研究生教材

应用泛函分析

龚怀云 寿纪麟 王绵森

西安交通大学出版社

研究生教材

应用泛函分析

龚怀云　寿纪麟　王绵森

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书共分四章:实分析概要;距离空间;巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子;泛函分析的基本定理与谱论初步。每章后均配有一定数量的难易适当的习题。

本书以实分析概要为导引,论述了泛函分析的基本内容,取材适当,重点突出,由浅入深,叙述清晰,概念的引入比较自然,注意从欧氏空间向抽象空间的过渡,便于自学。

本书是为高等工科院校有关专业研究生和高年级学生编写的,也可作为应用数学专业和高等师范院校有关理科专业的教学参考书。

应 用 泛 涵 分 析 (基 础 部 分)
龚怀云　寿纪麟　王绵森
责任编辑　　蒋　路
*
西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路 28 号　邮政编码:710049　电话:(029)2668315
西安新城区兴庆印刷厂印装
各地新华书店经销
*
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:7.5　字数:183 千字
1985 年 12 月第 1 版　1995 年 1 月第 7 次印刷
印数:14 001～15 000
ISBN 7-5605-0244-X/O·47　　定价:9.00 元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的，因此在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样的高层次教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

序　言

"泛函分析"是现代数学的一个重要分支。随着科学技术的迅速发展，泛函分析的概念和方法不但已经渗透到数学的许多分支，而且日益广泛地被应用于自然科学、工科技术理论和社会科学的各个领域，成为从事这些领域研究工作的专家和学者的必要的数学基础。

近年来，我国许多高等院校陆续为自然科学和工程技术有关专业的研究生和高年级学生开设了"应用泛函分析"课程。虽然，目前国内已出版了不少有关泛函分析方面的教科书、专译著，然而，它们大都是为数学系的学生和研究生编写的，内容较多，要求较高。人们一直希望有一本适用于理工科院校非数学系的学生和研究生的教材，现在出版的《应用泛函分析(基础部分)》就是这方面的一个有意义的尝试。

作者均曾多次为数学系和工科有关专业讲授"泛函分析"课程，具有较丰富的教学经验，本书就是他们在为研究生讲授"应用泛函分析"课程所用讲义的基础上改编而成的。作者用不太大的篇幅介绍了泛函分析的基本概念和基本方法。考虑到非数学专业的读者的数学基础，书中第一章介绍了数学分析和实变函数的一些必要的基本知识。本书取材适当，重点突出，叙述也比较清楚，很多概念的引入和讲解深入浅出，通俗易懂。每章之后均配备了一定数量难易适当的习题，便于教学和读者自学。

本书不仅可作高等院校理工科有关专业研究生和高年级学生的教材，而且也可作为应用数学专业学生的教学参考书。对于高等工科院校有关专业的教师和工程技术人员不也失为一本有价值的参考书。

游兆永

1985年10月于西安交通大学

编者的话

泛函分析是本世纪初开始发展起来的一个重要数学分支，直到30年代才正式成为一门独立的学科，它是以集合论为基础的现代分析的一个基本组成部分。60年代以后，不仅泛函分析本身在理论上有了深入的发展，更值得注意的是，它在物理、力学、系统与控制理论、电波通讯、军事工程甚至经济理论等许多领域中都获得广泛的应用，已经成为研究自然科学与工程技术理论不可缺少的数学基础。

在我国，为非数学系的理工科有关专业研究生和高年级学生开设这门课程还是80年代的事，西安交通大学从1983年开始将这门课程列入教学计划。本书就是作者在为讲授这门课程所编写的讲义的基础上修改而成的。考虑到本书读者主要是非数学系的理工科研究生和高年级学生，因而只要求读者具备《高等数学》和《线性代数》的基础知识。为了弥补数学分析和实变函数方面的知识的不足，我们在第一章——实分析概要中简要地介绍了这方面的一些基本内容，它们对学习泛函分析是不可缺少的。在第二、三章中介绍了泛函分析的三大空间——距离空间、巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子理论中最基本的内容。我们把著名的泛函分析的三大基本定理——汉恩-巴拿赫定理的严格证明，一致有界定理、逆算子定理以及弱收敛、谱论初步等内容都集中在第四章中。本书的前三章是基本的必学内容，对于具备实变函数论知识的读者可直接从第二章学起，而对那些不要求谱论知识或在泛函分析理论上要求不高的读者只需选学第四章中的部分内容。

