一一对应.

如果集合 A 与集合 B 之间存在一一对应 f ,那么集合 A 与集合 B 的元素个数相等,即 $|A|=|B|$.

反过来,如果 $|A|=|B|$,那么在集合 A 与集合 B 之间必存在一个一一对应,这只要将 A 中的第一个元素与 B 中的第一个元素对应, A 中的第二个元素与 B 中的第二个元素对应,依此类推即可.

定义 1.4 从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f: A \rightarrow B$ 叫做 A 到 B 的函数,记作: $y=f(x)$,其中 $x \in A, y \in B$. 这里的数集 A 称为函数 f 的定义域.对于 A 中的每一个元素 x ,根据对应法则 f 所对应的 B 中的元素 y ,称为 f 在点 x 的函数值,记为 $f(x)$.全体函数值的集合 $f(A)=\{y|y=f(x), x \in A\} \subseteq B$,称为函数 f 的值域.

定义 1.5 设有两个函数: $f=f(u)$, $u \in D; u=g(x), x \in E$.

如果集合 $E^*=\{x|g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$,则对每一个 $x \in E^*$,可通过函数 g 对应 D 中唯一一个值 u ,而 u 又通过函数 f 对应唯一一个值 y .这样就确定了一个定义在 E^* 上,以 x 为自变量, y 为因变量的函数,记作 $y=f(g(x)), x \in E^*$ 或 $y=(f \circ g)(x), x \in E^*$,称为由函数 f 和 g 经过复合运算得到的复合函数.

定义 1.6 设函数 $y=f(x), x \in D$. ① 若对于值域 $f(D)$ 中每一个值 y_0 , D 中有且只

有一值 x_0 , 使得 $f(x_0) = y_0$, 则按此对应法则能得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数, 称这个函数为 f 的反函数, 记作: $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ 或

$$x = f^{-1}(y), y \in f(D). \quad (2)$$

习惯上, 我们用 x 作为自变量的记号, y 为因变量的记号, 因此, 函数①的反函数②可改写为 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 且 D 是关于原点对称的数集. 若对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数. 若对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数.

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I . 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $y = f(x)$ 在此区间上是增函数, 如图 1-1(1) 所示.

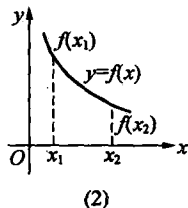
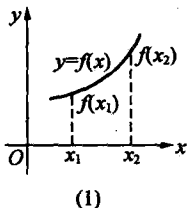


图 1-1

函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $y = f(x)$ 在此区间上是减函数, 如图 1-1(2) 所示.

如果函数 $y = f(x)$ 在某区间上是增函数或减函数, 那么就说 $y = f(x)$ 在此区间上有 (严格的) 单调性, 这一区间叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个常数 $T \neq 0$, 使得对每个 $x \in D$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 那么称 $f(x)$ 是周期函数, T 为 $f(x)$ 的一个周期; 如果 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小值 T_0 , 那么称 T_0 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期.

一般说函数的周期都是指最小正周期.

定义 1.10 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 若存在 $x_0 \in D$, 使得对任意 $x \in D$, 都有

$f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值, 简记为 $f_{\max}$; 若存在 $y_0 \in D$, 使得对任意 $x \in D$, 都有 $f(x) \geq f(y_0)$, 则称 $f(y_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最小值, 简记为 $f_{\min}$.

定义 1.11 设 $f: D \rightarrow D$ 是一个函数, 对任意 $x \in D$, 记

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x, \\ f^{(1)}(x) &= f(x), \\ f^{(2)}(x) &= f(f(x)), \\ f^{(3)}(x) &= f(f(f(x))), \\ &\dots \\ f^{(n+1)}(x) &= f(f^n(x)), \\ &\dots \end{aligned}$$

则称 $f^{(n)}(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 D 上的 n 次迭代, 并称 n 是 $f^{(n)}(x)$ 的迭代指数. 如果 $f^{(n)}(x)$ 有反函数, 则记为 $f^{(-n)}(x)$, 于是, 迭代指数可取所有整数. 求一个函数的 n 次迭代, 是数学竞赛中的一种基本题型. 对于一些简单的函数, 它的 n 次迭代是容易得到的.

