全国第一套高中新课标数学竞赛教材

JS

HIGH SCHOOL MATH

蔡小雄 孙惠华 主编

新课标高中数学竞赛通用教材

高二分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新课标

高中数学竞赛通用教材（高二分册）

主编 蔡小雄 孙惠华

编委 （以姓氏笔画为序）

王希年 王红权 许康华

孙惠华 吕峰波 沈虎跃

陈相友 周顺钿 郑日锋

金荣生 胡克元 虞金龙

蔡小雄

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标高中数学竞赛通用教材. 高二分册 / 蔡小雄，孙惠华主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-308-05373-0

Ⅰ.新… Ⅱ.①蔡…②孙… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082237 号

新课标高中数学竞赛通用教材. 高二分册

蔡小雄　孙惠华　主编

责任编辑　杨晓鸣　丁兴泉(特邀)
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址: http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江省良渚印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　19
印　　数　0001—8000
字　　数　510 千
版 印 次　2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05373-0
定　　价　25.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

前言

“奥林匹克”这一响亮的名字，曾让多少有竞争意识的人为之热血沸腾，心潮澎湃。中学生数学奥林匹克竞赛也是如此。从1894年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕，一百多年来，数学竞赛吸引了世界各地的无数数学爱好者积极参与。

虽然不是每位参加数学竞赛的人都有机会获得国际金牌，也不是每个人都能通过竞赛取得保送大学的资格，但是参加“奥赛”的过程中所培养起来的数学思维能力和数学素养，以及“奥赛”中渗透的现代数学前沿知识与创新的思维方式，对日常学习与生活都将有重要的指导意义。正如数学前辈所言：“数学不仅具有真理，而且具有至高无上的美，人们在数学的王国里将找到真正意义上的快乐。”“数学能使你的思想正确、敏捷。有了正确、敏捷的思想，你才有可能爬上科学的大山。”

继广东、山东等省之后，2006年9月开始浙江、江西等许多省份也实行了新一轮的课程改革。然而，目前市场上能与新课程标准相配套，而且真正适合课堂教学模式的竞赛辅导用书几乎是空白。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步理解高中数学奥林匹克竞赛的知识方法，同时也为了给数学高考尖子、优秀高复生提高数学水平提供良好的数学资料，从而在数学联赛或高考的激烈竞争中游刃有余、脱颖而出，我们组织了部分数学奥林匹克高级教练与特级、高级教师，精心编写了这套《新课标高中数学竞赛通用教材》(共三个分册)。

本套教材力求体现的特色主要有以下三方面：

1. 同步辅导，螺旋上升

每册分成三部分，即必修、选修与实战演练三个模块。从竞赛培训的实际出发，将传统的竞赛内容与教材内容，将讲、练、考等方面进行了有机整合。必修部分与教材同步，是教材的补充和延伸，可直接在平时课堂教学中渗透；选修部分可作为课外辅导的专题资料，选题难度有些涉及全国联赛二试及CMO、IMO试题；实战演练则可作为学习完全书的综合测试。

2. 方法全面，点拨精要

每节专题均设有[知识点金]、[例题精析]、[赛点归纳]与[同步检测]四个栏目。[知识点金]囊括了与本节相关的所有知识要点与方法；[例题精析]力求向读者奉献最新最典型的高考或竞赛题；[赛点归纳]是对全节内容的概括与升华，是“点睛”之处；[同步检测]则可作为巩固提高的配套练习。每题均附有详细解答，便于读者完成后及时反馈。

3. 来源实践，实用高效

本书大多数内容是在原浙江省理科创新实验班课堂实践的基础上发展与完善的，因此，它可以直接应用到课堂教学中，是一本真正实用有效的竞赛辅导与同步提高材料。

也应指出，由于编写时间仓促，编者水平有限，书中错漏难免，敬请专家与读者批评指正，以便再版时修订。

编者

2007年4月1日

目 录

必修模块(课堂同步拓展)

第一讲　等差数列与等比数列

知识点金

1. 等差数列

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数就叫做等差数列的公差，常用字母“d”表示.

等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$ 或 $a_n=a_m+(n-m)d$.

等差数列前 n 项和的公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$.

