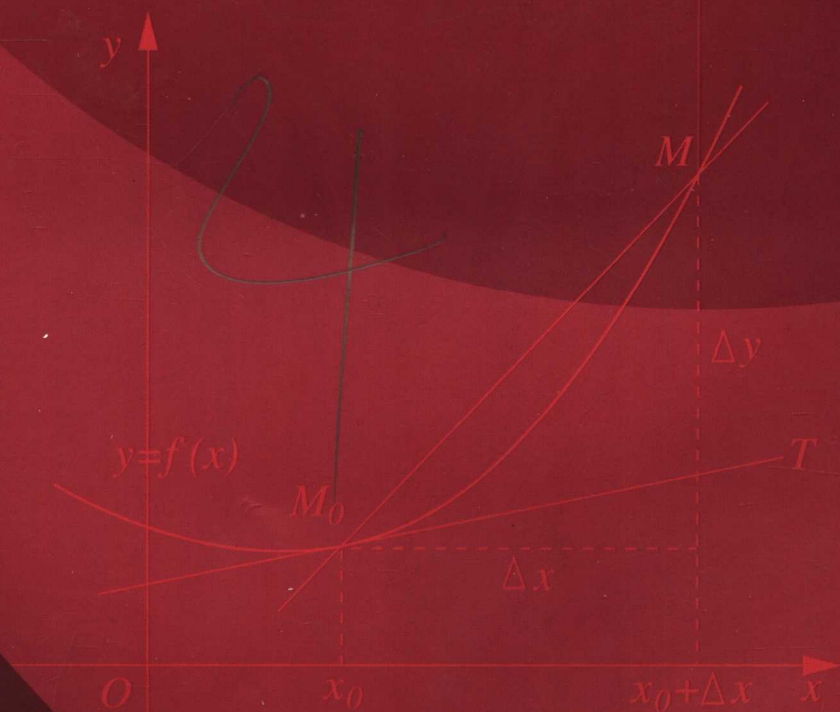


• 经济数学基础 •

# 微积分

严守权 主编



0172/223

2007

• 经济数学基础 •

# 微积分

严守权 主编

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/严守权主编.

北京:中国人民大学出版社,2007

经济数学基础

ISBN 978-7-300-08466-4

I. 微…

II. 严…

III. 微积分-高等学校-教材

IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 133567 号

经济数学基础

**微积分**

严守权 主编

---

**出版发行** 中国人民大学出版社

**社 址** 北京中关村大街 31 号

**邮政编码** 100080

**电 话** 010-62511242 (总编室)

010-62511239 (出版部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

**网 址** <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)

**经 销** 新华书店

**印 刷** 北京东方圣雅印刷有限公司

**规 格** 170 mm×228 mm 16 开本

**版 次** 2007 年 8 月第 1 版

**印 张** 25 插页 1

**印 次** 2007 年 8 月第 1 次印刷

**字 数** 461 000

**定 价** 29.00 元

---

**版权所有 侵权必究**

**印装差错 负责调换**

## 总 序

随着教学改革不断深入和办学规模的扩大,我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化,教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时,全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大,其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言,经过多年调整,实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化,适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点:作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程,《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲,融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围;突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练;内容完整紧凑,难度适中,便于组织教学,能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求 and 分级教学的需要,本套教材推出了《高级经济数学教程》分册,该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外,作为高等数学知识的进一步延伸和扩展,本套教材同时推出了《实用运筹学》分册,该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识,并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是,基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题,对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑,其中包括对教材中多数习题提供解答,以便于学生自习。另一方面,《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充,增加相当数量的研究生入学考试试题题型,力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面,帮助学生实现跨越,达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此,这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的

功能,将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成,绝大多数编者具有 20 年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历,还有许多人多年从事研究生入学考试数学考前辅导工作,有相当高的知名度。因此,作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度,以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验,这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道,一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助,我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006 年 10 月

## 前 言

本书参照经济学核心课程经济数学基础教学大纲和全国硕士研究生入学考试经济类考试大纲微积分部分编写而成,包括一元微积分学、级数、多元微积分学、微分方程、差分方程等,覆盖了大纲的基本内容,表述简洁、难度适中。每章配有习题,书末附有习题参考答案。同时,我们编写了与本教材配套的辅导书——《微积分学习指导》。辅导书除对教材中重点、难点作了深入浅出的讲解外,还针对硕士研究生入学考试数学试卷的题型特点和要求,增加了相当数量的典型例题,其中包括填空题和单项选择题。辅导书每章配有综合练习题和答案,有助于提高读者分析解决问题的能力,书后还附有教材所有习题的详解。

