GAODENG ZHIYE JIAOYU

高等职业教育课程改革示范教材

冯 宁◎主编

高等数学（基础）

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

高等数学(基础)

主　　编　冯　宁
编写人员　杨晓春　庄小红
　　　　　郝　耘　肖劲军

南京大学出版社

内容简介

本书是高等职业教育课程改革示范教材之一，同时也是江苏省高等学校立项建设精品教材. 教材分基础模块和应用模块，基础模块满足工科专业一般需求，应用模块满足工科专业特殊需求. 基础模块内容包括一元微积分、微分方程、数学软件等，应用模块内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数、拉普拉斯变换、线性代数初步、概率统计初步、数值计算初步等.

本书针对高技能应用型人才培养目标的特点，在教学内容的安排上，遵循"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，以"理解基本概念、掌握基本运算方法及应用"为依据，结合教育部制定的"高职高专高等数学课程教学的基本要求"及数学教学的实践经验进行编写. 在教学内容的处理上，尽可能借助直观的几何图形、物理含义和实际背景阐述概念、定理和公式，适度论证，突出微积分的基本思想和方法，注重阐明数学的实际应用价值.

本书可作为高职高专工科各专业通用数学教材，也可作为工程技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(基础) / 冯宁主编. —南京：南京大学出版社，2007.8

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-05089-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 冯… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 127086 号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮编　210093
网　　址　http://press.nju.edu.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　高等职业教育课程改革示范教材
书　　名　高等数学(基础)
主　　编　冯　宁
责任编辑　吴　华　　编辑热线　025-83592146

照　　排　南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷　南京大学印刷厂
开　　本　787×1 092　1/16　印张 12.25　字数 301 千
版　　次　2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数　1～9 000
ISBN　978-7-305-05089-3
定　　价　18.80 元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
　　　　　nupress1@public1.ptt.js.cn

高等职业教育课程改革示范教材
《高等数学》指导委员会

顾　　问　王　煌　王兆明

主任委员　南通职业大学副校长　陈家颐

副主任委员(排名不分先后)

盐城卫生职业技术学院党委书记兼院长　王光文
扬州环境资源职业技术学院院长　徐汝琦
南京信息职业技术学院副院长　王钧铭
常州机电职业技术学院副院长　郝　超
常州工程职业技术学院副院长　陈炳和
江苏海事职业技术学院副院长　曹志平
常州轻工职业技术学院副院长　王志平
常州纺织服装职业技术学院副院长　贺仰东
连云港师范高等专科学校副校长　陈留生
无锡工艺美术职业技术学院副院长　邵汉强
无锡商业职业技术学院副院长　沈书林
苏州拓普信息技术学院副院长　任祥生
硅湖职业技术学院副院长　黄月琼
南京工业职业技术学院副院长　林　苏
扬州职业大学副校长　张　泰
苏州职业大学副校长　程宜康
南京大学出版社社长兼总编　左　健

前　言

为了适应新的职业教育人才培养要求，南京大学出版社根据教育部组织制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”和“高职高专人才培养目标及规格”，组织规划了有关高职院校进行了多次研讨，在继承原有教材建设成果的基础上，充分吸取了近年来一些高职院校基础课程教学改革的经验，组织编写了一批“高等职业教育课程改革示范教材”. 本书是其中数学版块的教材之一. 这些教材淡化了理论推导和证明，突出了职业教育改革特色，难易程度适合现在高职院校的生源状况.

本书在编写过程中，遵循“注意课程衔接，面向专业需求，淡化理论推导，融入建模思想，注重应用能力，强化学习目标”的原则，力求突出如下特点：

1. 注意与相关课程的衔接，适当补充后续课程的必要知识(如复数)，做好内容的跳跃处理.

2. 面向专业需求，设计选学模块，供不同专业选用，满足工科专业的特殊需求.

3. 淡化理论推导，针对高职学生的数学基础，淡化数学概念和定理的严格表述，适度论证，不过分追求理论上的系统性和逻辑性，力求使基本概念、基本定理直观化、具体化，有些比较深的内容用“*”表示，可供选学.