等差数列的主要性质：

(1)公差为非零的等差数列的通项公式为 n 的一次函数；

(2)公差为非零的等差数列的前 n 项和公式为 n 的不含常数项的二次函数；

(3)设$\{a_n\}$是等差数列，则$\{\lambda a_n+b\}$(λ，b 是常数)是等差数列；

(4)设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是等差数列，则$\{\lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n\}$($\lambda_1$，$\lambda_2$ 是常数)也是等差数列；

(5)设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是等差数列，且 $b_n\in\mathbf{N}^*$，则$\{a_{b_n}\}$也是等差数列(即等差数列中等距离分离出的子数列仍为等差数列)；

(6)若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$，特别地：若 $m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$；

(7)设 $A=a_1+\cdots+a_n$，$B=a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$，$C=a_{2n+1}+\cdots+a_{3n}$，则有 $2B=A+C$；

(8)对于项数为 $2n$ 的等差数列$\{a_n\}$，记 $S_{偶}$，$S_{奇}$ 分别表示前 $2n$ 项中的偶数项和与奇数项和，则 $S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

(9)对于项数为 $2n-1$，等差数列$\{a_n\}$，有 $S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$；

(10)S_n 是等差数列的前 n 项和，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$；

(11)其他衍生等差数列：若已知等差数列$\{a_n\}$，公差为 d，前 n 项和 S_n，则：

①a_p，a_{p+t}，a_{p+2t}，…，$a_{p+(n-1)t}$，为等差数列，公差为 td；

②$a_1+\cdots+a_m$，$a_{m+1}+\cdots+a_{2m}$，…(即 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…)为等差数列，公差 m^2d；

③$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$(即$\frac{S_1}{1}$，$\frac{S_2}{2}$，$\frac{S_3}{3}$，…)为等差数列，公差$\frac{d}{2}$.

2. 等比数列

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列. 这个常数叫做等比数列的公比；公比通常用字母 q 表示($q\neq 0$)，即：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ ($q\neq 0$).

等比数列的通项公式：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq 0)$或 $a_n=a_m\cdot q^{n-m}(a_1\cdot q\neq 0)$.

等比数列前 n 项和的公式：$S_n=\begin{cases} na_1(q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1) \end{cases}$

等比中项：$a_{n+1}=\pm\sqrt{a_na_{n+2}}$.

无穷递缩等比数列各项和的公式：对于等比数列 a_1，a_1q，a_1q^2，…，a_1q^{n-1}，…($|q|<1$)前 n 项和，当 n 无限增大时的极限，叫做这个无穷递缩等比数列各项的和，记为 S，即 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$ ($0|q|<1$).

等比数列的主要性质：

(1)设$\{a_n\}$是等比数列，则$\{\lambda a_n\}$(λ 是常数)、$\{a_n^m\}$($m\in\mathbf{Z}^*$)仍成等比数列；

(2)设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是等比数列，则$\{a_n\cdot b_n\}$也是等比数列；

(3)设$\{a_n\}$是等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，$b_n\in\mathbf{Z}^*$，则$\{a_{b_n}\}$是等比数列(即等比数列中等距离分离出的子数列仍为等比数列)；

(4)设$\{a_n\}$是正项等比数列，则$\{\log_c a_n\}$($c>0$，$c\neq 1$)是等差数列；

(5)若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$，特别地，若 $m+n=2p$，则 $a_m\cdot a_n=a_p^2$；

(6)设 $A=a_1+\cdots+a_n$，$B=a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$，$C=a_{2n+1}+\cdots+a_{3n}$，则有 $B^2=AC$；

7. 其他衍生等比数列：若已知等比数列$\{a_n\}$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，则：

①a_p，a_{p+t}，a_{p+2t}，…，$a_{p+(n-1)t}$，…为等比数列，公比为 q^t；

②$a_1+\cdots+a_m$，$a_{m+1}+\cdots+a_{2m}$，…即 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…为等比数列，公比为 q^m.

例题精析

例1 各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq 1$，且 a_2、$\frac{1}{2}a_3$、a_1 成等差数列，求$\frac{a_3+a_4}{a_4+a_5}$.

解 因为$\frac{a_3+a_4}{a_4+a_5}=\frac{a_3+a_4}{q(a_3+a_4)}=\frac{1}{q}$，所以只需求出公比 q，a_2、$\frac{1}{2}a_3$、a_1 成等差数列，得 $2\left(\frac{1}{2}a_3\right)=a_1+a_2$，

化简得 $q^2-q-1=0$，解此方程得 $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

注意到 $a_n>0$，故只取 $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 $\frac{a_1+a_4}{a_4+a_5}=\frac{1}{q}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例 2 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$，求证：$\{a_n\}$成等差数列的充要条件是$\{b_n\}$成等差数列.

解 （必要性）设$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，

因为 $ka_k=k[a_1+(k-1)d]=k(a_1-d)+k^2d$，所以 $b_n=\frac{\frac{n(n+1)}{2}(a_1-d)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}d}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=a_1+\frac{2}{3}(n-1)d$，

则$\{b_n\}$成等差数列.