本书可作为高等学校经济和管理类专业数学基础课微积分的教材或教学参考书,配套的《微积分学习指导》可作为经济管理类硕士研究生入学考试备考用书。

本书由中国人民大学严守权负责编著,参加部分编写工作的有中国人民大学的赵晋和于长千同志。

中国人民大学林勇、赵国庆、张庆彩、张伦传、阳庆节,北京大学姚孟臣,清华大学胡金德等同志对教材的编写大纲、书稿内容、体例都提出了宝贵的意见,中国人民大学出版社有关编审人员认真审阅了书稿,也提出了不少改进意见,对此,我们一并表示感谢。

由于编者水平有限,编写时间较为仓促,教材中一定存在不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

严守权  
2007年7月

# 目 录

<b>第 1 章 函数</b> .....	(1)
§ 1.1 实数与实数集 .....	(1)
一、实数与数轴 .....	(1)
二、实数的绝对值及其性质 .....	(1)
三、区间与邻域 .....	(2)
§ 1.2 函数概念 .....	(3)
一、常量与变量 .....	(3)
二、函数概念 .....	(4)
三、函数表示法 .....	(5)
四、定义域 .....	(6)
五、分段函数 .....	(6)
§ 1.3 函数的几何特性 .....	(8)
一、单调性 .....	(8)
二、有界性 .....	(9)
三、对称性 .....	(9)
四、周期性 .....	(10)
§ 1.4 反函数与复合函数 .....	(11)
一、反函数 .....	(11)
二、复合函数 .....	(13)
§ 1.5 初等函数 .....	(14)
一、基本初等函数 .....	(14)
二、初等函数 .....	(17)
§ 1.6 经济函数举例 .....	(19)
一、供给函数与需求函数 .....	(19)
二、总成本函数、总收益函数与总利润函数 .....	(20)
习题一 .....	(22)
<b>第 2 章 极限与连续</b> .....	(26)
§ 2.1 数列的极限 .....	(26)
§ 2.2 函数的极限 .....	(29)

一、 $x$ 趋于无穷大时函数的极限 .....	(29)
二、 $x$ 趋向定点 $x_0$ 时函数的极限 .....	(32)
§ 2.3 函数极限的性质 .....	(34)
§ 2.4 无穷小量与无穷大量 .....	(35)
一、无穷小量与无穷大量的概念 .....	(36)
二、无穷小量的性质 .....	(37)
三、无穷小量阶的比较 .....	(38)
§ 2.5 极限运算法则和存在性定理 .....	(42)
一、极限运算法则 .....	(43)
二、极限存在性定理 .....	(46)
三、两个重要极限 .....	(49)
四、极限运算综合举例 .....	(53)
§ 2.6 函数的连续性 .....	(55)
一、函数连续性的概念 .....	(55)
二、连续函数的性质 .....	(57)
三、函数的间断点 .....	(58)
四、闭区间上连续函数的性质 .....	(59)
习题二 .....	(60)
<b>第 3 章 导数与微分</b> .....	(67)
§ 3.1 导数的概念 .....	(67)
一、导数的定义 .....	(67)
二、左导数与右导数 .....	(71)
三、导数与连续的关系 .....	(72)
四、导数的几何意义 .....	(74)
§ 3.2 导数的运算——公式与法则 .....	(75)
一、基本初等函数的导数和导数基本公式 .....	(76)
二、导数运算法则 .....	(77)
§ 3.3 隐函数的导数与高阶导数 .....	(83)
一、隐函数的导数 .....	(83)
二、高阶导数 .....	(84)
§ 3.4 微分 .....	(88)
一、微分的概念 .....	(88)
二、微分的几何意义 .....	(90)
三、微分法则与微分公式 .....	(91)