4. 在每节开头，从案例入手，力求创造有利于学生发现知识的问题情境，激发学习兴趣，使重要知识点的引入更为朴实、简明和自然，结合具体内容进行数学建模训练，帮助学生获得正确的数学思想方法.

5. 注重应用能力，加强了数学知识在工程技术方面的具体应用，注意与后续课程的衔接，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点.

6. 在每节前增加了学习目标，每章后增加了小结与复习的内容，帮助学生总结重要结论和解题方法，有利于高职学生快速提高运算技能，并起到释疑解难的作用. 每节后都配有课堂练习、课后习题等，以帮助学生课前预习和课后复习.

7. 专设一章“数学软件简介”,用 MATLAB 解决微积分的有关计算,以培养学生运用计算机及相应数学软件求解数学模型的能力,供有条件的院校选用.

本书教学时数建议如下:

序号	内容	课时	课时分配		
			讲授	习题课	上机
1	预备知识	4	4		
2	函数的极限与连续	12	10	2	
3	一元函数微分学	18	16	2	
4	一元函数积分学	22	18	4	
5	常微分方程	8	6	2	
6	数学软件简介	6			6
	机动	2			
	合计	72	54	10	6

本教材分为基础模块与应用模块(《高等数学(应用)》将于 2008 年 2 月出版),参加教材编写的有冯宁(常州轻工职业技术学院)、杨晓春(常州纺织服装职业技术学院)、庄小红(常州机电职业技术学院)、郝耘(常州工程职业技术学院)、肖劲军(常州轻工职业技术学院).教材统稿、定稿工作由冯宁承担.

编　者

2007 年 5 月

目　录

第1章　预备知识

本章主要介绍极坐标方程及复数的有关知识，这些都是数学应用中最基础的知识.

§1.1　极坐标方程

学习目标

1. 了解极坐标系.
2. 会进行极坐标方程与直角坐标方程的互化.
3. 知道常见曲线的极坐标方程.

引入案例

雷达站给炮兵指示射击目标时，用直角坐标就不方便，通常是指出目标的方向和距离(如图 1 - 1)来确定点的位置. 这种利用方向和距离来描述点的位置的方法就是极坐标.

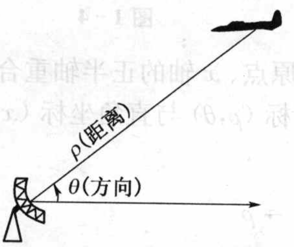

图 1 - 1

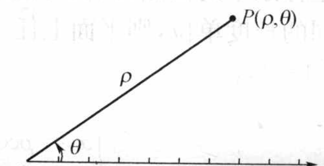

图 1 - 2

主要知识

一、极坐标系

1. 极坐标系的建立

如图 1 - 2 所示，在平面上任取一点 O，由 O 引射线 Ox，并取定一个长度单位和角的正方向(一般取逆时针方向)，这样就在平面上建立了一个**极坐标系**. 称 O 为**极点**，射线 Ox 为**极轴**.

对于平面上任意一点 P，连接 OP，令 $OP=\rho$，以 Ox 为始边，OP 为终边的角度为 θ，则

称有序数对 (ρ,θ) 为 P 点的极坐标,称 ρ 为 P 点的**极径**,θ 为 P 点的**极角**.

2. 极坐标 (ρ,θ) 与点 P 的关系

(1) 已知极坐标 (ρ,θ),可以在平面上唯一地确定一点 P 与它对应.

(2) 已知平面上一点 P,则极坐标不唯一. 一般地,如果 (ρ,θ) 是 P 点的一个极坐标,则 $(\rho,\theta+2k\pi)$ 和 $(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)(k\in\mathbb{Z})$ 都是 P 点的极坐标. 极点的坐标为 $(0,\theta)$,其中 θ 为任意角. 因此,在给定的极坐标系中,点与它的极坐标不是一一对应的,这与直角坐标系不同.

(3) 如果规定:$\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$,则极坐标 (ρ,θ) 与平面上的点 P(除极点外)就建立了一一对应的关系. 所以,在确定一点的极坐标时,往往也会限定 ρ,θ 的取值范围.