$$\begin{aligned} \text{若 } f(x) &= x+c, \text{ 则 } f^{(n)}(x) = x+nc, \\ f^{(-1)}(x) &= x-c, \quad f^{(-n)}(x) = x-nc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } f(x) &= x^3, \text{ 则 } f^{(n)}(x) = x^{3^n}, \\ f^{(-1)}(x) &= x^{\frac{1}{3}}, \quad f^{(-n)}(x) = x^{\frac{1}{3^n}}. \end{aligned}$$

$$\text{若 } f(x) = ax+b, \text{ 则}$$

$$f^{(n)}(x) = a^n \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a},$$

$$f^{(-1)}(x) = \frac{1}{a} \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a},$$

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{a^n} \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

定义 1.12 含有未知函数的等式叫做函数方程.

$$\text{例如: (1) } f(x) = f(-x),$$

$$(2) f(x) = -f(-x),$$

$$(3) f(x+T) = f(x) \text{ (常数 } T \neq 0),$$

$$(4) f(x+y) = f(x) + f(y) + 1,$$

$$(5) f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 1, \text{ 都是函数方程, 其中 } f(x) \text{ 是未知函数.}$$

其中 $f(x)$ 是未知函数.

定义 1.13 如果函数 $f(x)$ 在其定义域内的一切值均满足所给函数方程, 那么称 $f(x)$

是该函数方程的解.

函数方程的解是一个或几个,甚至无限多个函数.例如,上述函数方程(1)(2)(3)的解分别是一切偶函数,一切奇函数,一切以 T 为周期的函数.

定义 1.14 寻求函数方程的解或证明函数方程无解的过程,叫做解函数方程.

有关函数方程方面的题目大致可分为三类:(一)确定函数的表达式;(二)确定满足函数方程的函数的性质;(三)确定函数值.

解函数方程没有统一的方法,但还是有一些基本的解法.常见的方法有:(1)定义法;(2)换元法;(3)解方程组法;(4)赋值法;(5)待定系数法;(6)递推法;(7)数列法;(8)数学归纳法;(9)参数法;(10)函数迭代法;(11)不动点法;(12)反证法;(13)柯西方法;(14)构造法.

赛题探究

题型一 映射与函数

例 1 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$.

(1) 从 A 到 B 的不同的映射有多少个?

(2) 从 A 到 B 的映射满足 $f(a_1) > f(a_2) \geq f(a_3)$, 确定这样的映射 $f: A \rightarrow B$ 的个数.

【讲解】 (1) 确定 a_1 的象,有 3 种方法;确定 a_2 的象,有 3 种方法;确定 a_3 的象,也有 3 种方法.所以,从 A 到 B 不同的映射共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (个).

(2) 由 $f(a_1) > f(a_2) \geq f(a_3)$ 知, $f(a_1) = 0$ 或 1.

若 $f(a_1) = 0$, 则 $f(a_2) = f(a_3) = -1$.

若 $f(a_1) = 1$, 则 $f(a_2) = f(a_3) = 0$,

或 $f(a_2) = f(a_3) = -1$,

或 $f(a_2) = 0$, $f(a_3) = -1$.

综上,共有 4 种满足题意的映射.

例 2 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 写出一个 $f: A \rightarrow B$, 使得 f 是单射, 并求 A 到 B 的单射个数;

(2) 写出一个 $f: A \rightarrow B$, 使得 f 不是单

射, 并求所有这种映射的个数;

(3) A 到 B 的映射能否是满射?

【讲解】 (1) 映射 $f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3$ 就是 A 到 B 的一个单射.

这种映射的个数为 $P_4^3 = 24$ (个).

(2) 映射 $f: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_1, a_3 \mapsto b_1$ 即为所求.

这种映射的个数为 $4^3 - P_4^3 = 40$ (个).