§ 3.5 导数概念在经济学中的应用	(94)
一、边际与边际分析	(94)
二、弹性与弹性分析	(95)
习题三	(97)
<b>第4章 中值定理与导数的应用</b>	<b>(104)</b>
§ 4.1 微分中值定理	(104)
一、罗尔定理	(104)
二、拉格朗日中值定理	(105)
三、柯西中值定理	(108)
§ 4.2 洛必达法则	(109)
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式定值法	(110)
二、其他类型的未定式定值法	(113)
§ 4.3 函数单调性判别法	(115)
§ 4.4 函数的极值与最值	(118)
一、函数的极值	(118)
二、函数的最大值和最小值	(122)
三、经济应用举例	(124)
§ 4.5 函数曲线的凹凸性及其判别	(127)
§ 4.6 函数作图	(130)
一、函数曲线的渐近线	(130)
二、函数作图	(132)
习题四	(134)
<b>第5章 不定积分</b>	<b>(140)</b>
§ 5.1 不定积分的概念和性质	(140)
一、原函数的概念	(140)
二、不定积分的概念	(141)
三、不定积分的性质	(142)
§ 5.2 基本积分公式	(144)
§ 5.3 换元积分法	(146)
一、第一换元积分法	(147)
二、第二换元积分法	(154)
§ 5.4 分部积分法	(158)
习题五	(165)

<b>第 6 章 定积分</b> .....	(168)
§ 6.1 定积分的概念和性质 .....	(168)
一、引入定积分概念的两个实例 .....	(168)
二、定积分的概念 .....	(170)
三、定积分的基本性质, 积分中值定理 .....	(172)
§ 6.2 微积分学基本定理 .....	(175)
一、变限积分函数及其性质 .....	(175)
二、微积分学基本定理 .....	(179)
§ 6.3 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	(181)
一、定积分的换元积分法 .....	(181)
二、定积分的分部积分法 .....	(185)
§ 6.4 积分学的应用举例 .....	(187)
一、定积分的微元法 .....	(187)
二、平面图形的面积 .....	(189)
三、旋转体的体积 .....	(193)
四、积分学在经济学中的应用举例 .....	(195)
§ 6.5 广义积分 .....	(197)
一、无穷积分 .....	(197)
二、瑕积分 .....	(202)
习题六 .....	(205)
<b>第 7 章 无穷级数</b> .....	(211)
§ 7.1 常数项级数的概念和性质 .....	(211)
一、常数项级数的概念 .....	(211)
二、级数的基本性质 .....	(214)
§ 7.2 正项级数敛散性的判别 .....	(218)
§ 7.3 任意项级数敛散性的判别 .....	(224)
一、交错级数的敛散性 .....	(224)
二、任意项级数的敛散性 .....	(226)
§ 7.4 幂级数 .....	(228)
一、函数项级数的概念 .....	(228)
二、幂级数及其收敛性 .....	(229)
三、幂级数在收敛域内的性质 .....	(233)
§ 7.5 函数的幂级数展开 .....	(235)
一、泰勒多项式与泰勒级数 .....	(236)

二、函数展开成幂级数 .....	(239)
三、函数幂级数展开式的应用举例 .....	(242)
习题七 .....	(245)
<b>第 8 章 多元函数微积分</b> .....	(250)
§ 8.1 预备知识 .....	(250)
一、空间直角坐标系 .....	(250)
二、空间的平面和常见的曲面 .....	(251)
三、平面区域 .....	(254)
§ 8.2 多元函数 .....	(254)
一、多元函数的概念 .....	(254)
二、二元函数的极限 .....	(257)
三、多元函数的连续性 .....	(258)
§ 8.3 偏导数和全微分 .....	(259)
一、偏导数 .....	(259)
二、全微分 .....	(263)
§ 8.4 多元复合函数微分法与隐函数微分法 .....	(267)
一、多元复合函数求导法则 .....	(267)
二、隐函数求导法则 .....	(272)
§ 8.5 高阶偏导数 .....	(274)
§ 8.6 多元函数的极值和最值 .....	(277)
一、多元函数极值 .....	(277)
二、多元函数条件极值 .....	(280)
三、在有界闭区域上的最值 .....	(283)
四、最小二乘法 .....	(285)
§ 8.7 二重积分 .....	(286)
一、二重积分的概念与性质 .....	(286)
二、二重积分的计算 .....	(293)
三、二重积分的应用 .....	(305)
四、无界区域上的广义二重积分 .....	(308)
习题八 .....	(310)
<b>第 9 章 常微分方程</b> .....	(318)
§ 9.1 常微分方程的基本概念 .....	(318)
一、微分方程的概念 .....	(318)