例 1.1.1 在极坐标系中,作出 $A\left(2,\frac{\pi}{4}\right),B\left(3,\frac{2\pi}{3}\right),C\left(4,-\frac{\pi}{4}\right),D\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的点.

解 如图 1-3 所示,过极点 O 作射线 OA,使 $\angle xOA=\frac{\pi}{4}$,在射线 OA 上取点 A,使 $|OA|=2$,则点 A 即为极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ 的点. 类似地可作点 B,C,D.

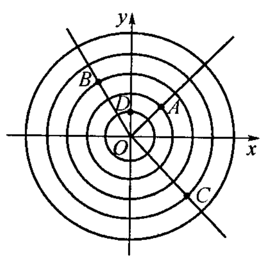

图 1-3

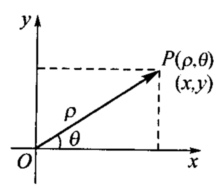

图 1-4

若极坐标系中的极点、极轴与直角坐标系中的原点、x 轴的正半轴重合,并在两种坐标系中取相同的长度单位,则平面上任一点 P 的极坐标 (ρ,θ) 与直角坐标 (x,y) 之间有如下关系(如图 1-4):

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases},\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)\end{cases}. \qquad (1-1)$$

二、曲线的极坐标方程

在极坐标系中,一条曲线用含变量 ρ,θ 的方程 $F(\rho,\theta)=0$ 来表示,这种方程称为曲线的**极坐标方程**.

1. 极坐标方程与直角坐标方程互化

例 1.1.2 将 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$ 化为直角坐标方程.

解 因为 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$, 得

$$\frac{1}{2}\rho\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=3,$$

由(1-1)式可知,所求直角坐标方程为

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=3,$$

即

$$x+\sqrt{3}y-6=0.$$

例 1.1.3 将 $x^2+y^2=2y$ 化为极坐标方程.

解 由(1-1)式得

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2\rho\sin\theta,$$

$$\rho^2=2\rho\sin\theta,$$

于是,所求圆的极坐标方程为

$$\rho=2\sin\theta(\rho=0\text{ 已含在此方程内}).$$

2. 极坐标方程的建立

求曲线的极坐标方程的方法和步骤与求直角坐标方程类似,即把曲线看成适合某种条件的点的集合或轨迹,将已知条件用曲线上点的极坐标 ρ 和 θ 的关系式 $F(\rho,\theta)=0$ 表示出来,从而得到曲线的极坐标方程.

例 1.1.4 求过极点,圆心在极轴上,半径为 a 的圆的极坐标方程.

解 由题设,圆心为 $B(a,0)$. 除极点外,圆与极轴的另一个交点为 $A(2a,0)$,显然 $|OA|=2a$(如图 1-5).

设圆上任意一点为 $P(\rho,\theta)$,连接 OP 和 PA,则 $PA\perp OP$. 在 Rt$\triangle OPA$ 中,有

$$|OP|=|OA|\cos\angle POA,$$

即 $\rho=2a\cos\theta$.

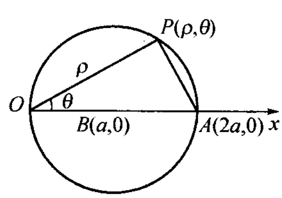

图 1-5

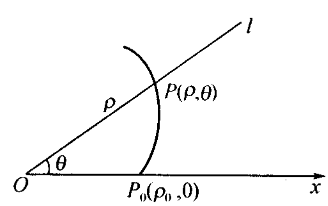

图 1-6

例 1.1.5 一个动点沿一条射线作等速直线运动,同时射线绕端点作等角速旋转,该动点的轨迹称为等速螺线. 求等速螺线的极坐标方程.

解 如图 1-6 所示,以射线 l 的端点为极点,射线的初始位置为极轴,建立极坐标系.