(3) 答案是否定的. 由于集合 A 中的每一个元素恰与集合 B 中的一个元素对应, 而 $|A| = 3, |B| = 4$ (用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数), 所以集合 B 中至少有一个元素, 在集合 A 中找不到与它对应的元素. 因而 A 到 B 的满射不存在.

例 3 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 且 $f(x-y) = f(x) \cdot g(y) - g(x) \cdot f(y)$, $f(-2) = f(1) \neq 0$, 求 $g(1) + g(-1)$ 的值.

【讲解】 因为

$$f(x-y) = f(x) \cdot g(y) - g(x) \cdot f(y),$$

则

$$f(y-x) = f(y) \cdot g(x) - g(y) \cdot f(x),$$

从而

$$f(x-y) = -f(y-x).$$

因此 $f(x)$ 为奇函数.

$$\begin{aligned} \text{又 } f(1) &= f(-2) = f(-1-1) \\ &= f(-1) \cdot g(1) - g(-1) \cdot f(1) \\ &= -f(1)[g(1) + g(-1)], \end{aligned}$$

且 $f(1) \neq 0$,

$$\text{所以 } g(1) + g(-1) = -1.$$

小结 根据函数 f 的性质, 推知它为奇函数, 为了得到 $g(1) + g(-1)$ 的值, 将 $f(-2)$ 写成 $f(-1-1)$, 是一个技巧.

例 4 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(2) = 0$. 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有

$$f(x+4) = f(x) + f(2-x) \quad ①$$

成立, 求 $f(1998)$ 的值.

【讲解】 在 ① 式中令 $x = -2$, 则

$$\begin{aligned} f(2) &= f(-2) + f(4) \\ &= -f(2) + f(4). \end{aligned}$$

从而 $f(4)=2f(2)=0$.

又在①中令 $x=0$,得

$$0=f(4)=f(0)+f(2)=f(0).$$

再令 $x=4$,得

$$f(8)=f(4)+f(-2)=0.$$

一般地 $f(4k)=0$ 及 $f(4k+2)=0$,

于是 $f(1998)=f(499 \times 4 + 2)$

$$=f(2)=0.$$

小结 反复利用条件式①及 $f(2)=0$,求得 $f(4)=f(8)=f(4k)=0$ 及 $f(6)=f(4k+2)=0$. 但并不能设 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数. 事实上,在①式中不能断定 $f(2-x)=0$.

例 5 给定一个正整数 n , 有多少个满足条件 $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$ 的四元有序数组 (a, b, c, d) ?

【讲解】 做映射 $f: (a, b, c, d) \rightarrow (a, b+1, c+2, d+3)$.

于是 f 是从集合 $A = \{a, b, c, d \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n\}$ 到集合 $B = \{(a, b', c', d') \mid 0 \leq a < b' < c' < d' \leq n+3\}$ 的一个映射. 容易验证这个映射是一一对应. 所以 $|A| = |B|$.

由于 $|B|$ 就是集合 $\{0, 1, 2, \dots, n+3\}$ 的四元子集的个数, 即 C_{n+4}^4 , 从而 $|A| = C_{n+4}^4$.

例 6 已知 a, b, c, d 为非零实数, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, x \in \mathbf{R}$, 且 $f(19)=19, f(97)=97$. 若当 $x \neq -\frac{d}{c}$ 时, 对于任意实数 x , 均有 $f[f(x)] = x$, 试求出 $f(x)$ 值域以外的唯一数.

【讲解】 由题设, 对任意实数 $x \neq -\frac{d}{c}$, 有 $f[f(x)] = x$, 所以

$$\frac{a \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + d} = x.$$

化简, 得

$$(a+d)cx^2 + (d^2 - a^2)x - b(a+d) = 0.$$

由于上述方程对 $x \neq -\frac{d}{c}$ 恒成立, 故

$a+d=0$, 且 $d^2 - a^2 = 0$, 所以 $d = -a$.

又 $f(19)=19, f(97)=97$, 即 19, 97 是方程 $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ 的两个根, 即 19, 97 是方程 $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ 的两个根, 故由韦达定理, 得 $\frac{a-d}{c} = 116, -\frac{b}{c} = 1843$.