（充分性）若$\{b_n\}$是等差数列，公差为 d_1，由已知等式得：

$a_1+2a_2+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{2}b_n$，所以 $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}b_{n-1}$.

上两式相减可得 $na_n=\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{n(n-1)}{2}b_{n-1}$，

所以 $a_n=b_1+\frac{3}{2}(n-1)d_1$，即$\{a_n\}$是等差数列.

例 3 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $S_n=m,S_m=n(m\neq n)$，求 S_{m+n}.

解法一 设 $S_k=ak^2+bk$，将已知两式相减，得 $a(m+n)+b=-1$，

所以 $S_{m+n}=a(m+n)^2+b(m+n)=-(m+n)$.

解法二 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=m-n$，所以 $\frac{(n-m)(a_{m+1}+a_n)}{2}=m-n$，所以 $a_{m+1}+a_n=a_1+a_{m+n}=-2$. 所以 $S_{m+n}=\frac{(a_1+a_{m+n})\cdot(m+n)}{2}=-(m+n)$.

解法三 利用等差数列的性质："$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$在一条直线上"得，

$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$，$\left(m,\frac{S_m}{m}\right)$，$\left(m+n,\frac{S_{m+n}}{m+n}\right)$三点共线，由斜率相等可解得.

例 4 已知$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$，其中 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 为非零实数，求证：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

证法一 将已知式展开，整理并配方可得：

$(a_1a_3-a_2^2)^2+(a_1a_4-a_2a_3)^2+(a_2a_4-a_3^2)^2+(a_1a_5-a_2a_4)^2+(a_3a_5-a_4^2)^2+(a_2a_5-a_3a_4)^2=0$，

所以 $a_2^2=a_1a_3,a_3^2=a_2a_4,a_4^2=a_3a_5,a_1a_4=a_2a_3,a_1a_5=a_2a_4,a_2a_5=a_3a_4$.

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$，即 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

证法二 先证明得$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)\geqslant(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$，等号当且仅当 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$ 成立，

所以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

评注 上述的证法二可视作柯西不等式的直接运用. 本题的一般形式是：若数列$\{a_n\}$($n\geqslant3$，

$a_n\neq0$)满足条件：$\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=2}^{n}a_i^2=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1})^2$，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

例5 各项都是正数的数列$\{a_n\}$中，若前n项的和S_n满足$2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求此数列的通项公式.

解 $n\geqslant2$时，将$a_n=S_n-S_{n-1}$代入$2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，得$2S_n=S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}$，

整理得$S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geqslant2)$，且$S_1=a_1=1$，

所以数列$\{S_n^2\}$是首项为1、公差为1的等差数列，

即$S_n^2=1+(n-1)\cdot1=n$，$S_n=\sqrt{n}$，从而$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geqslant2)$，

当$n=1$时，由$2S_1=a_1+\dfrac{1}{a_n}$，得$a_1=1$也满足$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

因此，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

评注 在S_n与a_n的混合型中，应整理成数列$\{S_n\}$的递推式或数列$\{a_n\}$的递推式，然后用递推关系式先求出S_n，再求a_n，或直接求a_n. 本题容易得到数列$\{S_n\}$的递推式，利用$a_n=S_n-S_{n-1}$先求出S_n，再求a_n即可.

例6 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，是否存在常数c，使数列$\{S_n+c\}$也成等比数列？若存在，求出常数c；若不存在，请说明理由.

解 假设存在常数c，使数列$\{S_n+c\}$成等比数列. 因为$(S_n+c)(S_{n+2}+c)=(S_{n+1}+c)^2$，

所以$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=c(2S_{n+1}-S_n-S_{n+2})$，

(ⅰ)当$q=1$时，$S_n=na_1$代入上式得

$a_1^2n(n+2)-a_1^2(n+1)^2=ca_1[(2(n+1)-n-(n+2))]$，

即$a_1^2=0$，但$a_1\neq0$，于是不存在常数c，使$\{S_n+c\}$成等比数列.

(ⅱ)当$q\neq1$时，$S_n=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$，代入得$\dfrac{-a_1^2q^n}{(1-q)^2}(1-q^2)=\dfrac{ca_1q^n}{(1-q)}(1-q)^2$，所以$c=\dfrac{a_1}{q-1}$.

综上可知，存在常数$c=\dfrac{a_1}{q-1}$，使$\{S_n+c\}$成等比数列.

例7 设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n与a_n的关系为$S_n=-ba_n+1-\dfrac{1}{(1+b)^n}$，其中$b$是与$n$无关的常数，且$b\neq-1$.

(1)求a_n与a_{n-1}的关系式；

(2)写出用n与b表示a_n的表达式.