由于泛函分析有广泛的应用，内容比较丰富，所以本书的应用部分在取材和编排方面都有不少技术问题需要考虑。我们希望在今后教学实践的基础上认真总结，再奉献给读者。

承蒙陕西省数学学会理事长、西安交通大学数学系主任游兆永教授为本书作序，南京大学数学系马吉溥副教授主审本书，并提出不少宝贵的修改意见，作者对他们表示衷心的感谢。

限于我们的学识水平，书中不妥之处在所难免，恳请专家、读者不吝指正。

1985 年 10 月

目　　录

第一章 实分析概要

本章将简要地介绍数学分析与实变函数的一些基本知识，特别是点集的勒贝格(Lebesgue)测度与勒贝格积分理论。这些知识不仅是学习泛函分析的必要准备，而且在数学及其他学科中有直接的应用。

第一节 集合及其运算

§1.1 集合的概念

集合是数学的一个基础概念，它已被广泛地应用于现代数学的各个领域。

在日常生活中，集合的概念几乎是不言而喻的。例如，象某班学生的全体，某车间车床的全体，某百货商店现有商品种类的全体等都可以看成集合。自然数的全体，有理数的全体，实数的全体等都是数的集合。但是，正如几何学中的“点”与“直线”一样，要给集合下一个精确的数学定义，却并非轻而易举的事。今后，我们不去研究集合的严格定义，而把**集合**（或**集**）看成是具有某种确定性质的事物的全体，组成集合的那些个别事物称为集合的**元素**（或**元**）。下面再举几个集合的例子。

例1.1 在二维平面上，单位圆C：$x^2+y^2=1$上的点的全体构成一个集合，它的元素是圆周上的点。

例1.2 以有理数为系数的多项式的全体构成一个集合，记作P，它的元素是有理系数多项式。

例1.3 闭区间$[a, b]$上的连续函数的全体构成一个集合，记作$C[a, b]$，它的元素是$[a, b]$上的连续函数。

例1.4 直线上所有开区间(a, b)也构成一个集合，它的元素就是开区间。

应当注意的是，今后我们每给出一个集合，必须同时指明集合中的元素所具有的"确定性质"，使我们能够根据这种性质去判断哪些是集合中的元素，哪些不是。例如，某班高个子同学的全体就不能构成一个集合，因为"高个子"这个性质是不确定的，含糊不清的。

通常，用大写英文字母A，B，C，……表示集合，用小写英文字母a，b，c，……表示集合的元素。

设A是一个集合，若x是A的一个元素，我们就说x**属于**A，记作$x\in A$；若x不是A中的一个元素，我们就说x**不属于**A，记作$x\overline{\in} A$。

由有限个元素组成的集合，称为**有限集**。如方程$x^2-1=0$的所有解就是一个有限集。不含任何元素的集合称为**空集**，记作ϕ。如方程$x^2+1=0$的实数解的全体是一个空集。既不是空集又不是有限集的集合称为**无限集**。如例1.1到例1.4中的集合都是无限集，无限集是我们今后研究的主要对象。

设A是一个集合，如果能列出它的所有元素，我们就用一个花括号把它的元素全部写在里面来表示这个集合。例如，方程$x^2-1=0$的解集合可以表示为$S=\{-1, 1\}$，自然数的集合可以表示为$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$。然而，很多无限集不能用这种方法来表示，通常采用下面的表示方法。若A是具有某种确定性质$P(x)$的元素x所构成的集合，我们用

$$A=\{x \mid x\text{具有性质}P(x)\}$$

来表示它。例如，例1.2中的集合P可以表示为

$$P=\{p(t) \mid p(t)\text{为有理系数多项式}\}$$

例1.3中的集合$C[a, b]$可以表示为

$$C[a, b]=\{x(t) \mid x(t)\text{为}[a, b]\text{上的连续函数}\}$$

下面讨论集合之间的关系。

设A与B是两个集合，如果集A中的每个元都属于集B，那么，称A是B的**子集**，记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作A**包含**在B中或B**包含**A。例如，自然数集N是实数集R的一个子集。如果$A\subset B$，并且至少存在B的一个元x不属于A，就称A是B的**真子集**。对于任何集合A，显然有$A\subset A$，并且规定$\phi\subset A$。如果$A\subset B$，并且$B\subset A$，则称A与B**相等**，记作$A=B$。相等的两个集合具有完全相同的元素。例如，

