独立学院系列教材

线性代数

主　编　周厚隆
副主编　王　琍

Linear Algebra

四川大学出版社

独立学院系列教材

线性代数

主　编　周厚隆
副主编　王　琍

四川大学出版社

责任编辑:李川娜　廖庆扬
责任校对:周树琴
封面设计:罗　光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 周厚隆主编. 一成都: 四川大学出版社, 2007.2
ISBN 978-7-5614-3650-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 周… Ⅲ. 线性代数 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 021169 号

内容提要

本书力求用通俗的语言介绍线性代数的基本知识和理论，内容包括行列式的概念和计算，解线性方程组的方法，矩阵的概念和计算，向量及其线性相关性，矩阵的特征值和特征向量，实二次型的相关知识。

本书起点低，包括了理工、经济、管理学科中的基本内容和研究生考试所要求的内容，适合作为理工类，经济、管理类本科生的教材，也适合大学生考研时作为参考用书。

书名　线性代数

主　　编　周厚隆
副 主 编　王　琍
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978-7-5614-3650-9/O·114
印　　刷　郫县犀浦印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　10.75
字　　数　256 千字
版　　次　2007 年 3 月第 1 版
印　　次　2007 年 3 月第 1 次印刷
印　　数　0 001～3 700 册
定　　价　18.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话: 85408408/85401670/85408023　邮政编码: 610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址: www.scupress.com.cn

四川大学锦江学院教材编写委员会

前　言

本书根据教育部21世纪大学数学（理工类和经管类）线性代数课程的基本要求和全国研究生数学入学考试大纲，以作者多年为理工类和经济、管理类大学本科生讲授线性代数课程的讲义为基础，修改整理而完成的。

线性代数一直以来都是本科大学生的基础数学课程之一，也是考研的基本内容之一。其理论和方法在工程技术、科学研究以及经济、管理中有着广泛的应用。例如工程技术中的数值计算，信息科学线性规划中的编码信息等都与线性代数有密切的联系。

本书用通俗的语言向读者介绍线性代数的基本知识和理论，在编写上由浅入深，力求直观性和科学性相结合，尽量先从实际问题入手介绍线性代数概念的形成，再讨论它的内容，并指出其应用。全书共分为 6 章，第 1 章介绍行列式的概念、性质与计算，以及解线性方程组的克莱姆法则；第 2 章介绍矩阵的概念和运算；第 3 章介绍向量这一重要概念及其线性相关性，并引入线性空间及基本几何特性——正交性；第 4 章讨论如何以向量、矩阵为工具解线性方程组；第 5 章介绍矩阵特征值、特征向量的理论；第 6 章介绍实二次型的概念和有关理论、方法。

本书起点低，读者容易入门，且包括了理工类、经济、管理学科中所需的基本内容和研究生考试所要求的内容。章节的划分首先考虑突出以行列式、矩阵、向量为工具解线性方程组，其次讨论矩阵的特征值、特征向量、二次型这些线性代数的基本内容，使线性代数这一门重要的数学基础课的知识结构自然流畅、层次分明、目标明确。

为了掌握好线性代数的基本理论和方法，各章后面都配备了相当数量、难易不等的习题，供读者练习和思考。

本书是为理工类，经济、管理类本科学生编写的教材，也可供这些类别的大学生考研时参考，还可作为其他各级各类大学生的教材和参考书。

本书是在四川大学锦江学院领导，特别是教务处的王琍副处长大力关怀、鼓励和支持下，由周厚隆教授执笔编写的。初稿写成后，承数学学院谢勉忠副教授仔细地审查并提出了修改意见，数学学院副院长杜斌教授也提出了修改意见，数理教研室的教师何祖林副教授也仔细通读了原稿，提出了相应的意见，对他们的热情关注作者表示真诚的感谢。

由于时间紧迫和作者的水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者和同行提出批评指正。

编　者

2007 年 2 月 10 日

目 录

第 1 章　行列式

行列式是线性代数的重要概念之一，它也是解线性方程组的一种重要工具. 求解线性方程组是数学中基本的计算问题之一. 它的应用遍及数学和其他许多学科，诸如自然科学、工程技术、经济管理、人文、社会科学等.

行列式概念产生的背景是解线性方程组. 在初等数学中，讨论了二元、三元线性方程组的求解问题. 而在实际问题中用到的线性方程组，方程的个数和未知量的个数常常是大量的. 用二元、三元线性方程组的解法去解这种大型的线性方程组，惊人的计算量使人们难以求解. 这就促使人们将解二元、三元线性方程组的问题加以改进提高，形成一种形式化，条理化的“公式”，以便于计算、记忆和用来进行理论分析. 引进行列式这一概念，就可以将某些类型线性方程组的求解问题“公式化”.