结合 $d = -a$, 得 $a = 58c, b = -1843c, d = -58c$, 从而

$$f(x) = \frac{58x - 1843}{x - 58} = 58 + \frac{1521}{x - 58}.$$

于是 $f(x)$ 取不到 58 这个数, 即 58 是 $f(x)$ 值域外的唯一数.

题型二 函数基本性质

例 7 设常数 $a > 1 > b > 0$, 则当 a, b 满足什么关系时, $\lg(a^x - b^x) > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$?

【讲解】 因为 $a^x - b^x > 0$, 故 $\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1$.

又因为 $\frac{a}{b} > 1$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 欲使 $\lg(a^x - b^x) > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$, 只需 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$.

设 $x_2 > x_1 > 0$,

$$\begin{aligned} & \text{若 } f(x_1) - f(x_2) \\ &= \lg(a^{x_1} - b^{x_1}) - \lg(a^{x_2} - b^{x_2}) \\ &= \lg\left(\frac{a^{x_1} - b^{x_1}}{a^{x_2} - b^{x_2}}\right) < 0, \end{aligned}$$

则需 $\frac{a^{x_1} - b^{x_1}}{a^{x_2} - b^{x_2}} < 1$,

$$\text{即 } a^{x_1} - a^{x_2} < b^{x_1} - b^{x_2}. \quad \textcircled{1}$$

因为 $x_2 > x_1 > 0, a > 1 > b > 0$,

故 $a^{x_1} - a^{x_2} < 0, b^{x_1} - b^{x_2} > 0$.

因此①式成立. 从而 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

又由 $f(1) = \lg(a - b) = 0$, 得

$$a - b = 1, a = b + 1.$$

总之, 当 $a = b + 1$ 时, $\lg(a^x - b^x) > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

小结 令 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$, 将问题转化为该函数在 $(0, +\infty)$ 上为增函数且 $f(1) = 0$, 这就简化了原命题.

例 8 已知二次函数 $f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最小值为 2, 求 a 的值.

【讲解】 将函数式配方:

$$f(x) = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 2a + 2.$$

(1) 当 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 \leq a \leq 2$ 时,

$$f_{\min}(x) = -2a + 2 = 2, \text{ 故 } a = 0.$$

(2) 当 $\frac{a}{2} < 0$, 即 $a < 0$ 时,

$$f_{\min}(x) = f(0) = a^2 - 2a + 2 = 2.$$

故 $a = 0$ 或 2 , 都与 $a < 0$ 矛盾, 故无解.

(3) 当 $\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时,

$$f_{\min}(x) = f(1) = 4 - 4a + a^2 - 2a + 2 = 2.$$

解得 $a = 3 + \sqrt{5}$ 或 $a = 3 - \sqrt{5}$ (舍去). 总

之, 满足题且要求的值为 $a = 0$ 和 $3 + \sqrt{5}$.

小结 本题容易产生误解, 以为只需考虑情况 1, 而只求得一解 $a = 0$. 实际上, 还应该考虑 $\frac{a}{2} < 0$ 和 $\frac{a}{2} > 1$ 的情况, 从而知 $a = 3 + \sqrt{5}$ 也是问题的解.

例 9 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 满足

$$\begin{aligned} & b[f(x+p) + f(x)] \\ &= a[1 - f(x)f(x+p)]. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 a, b, p 均为非零常数. 求证: $f(x)$ 是一个周期函数, 并求其周期.

【讲解】 (1) 先证明 $f(x) \neq -\frac{b}{a}, x \in \mathbf{R}$.

事实上, 若 $f(x) = -\frac{b}{a}$, 则 $b f(x+p) -$

$$\frac{b^2}{a} = a + b f(x+p), \text{ 而有 } a^2 + b^2 = 0, \text{ 这与 } a,$$

b 是非零数矛盾.

(2) 由 (1) 得

$$\begin{aligned} f(x+p) &= \frac{a - b f(x)}{b + a f(x)} (b + a f(x) \neq 0) \\ &= \frac{a - b \frac{a - b f(x-p)}{b + a f(x-p)}}{b + a \frac{a - b f(x-p)}{b + a f(x-p)}} \\ &= \frac{b^2 + a^2}{b^2 + a^2} f(x-p) \\ &= f(x-p). \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 是以 $2p$ 为周期的函数.