解 利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$整理出数列$\{a_n\}$的递推关系式求$a_n$.

(1)$a_1=S_1=-ba_1+1-\dfrac{1}{(1+b)}$，得$a_1=\dfrac{1}{(1+b)^2}$，

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-ba_n+1-\dfrac{1}{(1+b)^n}-[-ba_{n-1}+1-\dfrac{1}{(1+b)^{n-1}}]$

$$=-ba_n+ba_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^n},$$

整理得$a_n=\dfrac{b}{1+b}a_{n-1}+\dfrac{b}{(1+b)^{n+1}}(n\geqslant2)$ (*)

(2)当$b=1$时，$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$，两边同乘以$2^n$，得$2^na_n=2^{n-1}a_{n-1}+\dfrac{1}{2}$，

可知数列$\{2^na_n\}$是以$2a=\dfrac{1}{2}$为首项，公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

所以 $2^n a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，即 $a_n=\frac{n}{2^{n+1}}$.

当 $b\neq 1,b\neq -1$ 时，由（*）式得 $(1+b)^n a_n=b(1+b)^{n-1}a_{n-1}+\frac{b}{1+b}$，有 $\left(\frac{1+b}{b}\right)^n a_n=\left(\frac{1+b}{b}\right)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{(1+b)b^{n-1}}$. 令 $c_n=\left(\frac{1+b}{b}\right)^n a_n$，则 $c_n=c_{n-1}+\frac{1}{(1+b)b^{n-1}}$.

从而数列 $\{c_n-c_{n-1}\}$ 就是一个等比数列，n 取 $2,3,\cdots,n$ 得

$c_2-c_1=\frac{1}{(1+b)b},c_3-c_2=\frac{1}{(1+b)b^2},\cdots,$

$c_n-c_{n-1}=\frac{1}{(1+b)b^{n-1}}$，上述 $n-1$ 个式子相加得

$c_n-c_1=\frac{1}{1+b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^{n-1}}\right)$，且 $c_1=\frac{1+b}{b}a_1=\frac{1}{1+b}$，

所以 $c_n=\frac{1}{1+b}\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^{n-1}}\right)=\frac{1-b^n}{b^{n-1}(1-b)(1+b)}$，

从而 $a_n=\frac{b^n}{(1+b)^n}\cdot c_n=\frac{b^n}{(1+b)^2}\cdot\frac{1-b^n}{b^{n-1}(1-b)(1+b)}=\frac{b(1-b^n)}{(1-b)(1+b)^{n+1}}$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}\frac{n}{2^n}, & b=1,\\ \frac{b(1-b^n)}{(1-b)(1+b)^{n-1}} & b\neq\pm 1.\end{cases}$

评注 构造辅助数列是由递推关系式给出数列求通项的一个基本方法. 本例构造了辅助数列 $\{c_n\}$、$\{c_n-c_{n-1}\}$，使数列 $\{c_n-c_{n-1}\}$ 为等比数列，化未知为已知，从而使问题获解.

例 8 函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$.

(1)数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？请给予证明；

(2)令 $b_n=\frac{4}{4a_n-1}$，$T_n=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2$，$S_n=32-\frac{16}{n}$，试比较 T_n 与 S_n 的大小.

解 (1)因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$，即 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$.

又 $a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$，

两式相加 $2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\cdots+[f(1)+f(0)]=\frac{n+1}{2}$.

所以 $a_n=\frac{n+1}{4}$，$n\in N$，又 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+1+1}{4}-\frac{n+1}{4}=\frac{1}{4}$. 故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(2)$b_n=\frac{4}{4a_n-1}=\frac{4}{n}$，$T_n=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=16\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant 16\left[1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]=16\left[1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=16\left(2-\frac{1}{n}\right)=32-\frac{16}{n}$

$=S_n$，所以 $T_n \leqslant S_n$.

例 9 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=11$，且$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 A、B 为常数.

(1) 求 A 与 B 的值；

(2) 证明数列$\{a_n\}$为等差数列；

(3) 证明不等式 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m a_n}>1$ 对任何正整数 m,n 都成立.

解 根据数列的前三项可算出 S_1、S_2、S_3，从而可得关于 A、B 的方程组，并解出 A、B；欲证明数列$\{a_n\}$为等差数列，只需证明 $a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$为常数，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$将 S_n 的关系式转化为 a_n 的关系式，寻找突破口；(3)小题可由(2)求出数列通项 a_n，代入所要证明的不等式，化简、整理、直接转化，也可以先利用基本不等式放缩后转化证明.

(1)由 $a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=11$，得 $S_1=1$，$S_2=2$，$S_3=18$. 把 $n=1,2$ 分别代入

$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$，得$\begin{cases}A+B=-28,\\2A+B=-48\end{cases}$

解得，$A=-20$，$B=-8$.