二、微分方程的解 .....	(319)
§ 9.2 一阶微分方程 .....	(320)
一、可分离变量的微分方程 .....	(320)
二、齐次微分方程 .....	(323)
三、一阶线性微分方程 .....	(324)
§ 9.3 二阶常系数线性微分方程 .....	(330)
一、线性微分方程解的结构 .....	(330)
二、二阶常系数齐次线性微分方程的通解 .....	(333)
三、二阶常系数非齐次线性微分方程的通解 .....	(335)
§ 9.4 微分方程的应用举例 .....	(338)
一、微分方程在经济学中的应用举例 .....	(338)
二、微分方程在微分学和积分学中的应用举例 .....	(339)
三、利用微分方程求幂级数的和函数 .....	(341)
习题九 .....	(342)
<b>第 10 章 差分方程</b> .....	(346)
§ 10.1 差分方程的基本概念 .....	(346)
一、差分概念 .....	(346)
二、差分方程的概念 .....	(347)
三、差分方程的解 .....	(348)
§ 10.2 线性差分方程解的结构 .....	(349)
§ 10.3 一阶线性差分方程的解法 .....	(350)
一、一阶常系数齐次线性差分方程的通解 .....	(351)
二、一阶常系数非齐次线性差分方程的通解 .....	(351)
§ 10.4 二阶常系数线性差分方程 .....	(356)
一、二阶常系数齐次线性差分方程的通解 .....	(356)
二、二阶常系数非齐次线性差分方程的通解 .....	(357)
§ 10.5 差分方程在经济管理中的应用举例 .....	(359)
一、清还债务问题 .....	(359)
二、供求平衡价格调整模型 .....	(359)
三、消费模型 .....	(360)
习题十 .....	(360)
<b>习题答案与提示</b> .....	(362)

# 第 1 章 函 数

函数是微积分研究的对象,也是高等数学的重要基本概念之一.鉴于函数在微积分中的重要地位,本章将重温函数概念并进一步学习相关的知识.

## § 1.1 实数与实数集

### 一、实数与数轴


微积分主要是在实数范围内研究函数.有理数和无理数统称为**实数**,全体实数的集合称为**实数集**.实数轴是一条有原点、正方向和长度单位的直线.如图 1-1 所示,数轴上的点与实数之间存在一一对应关系.因此,通常当我们用一个字母或数字表示一个实数时,也同时表示数轴上以该实数为坐标的对应点.例如,实数  $x$  既可称为数  $x$ ,也可以称为点  $x$ .

图 1-1

容易看到,数轴上任意两个不同点的坐标之间可以比较大小;任意两个不同点之间必存在无穷多个点;有理数和无理数对应的有理数点和无理数点填满数轴,即实数具有有序性、稠密性和完备性或连续性.

### 二、实数的绝对值及其性质

**定义 1.1** 设  $x$  是一个实数,定义  $x$  的绝对值为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$|x|$  的几何意义是表示点  $x$  到原点  $O$  的距离,  $|x-y|$  则表示  $x$  与  $y$  两点之间的距离.

**例 1** 解不等式  $|x-3| < |x+5|$ .

**解** 根据绝对值的几何意义,不等式表示数轴上与点  $x_1 = -5$  的距离大于与点  $x_2 = 3$  的距离的所有点的集合.如图 1-2,与

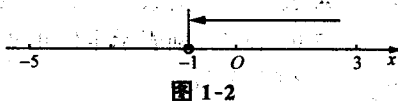


图 1-2

点  $x_1$  和  $x_2$  等距离的中点为

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -1,$$

所求点集在  $x_3$  的右侧, 因此得解集  $\{x | x > -1\}$ .

例 1 表明, 熟悉绝对值的几何意义, 对于求解绝对值问题是有益的.

绝对值有以下基本性质:

设  $x, y$  为任意实数, 则

(1)  $|x| \geq 0, |x| = |-x|, |x| = \sqrt{x^2};$

(2)  $-|x| \leq x \leq |x|;$

(3)  $|x+y| \leq |x| + |y|;$

(4)  $||x| - |y|| \leq |x - y|;$

(5)  $|xy| = |x||y|$ , 一般地,  $|x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \cdots \cdot |x_n|;$

(6)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$

只证(3)和(4), 其余性质读者可自行证明:

由性质(2), 有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|,$$

从而有

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

即

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

又由性质(3), 有

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|,$$

即

$$|x| - |y| \leq |x - y|, \quad |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|,$$

从而有

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

### 三、区间与邻域

实数系可以用一般的集合表示法表示, 并习惯用特殊记号表示特定的实数集, 如  $\mathbf{R}$  表示全体实数的集合,  $\mathbf{N}$  表示全体自然数的集合,  $\mathbf{Z}$  表示全体整数的集合, 又如  $\mathbf{R}^+$ 、 $\mathbf{Z}^-$  分别表示全体正实数、全体负整数的集合. 此外还有其特定的表示法, 即区间表示法.

