高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

P I N G M I A N J I H E

平面几何

本书主编 虞金龙
马洪炎

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

平面几何

本册主编　虞金龙　马洪炎

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 平面几何 / 陶平生等主编.
杭州:浙江大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-308-05231-3

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.几何课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039723 号

平面几何

虞金龙　马洪炎　著

责任编辑　杨晓鸣　李梦婕
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11.25
印　　数　0001—6000
字　　数　220 千
版 印 次　2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05231-3
定　　价　14.50 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久，自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来，有近60年的历史，其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下，世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前，我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动，吸引了无数数学爱好者积极参与，也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台，是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到，通过这项活动，发现了一批数学苗子，培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来，我国的数学竞赛体制日趋完善，它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革，各种学科竞赛，尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上，学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望，在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且作出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

前　言

自公元前3世纪古希腊数学家欧几里得的《几何原本》问世以来，平面几何作为数学的一个分支而存在于世。在历史上，《几何原本》的问世奠定了数学科学的基础，平面几何提出的问题，诱发出了一个又一个重要的数学概念和有力的数学方法。由于平面几何有其鲜明的直觉与严谨、精确而简明的语言，并且经常出现一些极具挑战性的问题，因而这一古老的数学分支一直保持着青春的活力，青少年中的数学爱好者，大多数首先是平面几何的爱好者。世界各国无不将平面几何作为培养本国公民的逻辑思维能力、空间想象能力和推理能力的首选题材。正因为如此，在数学智力竞赛中，尤其在数学奥林匹克竞赛中，平面几何内容占据着十分显著的位置，如果我们把数学比作巍峨的宫殿，那么平面几何恰似这宫殿门前的五彩缤纷的花坛，它吸引着人们更多地去了解数学科学，研究数学科学。

数学难学，平面几何难学，这也是很多人感受到了的问题。目前市面上许多竞赛教辅书都涉及平面几何的内容，但大都不够全面，有些名家专著，虽有较详细的论述，但篇幅较长，高中学生很难抽时间仔细阅读。基于上述考虑，我参考了众多名家的专著和文章，结合自己多年来辅导竞赛的教学实际，编成这本《平面几何》教辅书，旨在给众多数学竞赛爱好者提供一定的帮助。挚友马洪炎一同编写了第四章《几何不等式与几何变换》，使本书又增色不少。在此对书中一些题目的作者表示感谢。

限于作者水平，书中出现错误也在所难免，敬请读者批评指正。

虞金龙

2007年5月于绍兴一中

目　录

第一章 平面几何中的重要定理

第1讲 梅涅劳斯定理和塞瓦定理

知识点金

欧几里得的《几何原本》问世以来，初等几何以其新奇、美妙、丰富、完美的内容和形式引发了历代数学家们浓厚的兴趣.许多杰出的数学家为了探索几何学的奥秘而奉献了毕生的精力，他们发现了一个又一个新的定理，推动了几何学的迅速发展.为纪念他们，人们以他们的名字来命名他们所获得的重要成果.这些优秀成果如同璀璨的明珠照亮了几何学的历程.

梅涅劳斯定理和塞瓦定理就是其中最常用的两个定理.

梅涅劳斯是古希腊的著名几何学家，在他的几何著作《球论》中，他提出了“梅涅劳斯”这条著名的定理.

梅涅劳斯定理 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，若 A'、B'、C' 三点共线，则 $\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1.$ ①

证明 如图1-1，过 A 作直线 $AD /\!/ C'A'$ 交 BC 的延长线于 D，则 $\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{CA'}{A'D}$，$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{DA'}{A'B}$，故 $\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CA'}{A'D}\cdot\dfrac{DA'}{A'B}=1.$

评注 此定理的证明还有如下正弦定理证法及面积证法.

正弦定理证法 设$\angle BC'A'=\alpha$，$\angle CB'A'=\beta$，$\angle B'A'B=\gamma$，在$\triangle BA'C'$中，有$\frac{BA'}{C'B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$，同理，$\frac{CB'}{CA'}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$，$\frac{AC'}{AB'}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$，此三式相乘即证.

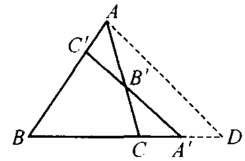

图 1-1

面积证法 由$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle A'C'B}}{S_{\triangle A'C'C}}$，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{\triangle CB'C'}}{S_{\triangle B'AC'}}=\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle CB'C'}+S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle B'AC'}+S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle C'CA'}}{S_{\triangle AC'A'}}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle AC'A'}}{S_{\triangle C'BA'}}$，三式相乘即证.