小结 在思考时, 实际上是先从第二步开始, 然后再发现需要 $b + a f(x) \neq 0$, 于是要先证 $f(x) \neq -\frac{b}{a}$.

例 10 设函数 $f(x) = ax^2 + 8x + 3$ ($a < 0$), 对于给定的负数 a , 有一个最大的正数 $l(a)$, 使得在整个区间 $[0, l(a)]$ 上, 不等式 $|f(x)| \leq 5$ 都成立. 问: a 为何值时 $l(a)$ 最大? 求出这个最大的 $l(a)$, 并证明你的结论.

$$\text{【讲解】 } f(x) = a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + 3 - \frac{16}{a},$$

$$\text{因为 } a < 0, \text{ 所以 } \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 3 - \frac{16}{a}.$$

分两种情况讨论:

(1) 当 $3 - \frac{16}{a} > 5$, 即 $-8 < a < 0$ 时, 如

图 1-2(1) 所示, 若使在整个区间 $[0, l(a)]$ 上, $|f(x)| \leq 5$ 恒成立, 则 $0 < l(a) < -\frac{4}{a}$, 且 $l(a)$ 是方程 $ax^2 + 8x + 3 = 5$ 的较小根.

$$\begin{aligned} l(a) &= \frac{-8 + \sqrt{64 + 8a}}{2a} \\ &= \frac{2}{\sqrt{16 + 2a} + 4} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

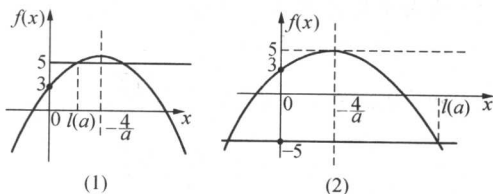


图 1-2

(2) 当 $3 - \frac{16}{a} \leq 5$, 即 $a \leq -8$ 时, 如图

1-2(2) 所示, 若使得在 $[0, l(a)]$ 上, $|f(x)|$

≤ 5 恒成立, 则 $l(a) > -\frac{4}{a}$, 且 $l(a)$ 是方程 $ax^2 + 8x + 3 = -5$ 的较大根.

$$\begin{aligned} l(a) &= \frac{-8 - \sqrt{64 - 32a}}{2a} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4 - 2a} - 2} \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{20} - 2} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{aligned}$$

当且仅当 $a = -8$ 时, 等号成立.

由于 $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} > \frac{1}{2}$, 因此, 当且仅当 $a = -8$

时, $l(a)$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

小结 解题思路是: 设法将 $l(a)$ 表示成 a 的式子, 再求它的最大值.

例 11 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - tx - 2 = 0$ 的两个实根为 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$.

(1) 若 x_1, x_2 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的两个不同的点, 求证: $4x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - 4 < 0$;

(2) 设 $f(x) = \frac{4x - t}{x^2 + 1}$, $f(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的最大值和最小值分别为 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$, $g(t) = f_{\max} - f_{\min}$, 求 $g(t)$ 的最小值.

【讲解】 (1) 因为 $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, 所以由抛物线 $y = 2x^2 - tx - 2$ 的开口向上, 可知 $f(x_1) \leq 0$ 且 $f(x_2) \leq 0$.

$$\text{即 } 2x_1^2 - tx_1 - 2 \leq 0, 2x_2^2 - tx_2 - 2 \leq 0.$$

两式相加, 得

$$2(x_1^2 + x_2^2) - t(x_1 + x_2) - 4 \leq 0,$$

故由平均值不等式可得

$$4x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - 4 < 0.$$

$$(2) \text{ 依题意 } \alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 + 16}}{4},$$

$$\beta = \frac{t + \sqrt{t^2 + 16}}{4}.$$

$$\text{所以 } f(\alpha) = \frac{4 \cdot \frac{t - \sqrt{t^2 + 16}}{4} - t}{\left(\frac{t - \sqrt{t^2 + 16}}{4}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{-16\sqrt{t^2 + 16}}{t^2 + t^2 + 16 - 2t\sqrt{t^2 + 16} + 16}$$

$$= \frac{-8}{\sqrt{t^2 + 16} - t},$$

$$f(\beta) = \frac{8}{\sqrt{t^2 + 16} + t}.$$

由 $\sqrt{t^2 + 16} \geq |t|$, 知 $f(\beta) > 0 > f(\alpha)$.