这一章将引入行列式的概念并讨论行列式的性质及其计算，以及行列式在解线性方程组中的应用.

1.1　行列式的概念

在初等数学中用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

时，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了从形式上看上去较直观且便于记忆，将分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 记为形式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并用大写字母 D 来标记，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，将其形式化就得到以下 2 阶行列式的定义.

定义 1.1.1　2^2 个数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 构成的 2 阶行列式记为 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，其意义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，等号右边的多项式称为 2 阶行列式的展开式.

若再记 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则可将方程组的解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

类似地，在用消元法来解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，引入 3 阶行列式的概念：3^2 个数 a_{ij} $(i=1,2,3; j=1,2,3)$ 排列成三行三列，并记为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，其意义或其展开式为

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

若再记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则 $\quad x_1 = \dfrac{D_1}{D},\quad x_2 = \dfrac{D_2}{D},\quad x_3 = \dfrac{D_3}{D}.$

例 1.1.1 用 3 阶行列式解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 3 + 2\times 1\times 2 + (-1)\times(-1)\times 1 - (-1)$

$\times(-1)\times 2 - 2\times(-1)\times 3 - 1\times 1\times 1 = 5.$

同理 $\quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

所以 $\quad x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -1,\quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 1,\quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 0.$

由于在大量实际应用中，涉及到的因素之间关系比较复杂，变量的个数也就很多．归结为线性方程组的数学模型求解时，2 阶、3 阶行列式就不能适应需要了，这就需要将行列式的概念推广到 n 阶 $(n>3)$ 行列式（或称为高阶行列式）.

2 阶、3 阶行列式是从用消元法解二、三元线性方程组直接写成便于记忆和掌握的形式而得到的. 要从 $n(n>3)$ 元线性方程组用消元法来得到 n 阶行列式的概念显然就较为困难了. 为了直观且避免一些繁琐的准备知识，这里我们先来找出 2 阶、3 阶行列式之间的联系，用递归的方法将 2 阶、3 阶行列式推广到 $n(n>3)$ 阶行列式.

只要将 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的定义式（或展开式）整理一下就可以看出 3 阶

行列式可以由 3 个 2 阶行列式来确定，即

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

其中　$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，

或者

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}.$$

其中　$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

一般地 $M_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是行列式 D 中删去 a_{ij} 所在的行和列的元素后，由余下的元素按原来的相对位置构成的 2 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式. 若再记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (i,j=1,2,3),$$

则称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，这就有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

或者

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

即 3 阶行列式 D 等于它的第一行(列)的元素乘以其代数余子式之和. 换言之，任意一个 3 阶行列式都可以转化为 2 阶行列式来计算.

将上述情形形式化，可以得 n 阶行列式的递归定义.

定义 1.1.2　1 阶行列式定义为 $D=|a_{11}|=a_{11}$，2 阶、3 阶行列式已如前定义. 假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义好了，即 $(n-1)^2$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n-1)$ 构成的 $n-1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

为一个确定的数值；n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 阶行列式记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

那么对任意的 i、j，删去 D 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列的元素后余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为元素 a_{ij} 的余子式(由归纳假设已有定义). 又令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n),$$

称为 a_{ij} 的代数余子式,规定

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}(\text{或 } a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}).$$

由此定义,n 阶行列式就化成 $n-1$ 阶行列式来计算;而 $n-1$ 阶行列式又化成 $n-2$ 阶行列式来计算;继续下去,直到化为 3 阶、2 阶、1 阶行列式来计算.

例如有 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第一行第一列的元素 $a_{11}=1$,其余子式为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

而代数余子式为 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,是一个 3 阶行列式.

又其中元素 $a_{34}=1$,其余子式为

$$M_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

而代数余子式为 $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}$.

类似地可以得出其他元素的余子式和相应的代数余子式,如求出 A_{21}、A_{31}、A_{41},于是有

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41} \\ &= 1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+2\cdot A_{31}+0\cdot A_{41} \\ &= A_{11}+2A_{31}. \end{aligned}$$

当 $n=2,3$ 时,上述 n 阶行列式的定义与前面直接从消元法得到的 2 阶、3 阶行列式是一致的,例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}=a_{22}=M_{11}$,a_{21} 的代数余子式为 $A_{21}=-a_{12}=-M_{21}$,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}.$$

类似地 3 阶行列式也如此.