梅涅劳斯定理的逆定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上的点，若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \quad ②$$

则A'、B'、C'三点共线.

证明 设直线$A'B'$延长线交AB于C_1，则由梅涅劳斯定理得$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

由题设，有$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，即有$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$.

又由合比定理，知$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$，故有$AC_1=AC'$，从而$C_1$与$C'$重合，即$A'$、$B'$、$C'$三点共线.

有时，也把上述两个定理合写为：设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线（包括三边的延长线）上的点，则A'、B'、C'三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

角元形式的梅涅劳斯定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线（包括三边的延长线）上的点，则A'、B'、C'共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \quad ③$$

证明 如图 1-2，可得

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AA'\cdot\sin\angle BAA'}{\frac{1}{2}AA'\cdot AC\cdot\sin\angle A'AC}$$

$$=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}.$$

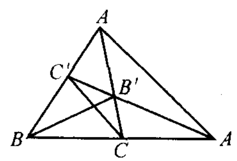

图 1-2

同理，$\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$，$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘，再运用梅涅劳斯定理及其逆定理，知结论成立.

评注 上述各定理中，若采用有向线段或有向角，则①、②、③式中的右端均为-1. ③式中的角也可以按①和②式中的对应线段记忆.

塞瓦(G·Ceva)是17世纪意大利水力工程师和数学家，他重新发现了梅涅劳斯定理，并根据梅涅劳斯定理推出了他自己的著名定理.

塞瓦定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上的点，若AA'、BB'、CC'三条线平行或共点，则$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$.

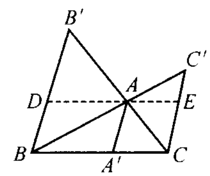

图 1-3

证明 如图1-3，若AA'、BB'、CC'交于一点P，则过A作BC的平行线，分别交BB'、CC'的延长线于D、E，得$\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{BC}{AD}$，$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{EA}{BC}$.

又由$\dfrac{BA'}{AD}=\dfrac{A'P}{PA}=\dfrac{A'C}{EA}$，有$\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{AD}{EA}$.

从而$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{AD}{EA}\cdot\dfrac{BC}{AD}\cdot\dfrac{EA}{BC}=1$.

若AA'、BB'、CC'三条线平行，可类似证明(略).

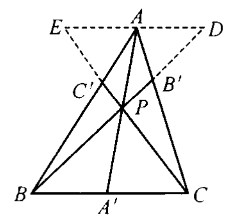

图 1-4

评注 对于图1-4也有如下面积证法：

由$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}}\cdot\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}}\cdot\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBC}}=1$，即证.

塞瓦定理的逆定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上的点，若$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$，则$AA'$、$BB'$、$CC'$三条直线共点或三条直线互相平行.

证明 若AA'与BB'交于点P，设CP与AB的交点为C_1，则由塞瓦定理，有$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$. 又已知有$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$，由此得$\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{AC'}{C'B}$，即$\dfrac{AC_1}{AB}=\dfrac{AC'}{AB}$，亦即$AC_1=AC'$，故$C_1$与$C'$重合，从而$AA'$、$BB'$、$CC'$三线共点.

若$AA'\mathbin{/\!/}BB'$，则$\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{CB}{BA'}$. 代入已知条件，有$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{A'C}{CB}$，由此知$CC'\mathbin{/\!/}AA'$，故$AA'\mathbin{/\!/}BB'\mathbin{/\!/}CC'$.

上述两定理可合写为：设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线上的点，则三条直线AA'、BB'、CC'平行或共点的充要条件是$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$.

角元形式的塞瓦定理 设A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线上的点，则三条直线AA'，BB'，CC'平行或共点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1.$$

证明 由$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}$，$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$，三式相乘，再运用塞瓦定理及其逆定理，知结论成立.

推论 设A_1、B_1、C_1分别是$\triangle ABC$外接圆的三段弧$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$上的点，则AA_1、BB_1、CC_1共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

证明 如图1-5，设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，AA_1交BC于A'，BB_1交CA于B'，CC_1交AB于C'. 由A、C_1、B、A_1、C、B_1六点共圆及正弦定理，有$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}$.

同理，$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}$，$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}$.

三式相乘，并应用角元形式的塞瓦定理即证.