另一方面, 设 $\alpha \leq x_1 < x_2 \leq \beta$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{[4 + t(x_1 + x_2) - 4x_1x_2]}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

由(1)的结论可知 $f(x_1) < f(x_2)$. 从而 $f(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是增函数.

$$\begin{aligned} \text{所以 } g(t) &= f_{\max} - f_{\min} = f(\beta) - f(\alpha) \\ &= \frac{8}{\sqrt{t^2 + 16} + t} - \frac{-8}{\sqrt{t^2 + 16} - t} \\ &= \sqrt{t^2 + 16} \geq 4. \end{aligned}$$

等号在 $t = 0$ 时取到. 因此, $g(t)$ 的最小值为 4.

小结 (2) 中函数 $f(x)$ 中含有参数 t , 对于每个 t 值, $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上最大值与最小值是 t 的函数. 因此, $f(x)$ 应写成 $f(x, t)$, 是二元函数.

例 12 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$) 满足条件:

(1) $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x-4) = f(2-x)$, 且 $f(x) \geq x$;

(2) 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m (m > 1)$, 使存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leq x$.

【讲解】 因为 $f(x-4) = f(2-x)$, 所以函数的图象关于 $x = -1$ 对称,

$$\text{即 } -\frac{b}{2a} = -1, b = 2a.$$

由(3)可知, 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 即

$$a - b + c = 0.$$

由(1)得 $f(1) \geq 1$, 由(2)得 $f(1) \leq 1$, 所以 $f(1) = 1$, 即 $a + b + c = 1$.

故有 $a = c = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$.

所以 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

假设存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leq x$.

取 $x = 1$, 有 $f(t+1) \leq 1$, 即

$$\frac{1}{4}(t+1)^2 + \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{4} \leq 1,$$

解得 $-4 \leq t \leq 0$.

对固定的 $t \in [-4, 0]$, 取 $x = m$, 有

$f(t+m) \leq m$, 即

$$\frac{1}{4}(t+m)^2 + \frac{1}{2}(t+m) + \frac{1}{4} \leq m,$$

化简为

$$m^2 - 2(1-t)m + (t^2 + 2t + 1) \leq 0,$$

$$\text{解得 } 1-t - \sqrt{-4t} \leq m \leq 1-t + \sqrt{-4t}.$$

于是有 $m \leq 1-t + \sqrt{-4t}$

$$\leq 1 - (-4) + \sqrt{-4(-4)} = 9.$$

当 $t = -4$ 时, 对任意的 $x \in [1, 9]$, 恒有

$$\begin{aligned} f(x-4) - x &= \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 9) \\ &= \frac{1}{4}(x-1)(x-9) \leq 0. \end{aligned}$$

所以 m 的最大值为 9.

小结 用特值法, 取 $x = 1$, 解得 $[-4, 0]$ 为 t 的最终范围, 进而在其中找到当 $t = -4$ 时 m 有最大值 9. 若就 x 取遍 $[1, m]$ 中的所有值, 代入 $f(x+t) \leq x$, 得关于 t 的不等式组来进行讨论也很简便.

记 $G(x) = f(x+t) - x$, 则 $G(x)$ 为二次函数, 由题意可知, 原问题等价于 $G(x) \leq 0$, 即函数图象在 $[1, m]$ 上分布于 x 轴下方(图象端点可在 x 轴上), 即

$$\begin{cases} G(1) \leq 0, \\ G(m) \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{cases} \frac{(1+t)^2}{4} + \frac{1+t}{2} + \frac{1}{4} - 1 \leq 0, & \text{①} \\ \frac{(t+m)^2}{4} + \frac{m+t}{2} + \frac{1}{4} - m \leq 0. & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $t^2 + 4t \leq 0$, 解得 $-4 \leq t \leq 0$.