例 1.1.2　用定义求下述行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　这样形式的 n 阶行列式称为上三角行列式，其特征是主对角线以下的元素全为零，即 $a_{ij}=0(i>j)$.

由定义 $$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}.$$
但 $a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$，故有

$$D=a_{11}A_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}M_{11}.$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

反复使用定义，得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.3　用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　由定义，D 等于第一列的元素乘以相应的代数余子式的和，所以

$$D=1\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=-3-(-3)=0.$$

例 1.1.4　设有 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，计算 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$.

解　$$\text{原式}=a_{11}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right)$$
$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{11}a_{12}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{13}a_{31}$$
$$=0.$$

一般地有下列定理成立.

定理 1.1.1　$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n}=0.$$

习题 1.1

1. 选择题

(1) 已知4阶行列式D,其第1列的元素分别为1,3,2,-2,它们对应的余子式分别为3,-2,1,1,则行列式D的值为______.

(A) -5　　(B) -3　　(C) 3　　(D) 5

(2) 已知4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix},$$

则$A_{13}+A_{23}+2A_{43}=$______.

(A) -4　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(3) 4阶行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & e & f & g \end{vmatrix}=$______.

(A) $-abed$　　(B) 0　　(C) $abed$　　(D) $abcdefg$

(4) 4阶行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$______.

(A) -4　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 4

2. 设$D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$,计算第一行的元素分别乘以第二行的元素对应的代数余子式之和:$2A_{21}+2A_{22}+2A_{23}$.

1.2　行列式的性质

上一节我们引进了n阶行列式的概念,并用定义做了一些特殊情况下的计算,从经验可知,当n较小或元素较简单时,可以容易地计算出行列式的数值,但当n较大或其元素较复杂时,则计算量显然是非常大的.虽然定义指出将n阶行列式变成$n-1$阶行列式来计算,可以逐步降低阶数,但n很大时,降低的速度还是很慢,因此用定义很难计算高阶行列式.上一节指出,上三角行列式计算很简便,那么能否在不改变行列式的值的情况下,使其元素变得简单一些呢?甚至变成一个上三角形行列式呢?这就需要考察一下行列式的内部结构有些什么规律.

首先,关于行列式的行和列的关系有以下定理成立.

定理 1.2.1　行列式与其转置行列式(即将行列式的行和列互换)相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理的证明较繁琐,故略去证明,可以用低阶行列式进行验证.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 1.2.2　行列式中某一行(列)的公因式 k 可以提到行列式之外(或用一个数 k 去乘行列式相当于将 k 乘以某一行(列)的每个元素),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　(1) 若第一行有公因式 k,则

$$\begin{aligned} D &= (ka_{11})A_{11}+(ka_{12})A_{12}+\cdots+(ka_{1n})A_{1n} \\ &= k(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 若第 i 列有公因子 $k(1<i\leqslant n)$,则

$$D=a_{11}A'_{11}+a_{12}A'_{12}+\cdots+a_{1n}A'_{1n}\quad(A'_{1j}\text{ 是 }a_{1j}\text{ 的代数余子式}).$$

由归纳假设 $A'_{11},A'_{12},\cdots,A'_{1n}$ 中第 $i-1$ 行有公因子可提到其外面,即

$$A'_{11}=kA_{11},A'_{12}=kA_{12},\cdots,A'_{1n}=kA_{1n}.$$

所以 $$D=k(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n})=k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2.1　若行列式 D 的某一行(列)的元素全为零,则 $D=0$.

定理 1.2.3　行列式任意二行(列)互换后所得行列式与原行列式反号.(证明略去)

推论 1.2.2　行列式 D 中两行相同,则行列式值为 0.

推论 1.2.3　行列式 D 中两行成比例,则行列式值为 0.

定理 1.2.4 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

证明 (1) 若 $b_1+c_1, b_2+c_2, \cdots, b_n+c_n$ 在第一行，则

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= (b_1+c_1)A_{11}+(b_2+c_2)A_{12}+\cdots+(b_n+c_n)A_{1n} \\
&= (b_1A_{11}+b_2A_{12}+\cdots+b_nA_{1n})+(c_1A_{11}+c_2A_{12}+\cdots+c_nA_{1n}) \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) 若第 i 行为 $b_1+c_1, b_2+c_2, \cdots, b_n+c_n$，则

$$
\text{左边} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.
$$

由归纳法 $\quad A_{11}=A'_{11}+A''_{11}; A_{12}=A'_{12}+A''_{12}, \cdots, A_{1n}=A'_{1n}+A''_{1n}$，

则 $\quad (a_{11}A'_{11}+a_{12}A'_{12}+\cdots+a_{1n}A'_{1n})+(a_{11}A''_{11}+a_{12}A''_{12}+\cdots+a_{1n}A''_{1n})$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

注意 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$，而有

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

定理 1.2.5 将行列式 D 的某一行(列) 的 k 倍加到另一行(列) 上，D 的值不变.