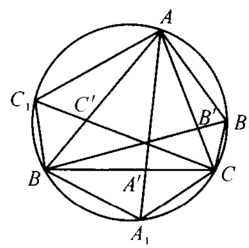

图1-5

例题精析

例1 （笛沙格定理）如图1-6，由O引出的三条射线上各有两个点：A_1和A_2，B_1和B_2，C_1和C_2. 直线B_1C_1和B_2C_2交于点X；直线A_1C_1和A_2C_2交于点Y；直线A_1B_1和A_2B_2交于点Z. 求证：X、Y、Z三点共线.

分析 当然稍微观察一下就会发现这个定理显然要使用梅氏定理来证明，因为题目几乎什么条件都没给，除了直线还是直线，所以迫不得已我们只好使用梅氏定理.

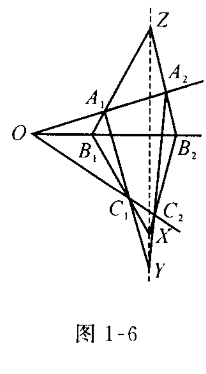

图1-6

已知$\triangle A_1B_1C_1$和XYZ为梅氏线，只要证明$\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$即可. 关键是这些比例我们都不知道，所以就要想办法转化条件. 注意到$\frac{A_1Z}{ZB_1}$可以看成是在$\triangle OA_1B_1$中ZA_2B_2为梅氏线时也用到的一个比例，所以，我们考虑

这个梅氏定理对应的式子：$\frac{OA_2}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1$. 由此知道$\frac{A_1Z}{ZB_1}=\frac{A_2A_1}{OA_2}\cdot\frac{B_2O}{B_1B_2}$.

这里，请读者要注意这样一个事实，就是 ABC 地位的轮换对称性。所以说，我们根本不需要去想剩下两个应该如何去转化，而只需要对上式的 ABC 进行轮换代入即可得到关于另外两个比例的转化式：$\frac{B_1X}{XC_1}=\frac{B_2B_1}{OB_2}\cdot\frac{C_2O}{C_1C_2}$，$\frac{C_1Y}{YA_1}=\frac{C_2C_1}{OC_2}\cdot\frac{A_2O}{A_1A_2}$（即第一个式子中见到 A 就用 B 代替，见到 B 就用 C 代替，见到 Z 就用 X 代替；第二个同理）. 这样可以大大减短思考问题的时间，而且还时刻保持了对称性.

当然在写证明的时候，我们最好还是不要点明的说这些对称性的东西，因为这些很多都是建立在感觉的基础之上，并不是特别的严格.

证明 在$\triangle OA_1B_1$ 中，ZA_2B_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OA_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1,$$

在$\triangle OB_1C_1$ 中，ZB_2C_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OB_2}{B_2B_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2O}=1,$$

在$\triangle OC_1A_1$ 中，ZC_2A_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OC_2}{C_2C_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}\cdot\frac{A_1A_2}{A_2O}=1,$$

将以上三式相乘得到：$\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$.

由梅氏逆定理得 X、Y、Z 共线.

评注 这个证明的基本想法就是利用梅氏定理转化线段比例，但最重要的是要时刻保持点的轮换对称性，这样给出的证明就显得很漂亮和干净.

例 2 如图 1-7，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 和$\odot O_3$ 两两的外公切线分别交于点 P、Q 和 R. 求证：P、Q、R 三点共线.

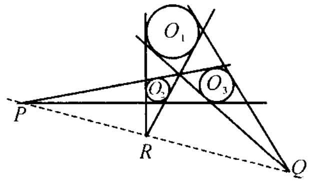

图 1-7

分析 1 我先说一个解法，这是由一种感觉带来的，因笔者第一次拿到题目时就有一个反应，是不是可以用笛沙格定理啊？在经过几组试验之后就给出了下面的解法.

证法 1 如图 1-8，考察标出的点组 A、B、C 和 O_1、O_2、O_3.

易见，AO_1、BO_2、CO_3 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，所以共点是自然的.

由笛沙格定理，得 P、Q、R 三点共线（P 是 BC 和 O_2O_3 的交点；Q 是 CA 和 O_3O_1 的交点；R 是 AB 和 O_1O_2 的交点）.

分析 2 其实我们完全不必去回忆刚才的那个解法，因为它需要太多的经验和技巧.

我们来回到我们惯用的思路，首先我们要看看要讨论问题主要涉及的 P、Q、R 三个点有什么性质. 事实上，如果你随便看一下就会发现 O_1、O_2、R，O_2、O_3、P，O_3、O_1、Q 分别共线. 由此我们自然会想到要用梅氏逆定理，去证明 $\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$. 这个证明简直易如反掌，简直不需要什么计算.