由假设知, 关于 t ② 有解. 设为 $\{t | t_1 \leq t \leq t_2\}$, 且与①的交集非空, 即存在 $t \in \{t | -4 \leq t \leq 0\} \cap \{t | t_1 \leq t \leq t_2\}$, 则记

$$h(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}(1+m)t + \frac{m^2}{4} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4}.$$

(1) 若 $-4 < t_1 < 0 < t_2$ 时, 须有 $h(0) < 0$, 但 $h(0) = \frac{m^2}{4} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}(m-1)^2 \geq 0,$$

故此情况不存在.

(2) 若 $-4 < t_1 < t_2 < 0$ 时, 则

$$\begin{cases} h(-4) > 0, \\ h(0) > 0, \\ -4 < -(m+1) < 0, \\ \Delta = \frac{1}{4}(1+m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{4} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right) \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m > 9 \text{ 或 } m < 1, \\ m \neq 1, \\ -1 < m < 3, \\ m \geq 0. \end{cases}$$

故知 m 无解.

(3) 若 $-t_1 \leq -4 \leq t_2 \leq 0$ 时, 则

$$\begin{cases} h(-4) \leq 0, \\ h(0) \geq 0, \\ m^2 - 10m + 9 \leq 0, \\ \text{即 } \begin{cases} \frac{1}{4}(m-1)^2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

解得 $1 \leq m \leq 9$.

故知 m 最大值为 9.

题型三 函数最值问题

例 13 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在区间

$[a, b]$ 上的最小值为 $2a$, 最大值为 $2b$, 求 $[a, b]$.

【讲解】 分三种情况讨论区间 $[a, b]$.

(1) 若 $0 \leq a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 故 $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$.

$$\text{于是有 } \begin{cases} 2b = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, \\ 2a = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}. \end{cases}$$

解之得 $[a, b] = [1, 3]$.

(2) 若 $a < 0 < b$, $f(x)$ 在 $[a, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, b]$ 上单调递减. 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 $2b$, 在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$.

$$\text{故 } 2b = \frac{13}{2}, b = \frac{13}{4}.$$

由于 $a < 0$, 又

$$f(b) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$, 即

$$2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, \text{ 解得}$$

$$a = -2 - \sqrt{17}.$$

$$\text{于是得 } [a, b] = \left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right].$$

(3) 当 $a < b \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 故 $f(a) = 2a$, $f(b) = 2b$.

$$\text{即 } 2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, 2b = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}.$$

由于方程 $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{13}{2} = 0$ 的两根异号,

故满足 $a < b < 0$ 的区间不存在.

综上所述, 所求区间为 $[1, 3]$ 或

$$\left[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}\right].$$

小结 对于一般的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 在闭区间 $[p, q]$ 上的最大值, 只能在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得, 具体如下:

(1) 当 $a > 0$ 时, 若 $-\frac{b}{2a} \in [p, q]$, 则

$$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right),$$

$$f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\};$$

若 $-\frac{b}{2a} \notin [p, q]$, 则

$$f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\},$$

$$f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}.$$

(2) 当 $a < 0$ 时, 若 $-\frac{b}{2a} \in [p, q]$, 则

$$f(x)_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right),$$

$$f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}.$$

例 14 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + x - a (|x| \leq 1)$.

(1) 若 $|a| \leq 1$, 试证: $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$;

(2) 求 a 的值, 使函数 $f(x)$ 有最大值 $\frac{17}{8}$.

【讲解】 (1)

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |ax^2 + x - a| \\ &= |a(x^2 - 1) + x| \\ &\leq |a(x^2 - 1)| + |x| \\ &\leq |x^2 - 1| + |x| \\ &= 1 - |x^2| + |x| \\ &= -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \\ &\leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(2) 当 $a=0$ 时, $f(x) = x (|x| \leq 1)$ 的最大值是 $f(1) = 1$, 与题设矛盾.

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 为二次函数.