(2)由(1)知，$5n(S_{n+1}-S_n)-8S_{n+1}-2S_n=-20n-8$，即

$5na_{n+1}-8S_{n+1}-2S_n=-20n-8$， ①

又 $5(n+1)a_{n+2}-8S_{n+2}-2S_{n+1}=-20(n+1)-8$. ②

②－①得，$5(n+1)a_{n+2}-5na_{n+1}-8a_{n+2}-2a_{n+1}=-20$，

即$(5n-3)a_{n+2}-(5n+2)a_{n+1}=-20$. ③

又$(5n+2)a_{n+3}-(5n+7)a_{n+2}=-20$. ④

④－③得，$(5n+2)(a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1})=0$，

消去 $5n+2$，得 $a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1}=0$，

由此，有 $a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+2}-a_{n+1}=\cdots=a_3-a_2=5$，又 $a_2-a_1=5$，

因此，数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 5 的等差数列.

(3)由(2)知，$a_n=5n-4$，$(n\in\mathbf{N}^*)$.

解法一 $5a_{mn}=5(5mn-4)=25mn-20$.

$(\sqrt{a_m a_n}+1)^2=a_m a_n+2\sqrt{a_m a_n}+1$，$a_m a_n+a_m+a_n+1=25mn-15(m+n)+9$.

故 $5a_{mn}-(\sqrt{a_m a_n}+1)^2 \quad 15(m+n)-29 \quad 15\times 2-29=1>0$.

即 $5a_{mn}>(\sqrt{a_m a_n}+1)^2$，所以$\sqrt{5a_{mn}}>\sqrt{a_m a_n}+1$. 因此，$\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m a_n}>1$.

解法二 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m a_n}>1$，即 $5a_{mn}>(\sqrt{a_m a_n}+1)^2$ 将 $a_n=5n-4$，$(n\in\mathbf{N}^*)$代入，

得 $5(5mn-4)>(\sqrt{(5m-4)(5n-4)}+1)^2$ 展开，整理得原不等式等价于

$20(m+n)-37>2\sqrt{(5m-4)(5n-4)}$配方，得$(\sqrt{5m-4}-\sqrt{5n-4})^2>29-15(m+n)$，由于 $m+n\geqslant 2$，故 $29-15(m+n)<0$.

因此，$(\sqrt{5m-4}-\sqrt{5n-4})^2>29-15(m+n)$对任何正整数 m,n 都成立，由此得证.

评注 (1)运用了方程的思想，(2)运用了阶差的方法，(3)的两种解法实际上都体现了转化与化归的思想，这也是解决不等式问题的常用策略.

例 10 无穷数列$\{x_n\}$中$(n\geqslant 1)$，对每个奇数 n，x_n、x_{n+1}、x_{n+2}成等比数列，而对每个偶数 n，x_n、x_{n+1}、x_{n+2}成等差数列. 已知 $x_1=a$，$x_2=b$.

(1)求数列的通项公式，实数 a、b 满足怎样的充要条件时，存在这样的无穷数列？

(2)求 $x_2,x_4,\cdots,x_{2n}$ 的调和平均值,即 $\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_{2k}}}$ 的值.

解 (1)观察前几项:$a,b,\dfrac{b^2}{a},\dfrac{b(2b-a)}{a},\dfrac{(2b-a)^2}{a},\dfrac{(2b-a)(3b-2a)}{a},\dfrac{(3b-2a)^2}{a},\cdots$ 由此猜测:$x_{2n-1}=\dfrac{[(n-1)b-(n-2)a]^2}{a}$,

$x_{2n}=\dfrac{[(n-1)b-(n-2)a][nb-(n-1)a]}{a}$,$(k\geqslant 1)$.

对 k 归纳证明通项公式:

(ⅰ)当 $k=1$ 时,显然成立,

(ⅱ)假设 x_{2k-1},x_{2k} 时,

$x_{2k-1}=\dfrac{[(k-1)b-(k-2)a]^2}{a}$,$x_{2k}=\dfrac{[(k-1)b-(k-2)a][kb(k-1)a]}{a}$,

则 $x_{2k+1}=\dfrac{(x_{2k})^2}{x_{2k-1}}=\dfrac{[kb-(k-1)a^2]}{a}$,

$x_{2k+2}=2x_{2k+1}-x_{2k}=\dfrac{[kb-(k-1)a][(k+1)b-ka]}{a}$,

由(ⅰ),(ⅱ)可知,公式成立对任意 n 都成立.