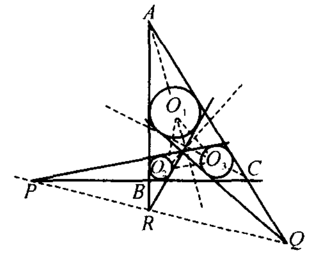

图 1-8

证法 2 如图 1-9，设三个圆的半径分别为 r_1、r_2、r_3.

易见 RO_1 和 RO_2 都是角 R 的平分线，所以 O_1、O_2、R 共线.

同理，O_2、O_3、P 和 O_3、O_1、Q 分别共线.

为证明 P、Q、R 三点共线，只要证明：$\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$.

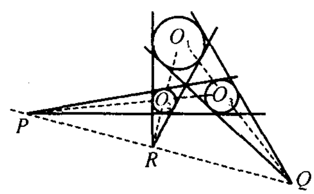

图 1-9

事实上，由相似易知 $\frac{O_1R}{RO_2}=\frac{r_1}{r_2}$，$\frac{O_2P}{PO_3}=\frac{r_2}{r_3}$，$\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_3}{r_1}$.

所以 $\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$.

由梅氏逆定理知 P、Q、R 三点共线.

例 3 以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆，分别与边 AB、AC 交于点 D 和 E，分别过点 D、E 作 BC 的垂线，垂足依次为 F、G，线段 DG 和 EF 交于点 M. 求证：$AM\perp BC$.

证法 1 如图 1-10，记直线 AM 与 BC 交于点 H，连接 BE、CD. 有 $\angle BEC=\angle BDC=90°$. 直线 FME 与 $\triangle AHC$ 相截，直线 GMD 与 $\triangle ABH$ 相截，由梅涅劳斯定理有

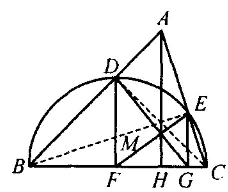

图 1-10

$$\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\ \frac{AM}{MH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BD}{DA}=1,$$

所以 $$\frac{FH}{HG}=\frac{CF\cdot AE\cdot BD}{CE\cdot BG\cdot AD}. \quad ①$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 中应用射影定理有

$CD^2=BC\cdot FC$，$BE^2=BC\cdot BG$，

所以 $$\frac{CF}{BG}=\frac{CD^2}{BE^2}. \quad ②$$

将②代入①，得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD^2\cdot AE\cdot BD}{BE^2\cdot CE\cdot AD}. \quad ③$$

因为 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，所以 $$\frac{CD}{BE}=\frac{AD}{AE}, \quad ④$$

将④代入③,得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG},$$

所以 $MH // DF$.

因为 $DF\perp BC$,所以 $MH\perp BC$,

所以 $AM\perp BC$.

证法 2 作高 AH,连接 BE、CD. 于是 $\angle BDC=90°=\angle BEC$,

所以 $DF=BD\cdot\sin B=BC\cdot\cos B\cdot\sin B$,$EG=BC\cdot\cos C\cdot\sin C$,

所以$\frac{GM}{MD}=\frac{EG}{FD}=\frac{\cos C\cdot\sin C}{\cos B\cdot\sin B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos C}{\cos B}$.

因为 $BH=AB\cdot\cos B$,$HG=AE\cdot\cos C$,

所以$\frac{BH}{HG}=\frac{AB\cdot\cos B}{AE\cdot\cos C}=\frac{AC\cdot\cos B}{AD\cdot\cos C}$,所以$\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AB}{AD}$,

所以$\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}\cdot\frac{DA}{AB}=1$.

由梅涅劳斯定理的逆定理知 H、M、A 三点共线.

因为 $AH\perp BC$,所以 $AM\perp BC$.

我们再给出将梅涅劳斯定理与塞瓦定理联合使用证明的一种方法,如下.

证法 3 作高 AH,连接 BE、CD,则 AH、BE、CD 交于一点,即$\triangle ABC$ 的垂心. 由塞瓦定理有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

因为 $EG // DF$,所以$\triangle MDF\backsim\triangle MGE$,

所以$\frac{GM}{MD}=\frac{EG}{DF}=\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$,

因为 $AH // EG$,所以$\frac{HG}{AE}=\frac{CH}{AC}$,

所以$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH\cdot AC}{AE\cdot CH}\cdot\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$.