$$\{x|x\in R,\ x^2-4\geqslant 0,\ x^2-4x<0\}=[2,\ 4)$$

§1.2 集合的运算

设A与B是两个集合。由集A与集B的所有元素构成的集合称为A与B的**并（或和）集**，简称为A，B的**并（或和）**，记作$A\cup B$。可以直观地将两个集A与B的并表示如图1.1(a)，也可以用上面讲的方法将它表示为

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\} \tag{1.1}$$

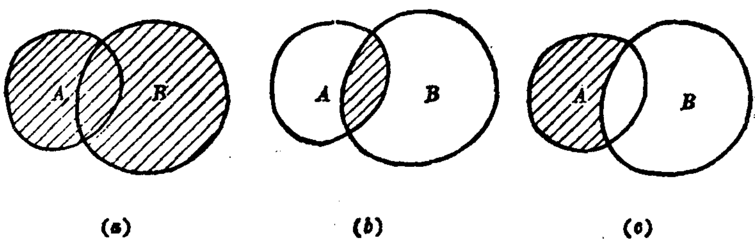

图 1.1

由同时属于集A与集B的元的全体构成的集合称为A与B的**交（或通）集**，简称为A，B的**交（或通）**，记作$A\cap B$（图1.1(b)），

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\} \tag{1.2}$$

由属于集A但不属于集B的元的全体构成的集合称为A与B的**差集**，记作$A\setminus B$（图1.1(c)），

$$A\setminus B=\{x|x\in A\text{但}x\notin B\} \tag{1.3}$$

若$B\subset A$，则称差集$A\setminus B$为**B关于A的余(或补)集**，记作$\mathscr{C}_A B$。今后，所讨论的集合往往都是某个**基本集X**的子集，就简单地把差集$X\setminus A$叫做A的**余（或补）集**，记作$\mathscr{C}A$或A^c。

若$A\cap B=\phi$，我们就说A与B**不相交**；若$A\cap B\neq\phi$，就说A与B**相交**。

由上述有关概念的定义，不难证明：

1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

2) $A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$；

3) 若$A\subset B$，则$A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A\setminus B=\phi$；

4) 设X为基本集，则

$$A\cup\mathscr{C}A=X,\quad A\cap\mathscr{C}A=\phi$$

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A,\quad A\setminus B=A\cap\mathscr{C}B$$

又若$A\subset B$，则$\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$.

集合的运算满足与实数运算相似的法则：

交换律 $A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$

上述运算法则都可以用图形直观地加以验证。但是，我们决不能把图形的示意作为数学定义或者定理的证明。在集合论中，证明集合运算等式通常是根据集合的包含、相等、并、交、差（余）等有关概念的定义，采用严密的逻辑推理方法来进行的。下面，以证明分配律的第一个等式为例来说明这种方法，读者可以用同样的方法去证明其他的等式。

例1.5 证明$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

证 先证明包含关系：

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

设 $x\in(A\cup B)\cap C$，则 $x\in(A\cap B)$，且 $x\in C$。从而 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\in C$。这就是说，$x\in A$，且 $x\in C$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$，故 $x\in A\cap C$，或 $x\in B\cap C$，所以 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

再证明相反的包含关系：

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$$

设 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则 $x\in A\cap C$，或 $x\in B\cap C$。从而 $x\in A$ 且 $x\in C$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$。这就是说，$x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\in C$。故 $x\in A\cup B$ 且 $x\in C$，因此 $x\in(A\cup B)\cap C$。

根据两个集合相等的定义，综合上述两个方面，即知所要证明的结论成立。

集合的并与交的概念还可以推广到由任意多个（有限多或无限多）集合所组成的集族的情形。设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是一个集族，其中 α 为集合的指标，它在指标集 I 中变化，这族集合的并与交分别定义为：

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\text{存在 }\alpha\in I,\text{ 使 }x\in A_\alpha\} \tag{1.4}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\text{对一切 }\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\} \tag{1.5}$$