因此,存在这样的无穷数列⇔所有的 $x_n\neq 0$⇔$\dfrac{b}{a}\notin\left\{\dfrac{n}{n+1}\mid n\in\mathbf{N}^*\right\}$.

(2)$b\neq a$ 时,$\dfrac{1}{x_{2k}}=\dfrac{a}{b-a}\left(\dfrac{1}{(k-1)b-(k-2)a}-\dfrac{1}{kb-(k-1)a}\right)$,

故 $\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_{2k}}}=\dfrac{n}{\dfrac{a}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{nb-(n-1)a}\right)}=nb-(n-1)a$.

($b=a$ 时所有的 $x_n=a$,结果也对).

赛点归纳

等差数列与等比数列是教材中重点研究的两种数列,是数学竞赛命题的热点内容.竞赛中关于等差数列或等比数列的问题主要有四类:

(1)直接考查等差数列、等比数列的问题;

(2)通过转化可以化为等差数列或等比数列求解的问题;

(3)利用等差数列或等比数列解决日常生活、生产实践、市场经济及国家建设中的实际问题;

(4)有关等差数列或等比数列的引申知识:分群数列,高阶等差数列等.

同步检测

一、选择题

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1536$,公比 $q=-\dfrac{1}{2}$,用 π_n 表示它的前 n 项之积,则 $\pi_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 最大的是(　　)

A. π_9　　　　B. π_{11}　　　　C. π_{12}　　　　D. π_{13}

2. 已知实数 x、m、n、y 成等差数列，x、a、b、y 成等比数列，则 $\frac{(m+n)^2}{ab}$ 的取值范围是(　　)

A. $[4,+\infty]$　　B. $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$　　C. $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$　　D. 不能确定

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq\pm1$，且 $a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}a_{k-4}=a_6a_8a_{12}a_{16}a_{18}(k\in\mathbf{N}^*)$，那么 k 等于(　　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

4. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n}+\frac{1}{4}$，则 a_{99}(　　)

A. $2550\frac{1}{4}$　　B. 2500　　C. $2450\frac{1}{4}$　　D. 2401

5. 已知正项非常值数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：a_n，b_n，a_{n+1} 成等差数列，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} 成等比数列. 令 $c_n=\sqrt{b}$，则下列关于数列 $\{c_n\}$ 的说法正确的是(　　)

A. $\{c_n\}$ 为等差数列　　B. $\{c_n\}$ 为等比数列

C. $\{c_n\}$ 的每一项为奇数　　D. $\{c_n\}$ 的每一项为偶数

二、填空题

6. 已知 $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$，把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成三角形状；

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_1 & & & \\ & & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_5 & a_6 & & a_7 & a_8 & \\ & & & \cdots\cdots & & & \end{array}$$

记 $A(m,n)$ 表示第 m 行、第 n 列的项，则 $A(10,8)=$________.

7. 等差数列 3,10,17,…,2005 与 3,8,13,…,2003 中，值相同的项有________.

8. 等比数列 $a+\log_2 3$，$a+\log_4 3$，$a+\log_8 3$ 的公比是________.

9. 已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，满足关系式 $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值是________.

10. 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$. 则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$________.

三、解答题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$. 若 a_2、a_4、a_9 成等比数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

12. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足：a_n、b_n、a_{n+1} 成等差数列，b_n、a_{n+1}、b_{n+1} 成等比数列，且 $a_1=1$，$b_1=2$，$a_2=3$，求通项 a_n，b_n.

13. $n^2(n\geqslant4)$ 个正数排成 n 行 n 列

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{array}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等，已知 $a_{24}=1,a_{42}=\frac{1}{8},a_{43}=\frac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3,(2n-1)a_n+2=(2n+1)a_{n-1}+8n^2(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

15. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，

(1)若任意 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证：关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有两个不相等的实数根且必有一个根属于 (x_1,x_2)；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 在 (x_1,x_2) 的根为 m，且 x_1、$m-\frac{1}{2}$、x_2 成等差数列，设函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=x_0$，求证：$x_0<m^2$.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d>0$，其前 n 项和为 S_n 且满足 $a_2\cdot a_3=45,a_1+a_4=14$，

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)由通项公式 $b_n=\frac{S_n}{n+c}$ 得出的数列 $\{b_n\}$ 如果也是等差数列，求非零常数 c；

(3)求 $f(n)=\frac{b_n}{(n+25)b_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的最大值.

17. 对数列 $\{a_n\}$，规定 $\{\Delta a_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一阶差分数列，其中 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N})$，对自然数 K，规定 $\{\Delta^k a_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的 k 阶差分数列，其中 $\Delta^k a_n=\Delta^{k-1}a_{n+1}-\Delta^{k-1}a_n=\Delta(\Delta^{k-1}a_n)$.