因为 $AB\cdot CD=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BE$,

所以$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A、M、H 三点共线,所以 $AM\perp BC$

评注 使用梅涅劳斯定理和塞瓦定理证明本题,还可找到一些不同的方法,但限于篇幅,不再一一列举,留给读者去思考,相信读者还会找到更好的证法.

例 4 如图 1-11,点 I、H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 B_1、C_1 分别为边 AC、

AB 的中点. 已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$，射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2，B_2C_2 与 BC 相交于点 K，A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心. 试证：A、I、A_1 三点共线的充要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

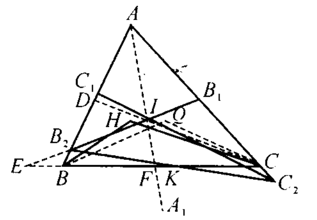

图 1-11

分析 首先证 A、I、A_1 三点共线 $\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$.

设点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，连接 BO、CO，则 $\angle BOC=2\angle BAC$. 又 $\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$，因此，$\angle BAC=60^\circ$

$\Leftrightarrow B$、H、O、C 四点共圆，

$\Leftrightarrow A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 上，

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合 $\Leftrightarrow A$、I、A_1 三点共线.

其次，再证 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$. 并在三角函数式中，用 A、B、C 分别表示三个内角.

证法 1 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，CI 的延长线交 AB 于 D，对 $\triangle ACD$ 及截线 C_1IC_2，应用梅涅劳斯定理，有 $\dfrac{AC_1}{C_1D}\cdot\dfrac{DI}{IC}\cdot\dfrac{CC_2}{C_2A}=1$. ①

注意到 $C_1D=AD-AC_1=\dfrac{AC\cdot AB}{AC+BC}-\dfrac{AB}{2}$

$$=\frac{AB(AC-BC)}{2(AC+BC)}=\frac{\sin C(\sin B-\sin A)\cdot R}{\sin B+\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}\cdot R}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

所以 $\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$.

而 $\dfrac{IC}{DI}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\sin(\frac{C}{2}+B)}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$，由①式，有

$$\frac{CC_2}{C_2A}=\frac{IC}{DI}\cdot\frac{C_1D}{AC_1}=\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

从而 $\dfrac{AC}{AC_2}=\dfrac{AC_2-CC_2}{C_2A}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ ②

又对$\triangle ACD$及截线B_1IB_2，应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AB_2}{B_2D}\cdot\frac{DI}{IC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

注意到$CB_1=B_1A$，有$\frac{B_2D}{AB_2}=\frac{DI}{IC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，$\frac{AD}{AB_2}=\frac{AB_2-B_2D}{AB_2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$

$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，即$AB_2=AD\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{AC}{AC+BC}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=$

$AB\cdot\frac{\sin B}{\sin B+\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$.

从而 $$\frac{AB}{AB_2}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.\quad ③$$

由$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$，注意到②、③$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}=1$，且$A$为锐角$\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$.

证法2 如图1-11，设直线AI交BC于F，直线B_1B_2交CB的延长线于E. 对$\triangle ACF$及截线B_1IE应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FI}{IA}=1$. ④

又由$AB_1=B_1C$及角平分线性质，即有$\frac{FI}{IA}=\frac{CF}{CA}=\frac{BF}{BA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

令$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则$\frac{FI}{IA}=\frac{a}{b+c}$.

由④式，有$\frac{CE}{EF}=\frac{b+c}{a}$，即$\frac{EF}{CF}=\frac{EF}{CE-EF}=\frac{a}{b+c-a}$.

而$CF=\frac{ab}{b+c}$，则$EF=\frac{a^2b}{(b+c-a)(b+c)}$.

又$BF=\frac{ac}{b+c}$，$BE=EF-BF=\frac{a(a-c)}{b+c-a}$（由题设知$a>c$）.

从而 $$\frac{EF}{BE}=\frac{ab}{(b+c)(a-c)}.\quad ⑤$$

对$\triangle ABF$及截线IB_2E，应用梅涅劳斯定理，有$\frac{AI}{IF}\cdot\frac{FE}{EB}\cdot\frac{BB_2}{B_2A}=1$.

将⑤式代入上式，得$\frac{BB_2}{B_2A}=\frac{IF}{AI}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{a-c}{b}$，所以$\frac{AB}{AB_2}=\frac{AB_2+B_2B}{AB_2}=\frac{a+b-c}{b}$. ⑥