设曲线上动点为 $P(\rho,\theta)$,动点 P 的初始位置为 $P_0(\rho_0,0)$,P 在 l 上运动的速度为 v,l 绕 O 旋转的角速度为 ω. 由等速螺线的定义,得参数方程

$$\begin{cases}\rho=\rho_0+vt\\ \theta=\omega t\end{cases}.$$

消去参数 t,得

$$\rho=\rho_0+\frac{v}{\omega}\theta,$$

令 $\frac{v}{\omega}=a$（v,ω 均为已知常数)，则得等速螺线的极坐标方程为

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

在机械传动中等速螺线的应用较广.例如，等速凸轮的轮廓曲线就是等速螺线，它可以把旋转运动转化为直线运动.再如，机床夹具三爪卡盘的平面螺纹也是等速螺线.

三、极坐标方程的作图

通常采用描点法.

例 1.1.6 描绘方程 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的图像.

解 由于 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，所以曲线关于极轴对称.

将 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）与 ρ 的对应值列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$2a$	$1.87a$	$1.71a$	$1.5a$	a	$0.5a$	$0.29a$	$0.13a$	0

用平滑曲线将 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 区间内的点顺次连接，由对称性可得所给方程的图像(如图 1-7).

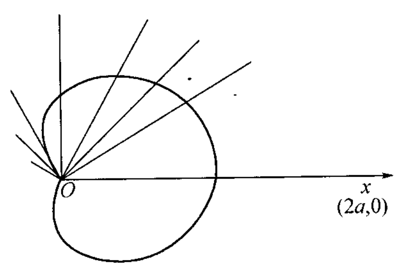

图 1-7

练习 1.1

1. 在极坐标系中作出下列各点：

(1) $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $B\left(3,-\frac{2\pi}{3}\right)$；　(3) $C\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$；　(4) $D(1,\pi)$.

2. 将下列直角坐标方程化为极坐标方程：

(1) $x=1$；　(2) $2x-y=0$.

3. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程：

(1) $\rho=1$；　(2) $\theta=\frac{\pi}{4}$.

习题 1.1

1. 在极坐标系中作出下列各点：

(1) $A(0,\pi)$；　(2) $B\left(-3,\frac{3\pi}{2}\right)$；　(3) $C\left(1,-\frac{\pi}{2}\right)$；　(4) $D(2,0)$.

2. 将下列直角坐标方程化为极坐标方程：

(1) $y+2=0$；　(2) $xy=4$；　(3) $x^2+y^2-6x=0$.

3. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程：

(1) $\rho=4\cos\theta$；　(2) $\rho^2\sin2\theta=2a^2$；　(3) $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a$.

4. 求圆心在 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，半径为 2 的圆的极坐标方程.

5. 描绘方程 $\rho=2(1+\sin\theta)$ 的图像.

§ 1.2 复　数

学习目标

1. 了解复数的概念.
2. 会进行复数代数式的四则运算.
3. 会进行复数三角形式、指数形式、极坐标形式的乘、除运算.
4. 会求实系数一元二次方程的复数解.

引入案例

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac<0$ 时，没有实数根. 为解决这一问题，需要把实数集进一步扩充.

主要知识

一、复数的概念

1. 虚数单位

为了解决负数不能开平方的问题，引入了一个新数 i，叫做**虚数单位**，并规定：

(1) $i^2=-1$；

(2) i 与实数在一起，可以按照实数的四则运算法则进行运算.

根据上述规定，$\pm i$ 就是 -1 的平方根. 因此，当引进虚数单位 i 后，方程 $x^2=-1$ 有解：$x=\pm i$.

关于虚数单位 i，显然有

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\cdots$$

一般地，当 $n\in\mathbb{N}_+$，有

$$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1.$$

规定：
$$i^0=1, i^{-n}=\frac{1}{i^n}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

2. 复数

形如 $a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$) 的数称为复数. 其中 a 称为实部, b 称为虚部. 复数通常用字母 z 表示,即 $z=a+bi$. 把复数表示成 $a+bi$ 的形式,称为复数的**代数式**.

(1) 当 $b=0$ 时,复数 $a+bi$ 就是实数 a;

(2) 当 $b\neq 0$ 时,复数 $a+bi$ 称为虚数,此时若 $a=0$, 复数 bi 称为纯虚数.

可见,复数包含了所有的实数和虚数. 这样,数集就从实数集 $\mathbb{R}$ 扩充到了复数集 $\mathbb{C}$.