(1)若数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1=1$，且满足 $\Delta^2 a_n-\Delta a_{n+1}+a_n=-2^n(n\in\mathbf{N})$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)对(1)中数列 $\{a_n\}$，是否存在等差数列 $\{b_n\}$，使得 $b_1C_n^1+b_2C_n^2+\cdots+b_nC_n^n=a_n$ 对一切自然 $n\in\mathbf{N}$ 都成立？若存在，求数列 $\{B_n\}$ 的通项公式；若不存在，则请说明理由.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项的和.

(1)当首项 $a_1=2$，公比 $q=\frac{1}{2}$ 时，对于任意的正整数 k 及正数 $c(c\leqslant 3)$ 都有 $\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}<2$ 成立，求 c 的取值范围；

(2)是否存在正常数 m，使得 $\lg(S_n-m)+\lg(S_{n+2}-m)=2\lg(S_{n+1}-m)$ 成立？并证明你的结论.

第二讲　数列的通项与求和

知识点金

通项与前 n 项和是研究数列的两个关键元素，对于研究数列的性质起到至关重要的作用.

求数列的通项主要有以下几种基本方法：

1. **公式法**

(1) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项为 a_1，公差为 d，则通项为 $a_n=a_m+(n-m)d$；

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，首项为 a_1，公比为 q，则通项为 $a_n=a_mq^{(n-m)}$.

2. **迭代法**

迭加恒等式：$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

迭乘恒等式：$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1(a_n\neq0)$

迭代法能够解决以下类型一与类型二所给的递推数列通项问题.

类型一：已知 $a_1=b,a_{n+1}=a_n+f(n)$，求 a_n.

分析　迭加法：$a_{n+1}-a_n=f(n)\Rightarrow a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)$.

类型二：已知 $a_1=b,a_{n+1}=f(n)a_n$，求 a_n.

分析　迭乘法：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\Rightarrow a_n=a_1\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}f(k)$.

3. **待定系数法**

运用待定系数法可解决以下类型三所给的递推数列问题.

类型三：已知 $a_1=b,a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1)$，求通项 a_n.

分析　令 $a_{n+1}+x=p(a_n+x)(p\neq1)$，再解出 $x=\frac{q}{p-1}$，从而构造出等比数列，由公式法求得通项公式.

4. **阶差法**

当递推式中既有 S_n 又有 a_n 时往往可用阶差法，其运用的公式为：

$$a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}, & (n\geqslant2)\end{cases}$$

5. **数学归纳法**

求数列的前 n 项和主要有以下方法：

(1)公式法：对于等差数列或等比数列，或 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$、$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$，可用公式法；

(2)裂项相消法：将数列的每一项分解为两项的差，逐一累加相消；

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；②$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

③$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$；

④$n\cdot n!=(n+1)!-n!$；⑤$C_n^m=C_{n+1}^m-C_n^{m-1}$.

(3)错位相减法：若$\{a_n\}$成等差数列，$\{b_n\}$成等比数列，则对于数列$\{a_nb_n\}$的前n项和可用错位相减法；

(4)倒序相加法：如等差数列前n项和公式的推导用的就是该法；

(5)分组分解法：将原数列分解成可用公式法求和的若干个数列；

(6)归纳猜想法：通过求S_1,S_2,S_3等猜想S_n并用数学归纳法证明的方法；

例题精析

例 1 等差数列$\{a_n\}$中，$a_1<0$，$S_9=S_{12}$，该数列前多少项的和最小？

解法一 可以利用二次函数配方法求出最值，$d=-\frac{1}{10}a_1$，$a_1<0$，$d>0$，$S_n=\frac{d}{2}\left(n-\frac{21}{2}\right)^2-\frac{21^2}{8}d$，所以当$n=10$或11时，有最小值.

解法二 由不等式组$\begin{cases}a_n\leqslant 0\\a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$，解出$10\leqslant n\leqslant 11$，因此，当$n=10$或11时，有最小值.

解法三 根据等差数列性质得$3a_{11}=0$，因此，当$n=10$或11时，有最小值.

例 2 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}>a_n$且$a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$成立，求$a_n$.

解 因式分解，得$(a_{n+1}+a_n-1)^2=4a_na_{n+1}$，因为$a_1=1$，$a_{n+1}>a_n$，所以$a_{n+1}+a_n-1>0$，

所以$a_{n+1}+a_n-1=2\sqrt{a_na_{n+1}}$即$(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})^2=1$，则$\sqrt{a_n}=1+(n-1)\cdot 1=n$，$a_n=n^2$.