证明

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.2.1　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=D_1+D_2$,

其中 D_1 中二、三行成比例,故 $D_1=0$;而

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 11 & -7 \end{vmatrix}=-70.$$

所以　　$D=-70$.

例 1.2.2　证明:若行列式的某一行(列)是其余各行(列)的元素分别乘以一个数再加起来所得到的,则该行列式为 0.

证明　不妨设最后一行是前面 $n-1$ 行分别乘以一个数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_{n-1}a_{n-1\,1} & k_1a_{12}+k_2a_{22}+\cdots+k_{n-1}a_{n-1\,2} & \cdots & k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_{n-1}a_{n-1\,n} \end{vmatrix},$$

则将第 1 行乘以 $-k_1$,第 2 行乘以 $-k_2$,…,第 $n-1$ 行乘以 $-k_{n-1}$ 后均加到第 n 行,得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$$

习题 1.2

1. 举例说明 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ 一般情况不成立.

2. 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

3. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，计算 $D' = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}+3a_{12} & a_{11}-a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}+3a_{22} & a_{21}-a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}3+a_{32} & a_{31}-a_{33} \end{vmatrix}$.

4. 利用行列式的性质计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 300 & 500 & 200 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & -5 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 120 & 112 & 96 \\ 20 & 12 & -4 \\ 24 & 16 & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 3 \\ 3 & \lambda+2 & 3 \\ 3 & 3 & \lambda+2 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \end{vmatrix}$.

5. 求方程 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$ 的根.

6. 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

7. 若行列式 D 满足 $a_{ij} = -a_{ji}$. $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 为反对称行列式. 证明奇数阶反对称行列式等于零.

1.3 行列式的计算

上一节讨论了行列式的若干性质，现在就来运用这些性质计算行列式.

由行列式的性质可以看出，通过反复使用行列式的性质能把其中的元素化简，特别地可

以将某些元素化为零，且其值不变. 在第一节中由定义直接推知上三角形行列式的值等于其主对角线元素的乘积，于是就可以将一个行列式化为上三角形来计算.

那么是否任意一个行列式都可以化为上三角形行列式呢?回答是肯定的，只须反复应用行列式的性质即可证明，故将证明留作练习.

例 1.3.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\-2&1&2&-1\\0&2&-4&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解　$$D\xlongequal[-1\times(1\text{行})+(4\text{行})]{2\times(1\text{行})+(2\text{行})}\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-2&1\\0&2&-4&1\\0&2&5&3\end{vmatrix}\xlongequal[-2\times(2\text{行})+(4\text{行})]{-2\times(2\text{行})+(3\text{行})}\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&-1\\0&0&9&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{交换 3 行与 4 行}}-\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-2&1\\0&0&9&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-[1\times1\times9\times(-1)]=9.$$

例 1.3.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}7&3&2&6\\8&-9&4&9\\7&-2&7&3\\5&-3&3&4\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{-1\times(4\text{列})+(1\text{列})}\begin{vmatrix}1&3&2&6\\-1&-9&4&9\\4&-2&7&3\\1&-3&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[-1\times(1\text{行})+(4\text{行})]{\substack{1\times(1\text{行})+(2\text{行})\\-4\times(1\text{行})+(3\text{行})}}\begin{vmatrix}1&3&2&6\\0&-6&6&15\\0&-14&-1&-21\\0&-6&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-1\times(2\text{行})+(4\text{行})]{-3\times(2\text{行})+(3\text{行})}\begin{vmatrix}1&3&2&6\\0&-6&6&15\\0&-4&-19&-66\\0&0&-5&-17\end{vmatrix}\xlongequal{-4\times(4\text{行})+(3\text{行})}\begin{vmatrix}1&3&2&6\\0&-6&6&15\\0&-4&1&2\\0&0&-5&-17\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{5\times(3\text{行})+(4\text{行})}\begin{vmatrix}1&3&2&6\\0&-6&6&15\\0&0&1&2\\0&0&0&-12\end{vmatrix}\neq1\times(-6)\times1(-12)\neq72.$$

例 1.3.3　计算行列式