1) 当 $a > 0$ 时, 其开口向上, 故最大值只能在 $x = -1$ 或 $x = 1$ 时取得, 而

$$f(-1) = a - 1 - a = -1, \text{ 矛盾.}$$

$$f(1) = a + 1 - a = 1, \text{ 也矛盾.}$$

2) 当 $a < 0$ 时, 最大值同样不会在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 上取得, 故使得

$$f(x) = ax^2 + x - a (|x| \leq 1)$$

有最大值 $\frac{17}{8}$, 只能等价于

$$\begin{cases} -1 < -\frac{1}{2a} < 1, \\ f\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{17}{8}, \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{2}, \\ (a+2)\left(a+\frac{1}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2.$$

因此, 使函数 $f(x)$ 有最大值的 $a = -2$.

小结 本题可以用求导数方法来做.

例 15 对于 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \min\{4x + 2, -12x^2 + 12, -2x + 4\}$, 求 $f(x)$ 的表达式及

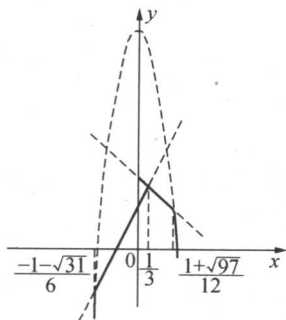
$f(x)_{\max}$.

图 1-3

【讲解】 如图 1-3 所示,在同一直角坐标系中作出 $y_1 = 4x + 2$, $y_2 = -12x^2 + 12$, $y_3 = -2x + 4$ 的图象. 根据 $f(x)$ 的定义, 可得 $f(x)$ 的分段表达式

$$f(x) = \begin{cases} -12x^2 + 12, & x \leq \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} \text{ 或 } x \geq \frac{1 + \sqrt{97}}{12}, \\ 4x + 2, & \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ -2x + 4, & \frac{1}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{97}}{12}. \end{cases}$$

从图象上可以看出, 当 $x = \frac{1}{3}$ 时,

$$f(x)_{\max} = \frac{10}{3}.$$

小结 该题涉及到两个一元一次函数与一个一元二次函数. 若能根据题设要求画出 $f(x)$ 的图象, 再利用数形结合的方法则可以很直观地解决问题.

例 16 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y + z = 1$. 求 $u = \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2}$ 的最小值.

【分析】 对于递增函数 $f(x)$, $x \in D$, 若 $x_1, x_2 \in D$, 则 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$.

对于递减函数 $f(x)$, $x \in D$, 若 $x_1, x_2 \in D$, 则 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0$.

【讲解】 令

$$f(t) = \frac{t}{1 + t^2}, t \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } f(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} + t}.$$

由于 $t + \frac{1}{t}$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 所以 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递增.

设 $x \in (0, 1)$, 则

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left[f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right] \geq 0, \text{ 即}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{1 + x^2} - \frac{3}{10}\right) \geq 0.$$

$$\text{整理得 } \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} \geq \frac{9}{10}\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{同理得 } \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} \geq \frac{9}{10}\left(y - \frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{3z^2 - z}{1 + z^2} \geq \frac{9}{10}\left(z - \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{所以 } u \geq \frac{9}{10}(x + y + z - 1) = 0,$$

当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

故 u 的最小值为 0.

例 17 已知 α, β 是方程 $4x^2 - 4tx - 1 = 0 (t \in \mathbf{R})$ 的两个不等实根, 函数 $f(x) = \frac{2x - t}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $[\alpha, \beta]$.

(1) 求 $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$;

(2) 求证: 对于 $u_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) (i = 1, 2, 3)$,

若 $\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3 = 1$, 则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

【讲解】 (1) 由于 $\alpha < \beta$, 所以

$$\alpha = \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2}, \beta = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}.$$

$$\text{令 } u = 2x - t, \text{ 则 } x = \frac{u + t}{2},$$

$$f(x) = \frac{u}{\left(\frac{u + t}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{4u}{u^2 + 2tu + t^2 + 4}.$$

若 $u = 0$, 即 $x = \frac{t}{2}$, 此时 $f(x) = 0$.