最后，我们介绍集合论中的一个重要定理，通常称为**笛摩根**(De.Morgen)**对偶原理**。它提供了一个很有效的方法，使我们可以将已经证明的关于集合的某种性质转移到它的余集上去。

定理1.1　设 X 为基本集，$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 为任一集族，则

1) $\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)$；　(1.6)

2) $\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)$　(1.7)

这就是说，集族的并的余集等于每个集的余集的交；而集族的交的余集等于每个集的余集的并。

证　为了叙述简单起见，我们用"$P_1\Rightarrow P_2$"表示由命题 P_1 推出命题 P_2。

1) $x\in\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)\Rightarrow x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow$对于每个 $\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha\Rightarrow$ 对

于每个 $\alpha\in I$，$x\in\mathscr{C}A_\alpha\Rightarrow x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)$

因此我们有

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)$$

显然，上述推理可以反方向进行，因此，相反的包含关系也成立，故 1) 中等式成立。

2) 根据 1)

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha))=\bigcap_{\alpha\in I}(\mathscr{C}\mathscr{C}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$$

因此，

$$\bigcup_{\alpha\in I}(\mathscr{C}A_\alpha)=\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$$

值得指出的是，在这个定理的第二部分的证明中，使用了一种比较简捷的方法，就是利用集合运算的各种法则（如交换律，结合律，分配律，对偶原理等）以及证明过的集合运算等式直接进行运算推理。下面再举一个采用这种证明方法的例子，请读者注意学会应用。

例1·6 证明 $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

证
$$\begin{aligned}A\setminus(A\setminus B)&=A\cap\mathscr{C}(A\setminus B)=A\cap\mathscr{C}(A\cap\mathscr{C}B)\\&=A\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}\mathscr{C}B)=A\cap(\mathscr{C}A\cup B)\\&=(A\cap\mathscr{C}A)\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

第二节　实数的完备性

实数的完备性不但是数学分析的理论基础，而且是泛函分析中各种抽象空间的空间性质的丰富源泉。本节将介绍实数的完备性以及与其有关的概念，特别是刻划实数完备性的六个等价定理，并证明它们的等价性。

§2.1　有理数的稠密性

所谓**有理数**，是指一切形如 p/q（其中 p 与 q 均为整数，

$q>0$，并且 p 与 q 互质）的数，或者等价地说，是指一切循环小数。有理数的全体称为**有理数系**或**有理数集**，今后用 Q 来表示它。

显然，任何有理数都可以由数 1 经过有理运算（即加、减、乘、除四则运算）得到，并且对任意两个有理数施行有理运算后仍得到有理数，就是说，有理数对有理运算是封闭的。

但是，无论是从实际度量各种几何量或物理量来看，还是从数学运算本身的需要来看，有理数系都是远远不够用的。人们早就发现，单位正方形的对角线的长（即方程 $x^2=2$ 的解）就不能用有理数来表示，因此提出了无理数的概念。所谓**无理数**，是指一切无限非循环小数，象 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π 等都是无理数。有理数和无理数统称**实数**。实数的全体称为**实数系**或**实数集**，用 R 表示。

有理数系的一个重要性质是它在实数系中的**稠密性**，就是说，任何实数都能用有理数任意逼近。换句话说，对任意一个实数 x，总能找到一个有理数 r，使得 $|x-r|$ 小于任意给定的正数 ε。事实上，假定 x 在数轴 L 上对应于点 M，先用整数点将数轴 L 等分为一系列单位区间，则点 M 或者是某单位区间的端点（这表明 x 是整数，此时结论自然成立），或者是单位区间内部的点。在后一种情况下，再将每个单位区间 q 等分，则数轴 L 被分割为一系列长度为 $\frac{1}{q}$ 的小区间，小区间的端点都是有理点 p/q。于是 M 或者是小区间的端点（这表明 x 是有理数 p/q，此时结论自然成立），或者在两个相邻的有理点 p/q 与 $(p+1)/q$ 之间（图 1.2），即

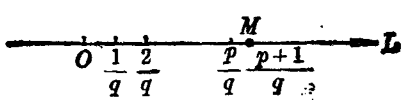

图 1.2