例 3 已知数列a_n满足条件$(n-1)a_{n+1}=(n+1)(a_n-1)$，且$a_2=6$，设$b_n=a_n+n(n\in\mathbf{N})$，求$\{b_n\}$的通项公式.

解 将$a_n=b_n-n$代入$(n-1)a_{n+1}=(n+1)(a_n-1)$得$(n-1)b_{n+1}=(n+1)b_n-2(n+1)$，

所以$\frac{b_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{b_n}{(n-1)n}-\frac{2}{n(n-1)}(n\geqslant 2)$，令$c_n=\frac{b_n}{(n-1)n}(n\geqslant 2)$，

则$c_{n+1}=c_n-\frac{2}{n(n-1)}$，所以$c_{n+1}-c_n=-\frac{2}{n(n-1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$，

所以$c_n=(c_n-c_{n-1})+(c_{n-1}-c_{n-2})+\cdots+(c_3-c_2)+c_2$

$$=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-3}+\cdots+\frac{1}{2}-1\right)+c_2=2\left(\frac{1}{n-1}-1\right)+\frac{b_2}{2}=\frac{2}{n-1}+2,$$

则$b_n=c_n\cdot n(n-1)=\left(\frac{2}{n-1}+2\right)\cdot n(n-1)=2n^2$.

评注 本题也可根据递推式求出$a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=15$，$a_4=28$，由$b_n=a_n+n$得解$b_1=2$，$b_2=8$，$b_3=18$，$b_4=32$，利用不完全归纳法，猜测$b_n=2n^2$，再用数学归纳法证明.

例 4 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$，$n=1,2,3,\cdots$，求

(1)a_2,a_3,a_4的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$的值.

解 (1)由 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n,n=1,2,3,\cdots$,得

$a_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3},a_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3}(a_1+a_2)=\frac{4}{9},a_4=\frac{1}{3}S_3=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)=\frac{16}{27}$,

由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{3}a_n(n\geqslant2)$,得 $a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n(n\geqslant2)$,

又 $a_2=\frac{1}{3}$,所以 $a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}(n\geqslant2)$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} & n\geqslant2\end{cases};$$

(2)由(1)可知 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$是首项为$\frac{1}{3}$,公比$\left(\frac{4}{3}\right)^2$项数为 n 的等比数列,

所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{3}{7}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}-1\right]$.

例5 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$,且 a_2、a_4、a_9 成等比数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 Θ对任意$n\in\mathbf{N}^*$有 $S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$ ①

所以当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$,解得 $a_1=1$ 或 $a_1=2$,

当 $n\geqslant2$ 时,有 $S_{n-1}=\frac{1}{6}(a_{n-1}+1)(a_{n-1}+2)$ ②

于是①-②整理得,$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$,

Θ$\{a_n\}$各项均为正数,所以 $a_n-a_{n-1}=3$.

当 $a=1$ 时,$a_n=1+3(n-1)=3n-2$,此时,$a_4^2=a_2a_9$ 成立,

当 $a_1=2$ 时,$a_n=2+3(n-1)=3n-1$,

此时,$a_4^2=a_2a_9$ 不成立,故 $a_1=2$ 舍去,所以 $a_n=3n-2$.

评注 求得 $a_n-a_{n-1}=3$ 后,可设 $a_n=a_1+(n-1)\times3$,将其代入 $a_4^2=a_2a_9$ 得到 $a_1=1$.

例6 设$\{a_n\}$是等比数列,$T_n=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n$,已知 $T_1=1,T_2=4$,求$\{T_n\}$的前 n 项和.

解 因为 $T_n=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n,T_1=1,T_2=4$,

所以 $T_1=a_1=1,T_2=2a_1+a_2=4$,所以 $a_2=2$;因为$\{a_n\}$是等比数列,$q=\frac{2}{1}=2,a_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$;

因为 $T_n=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n$,

所以 $n\geqslant2$ 时,$T_{n-1}=(n-1)a_1+(n-2)a_2+(n-3)a_3+\cdots+2a_{n-2}+a_{n-1}$,

上两式相减得:$T_n-T_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=2^n-1$,

$T_n=(T_n-T_{n-1})+(T_{n-1}-T_{n-2})+\cdots+(T_3-T_2)+(T_2-T_1)+T_1=(2^n-1)+(2^{n-1}-1)+\cdots+(2^3-1)+(2^2-1)+1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2^3+2^2-(n-1)+1=2^{n+1}-2-n$,

经检验 T_1 也适合,所以 $T_n=2^{n+1}-2-n$.则$\{T_n\}$的前 n 项和为$-\frac{n^2}{2}-\frac{5}{2}n+2^{n+2}-4$.