例如, $2+3i$, $-1-\sqrt{2}i$, $-0.5i$ 都是虚数,它们的实部分别是 $2,-1,0$, 虚部分别是 3, $-\sqrt{2}$, -0.5, 其中 $-0.5i$ 是纯虚数.

对于复数 $z=a+bi$, 还有以下规定:

(1) 如果两个复数的实部和虚部分别相等,则称这两个**复数相等**,即

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c, b=d.$$

(2) 两个复数的实部相等、虚部互为相反数,则称这两个复数互为**共轭复数**,记作 $\bar{z}$, 即 $z=a+bi$ 的共轭复数为 $\bar{z}=a-bi$.

(3) 两个实数可以比较大小,两个不全是实数的复数不能比较大小. 例如, $1+i$ 与 $2+3i$ 不能比较大小.

二、复数的其他形式

由复平面图 1-8 可知,复数 $z=a+bi$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的;复平面内的点 $Z(a,b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 又是一一对应的,于是

$$\text{复数 } z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a,b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量}\overrightarrow{OZ}.$$

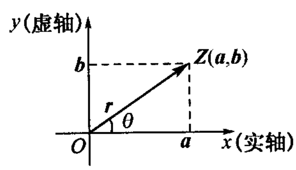

图 1-8

向量的模 $|\overrightarrow{OZ}|$ 也称为复数 z 的模(或幅值),通常用 r 表示,即

$$r=|\overrightarrow{OZ}|=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与实轴正方向的夹角 θ 称为复数 z 的幅角(或相位),非零复数的幅角有无穷多个,它们彼此相差 $k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 在电学中,将 $-180°<\theta\leqslant 180°$ 的幅角 θ 称为复数 z 的主幅角,可以用公式

$$\tan\theta=\frac{b}{a}\quad(a\neq 0)$$

确定其值,其中,θ 所在象限就是与复数相对应的点 $Z(a,b)$ 所在的象限.

由图 1-8 还可看出,$a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$,于是

$$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \quad (r\geqslant 0),$$

$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为复数的**三角形式**.由欧拉(Euler)公式 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,于是

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为复数的**指数形式**,其中幅角 θ 的单位只能是弧度.由复数三角形式可知,一个复数由它的模 r 和主幅角 θ 唯一地确定.为了简便,又引入符号 $r\underline{/\theta}$ 表示复数,即

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\underline{/\theta},$$

$r\underline{/\theta}$ 称为复数的**极坐标形式**.上述所有形式可以相互转化,即

$$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\underline{/\theta}.$$

例 1.2.1 在复平面内,作出表示下列复数的点,并求出它们的模和主幅角.

(1) i^{-1}; (2) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

解 (1) $\mathrm{i}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}, a=0, b=-1$,点 $(0,-1)$ 在虚轴上,如图 1-9 所示.

$$r=\sqrt{(-1)^2}=1, \theta=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) $a=\sqrt{3}, b=-1, \tan\theta=\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,点 $(\sqrt{3},-1)$ 在第四象限,如图 1-10 所示.

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2, \theta=-30^\circ.$$

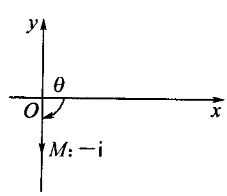

图 1-9

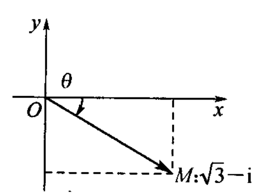

图 1-10

例 1.2.2 把复数 $\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 化为三角形式、指数形式和极坐标形式.

解

$$a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}, r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=-1.$$

点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 在第四象限,$\theta=-45^\circ$.所以,原式的三角形式为 $z=2[\cos(-45^\circ)+\mathrm{i}\sin(-45^\circ)]$,指数形式为 $z=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,极坐标形式为 $z=2\underline{/-45^\circ}$.

例 1.2.3 把复数 $3\underline{/150^\circ}$ 化为代数形式.

解 $r=3, \theta=150°$,

$$a=r\cos\theta=3\cos150°=-\frac{3\sqrt{3}}{2}, b=r\sin\theta=3\sin150°=\frac{3}{2},$$

所以,原式的代数形式为 $z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

三、复数的运算

设 z_1, z_2 是两个任意复数,复数的运算规定如下:

1. 复数的加法与减法

$$z_1 \pm z_2=(a_1 \pm a_2)+(b_1 \pm b_2)\mathrm{i}.$$

2. 乘法

$$z_1 \cdot z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

用三角形式表示
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

用指数形式表示 $z_1 \cdot z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.

用极坐标形式表示 $z_1 \cdot z_2=r_1\underline{/\theta_1} \cdot r_2\underline{/\theta_2}=r_1r_2\underline{/\theta_1+\theta_2}$.

结论 复数相乘就是把模相乘,幅角相加.

此结论,可推广到有限个复数相乘的情形.

3. 除法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2+b_2^2}(z_2 \neq 0).$$

用三角形式表示 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)](z_2 \neq 0)$.

用指数形式表示 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}(z_2 \neq 0)$.

用极坐标形式表示 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1-\theta_2}(z_2 \neq 0)$.

请读者自己导出.

结论 复数相除就是把模相除,幅角相减.

例 1.2.4 计算共轭复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 的和、差、积.

解
$$(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a;(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=2b\mathrm{i};$$
$$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-(b\mathrm{i})^2=a^2+b^2.$$

由上例可知,两个共轭复数的和是一个实数;当 $b \neq 0$ 时,两个共轭复数的差是一个纯虚数;两个共轭复数的积是一个实数.

例 1.2.5 计算 $\frac{1+3\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$，且把结果用极坐标形式表示出来.

解 原式$=\frac{(1+3\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{(2-4\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}=\frac{-10+10\mathrm{i}}{20}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=-1.$$

点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在第二象限，$\theta=135^\circ$. 所以，原式的极坐标形式为 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{/135^\circ}$.

例 1.2.6 计算 $\frac{2\underline{/-45^\circ}\times\sqrt{3}\underline{/-135^\circ}}{3\underline{/90^\circ}\times 2\underline{/-150^\circ}}$.

解 原式 $=\frac{2\times\sqrt{3}}{3\times 2}\underline{/-45^\circ-135^\circ-90^\circ+150^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}\underline{/-120^\circ}$.

例 1.2.7 如图 1－11 所示，电阻 $R=2\,\Omega$ 与电容 $C=10^{-3}$ F 串联在交流电路中，电源的瞬时电压为 $V=220\sqrt{2}\sin(314t+15^\circ)$ V，求电路中的瞬时电流.

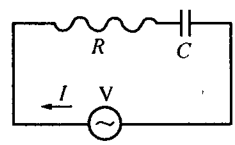

图 1－11

解 电路的复阻抗 $Z=R+Z_c=R-\frac{1}{\omega C}\mathrm{j}$ ① $=2-\frac{1}{314\times 10^{-3}}\mathrm{j}$

$$=2-3.18\mathrm{j}=3.76\underline{/-57.83^\circ}.$$

在正弦交流电路中(角频率不变)，电压可用复数表示为 $\dot{V}=220\sqrt{2}\underline{/15^\circ}$(称作向量形式)，由欧姆定律，得

$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{Z}=\frac{220\sqrt{2}\underline{/15^\circ}}{3.76\underline{/-57.83^\circ}}=58.5\times\sqrt{2}\underline{/72.83^\circ}.$$

因此，电路中的瞬时电流 $i(t)=58.5\times\sqrt{2}\sin(314t+72.83^\circ)$A.

四、在复数集内解实系数一元二次方程

前面已经知道，在复数范围内，$\sqrt{-1}=\pm\mathrm{i}$. 类似可推得，$\sqrt{-4}=\pm 2\mathrm{i}$，$\sqrt{-9}=\pm 3\mathrm{i}$，…. 一般地，当 $a>0$ 时，$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\mathrm{i}$. 对于实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0),$$

当 $b^2-4ac<0$ 时，

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-(4ac-b^2)}=\pm\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}.$$

① 在电学中，由于 i 表示电流，为区别起见，虚数单位用 j 表示.