设  $a, b$  为两个实数, 且  $a < b$ , 定义:

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$ , 称为开区间  $(a, b)$ ;

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ , 称为闭区间  $[a, b]$ ;

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ ,  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$  称为半开半闭区间.

$[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b]$  统称为有限区间,  $a, b$  称为区间的左、右端点,  $b - a$  为区间长度. 当端点为无限时, 相应区间为无穷区间, 即

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

类似地可定义  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ .

在讨论问题时, 还经常会涉及到在某定点  $x_0$  附近的点的集合, 因此, 需要引入邻域的概念.

设  $\delta$  为某个正数, 则称开区间

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

为以  $x_0$  为中心, 以  $\delta$  为半径的邻域, 记作  $N_\delta(x_0)$ , 如图 1-3; 并称集合

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

为以  $x_0$  为中心, 以  $\delta$  为半径的去心邻域, 记作  $N_\delta(\bar{x}_0)$ , 其中  $(x_0 - \delta, x_0)$  称为  $x_0$  的左邻域,  $(x_0, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的右邻域, 如图 1-4.

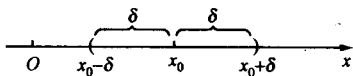


图 1-3

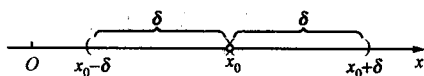


图 1-4

广义上, 可将  $\infty$  看作数轴上的无穷远点. 设  $M$  为正常数, 类似地可以定义集合

$$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty) = \{x | |x| > M\}$$

为点  $\infty$  的  $M$  邻域, 记作  $N_M(\infty)$ .  $(-\infty, -M)$ ,  $(M, +\infty)$  分别称为  $\infty$  的左、右邻域.

## § 1.2 函数概念

### 一、常量与变量

微积分学通常又称为变量数学. 变量是指某一个过程中不断变化的量. 如运动物体行走的路程、某上市公司的股票价格、生产某种产品的成本、某地区的

气温等.而在某个变化过程中,取值恒定不变的量称为常量.如在同一大气压下水的沸点、在一段时间内银行的存款利率、圆周率  $\pi$  等.在变化过程中形成的变量之间的相互依存关系是构造函数关系的基础.

任何变量的取值都有一个确定的范围,称为该变量的变域.变域一般是实数集的一个子集,或为实数轴上的一个点集,变量可看作该点集的一个动点.从广义上讲,常量也可看作在一个非空单元素集合中取值的变量.因此,常量也可看作变量的特例,在数轴上表示一个定点.

如果变量的变域是由区间构成的,则称此类变量为连续型变量.连续型变量在变域中的取值过程是连续的,是不可按自然数顺序一一可列的.在现实生活中,物理量一般都是连续型的,如时间变量  $t$ 、物体运动的速度  $v$ 、某地区的气温  $T$  等.如果变量的变域是非区间的,其取值过程是“跳跃”可列的,则称该类变量为离散型变量.经济报表中的经济量通常是离散型变量,如不同年度的人口量、国民收入、税收额等.

**注意** 一个量的变与不变是相对的,通常与特定的过程或研究的范围有关.例如,在世界的不同高度,水的沸点是变化的.在一个相对长的时间范围内,银行的存款利率也在不断调整.又如,在研究商品的销售收益时,一般情况下要考虑价格因素,即把价格看作变量处理.但在研究广告费对销售收益的影响时,则把广告投入看作变量,而把价格看作常量.因此,在处理具体问题时,首先要弄清问题所在的环境或条件,把握变与不变的辩证关系.

## 二、函数概念

**定义 1.2** 设有两个变量  $x, y$ ,  $x$  属于一个非空实数集  $D$ .如果存在一个对应法则  $f$ ,使得对于每个  $x \in D$ ,依法则必存在唯一的实数  $y$  与之对应,则称对应法则  $f$  为定义在实数集  $D$  上一个函数,记作  $y=f(x)$ .其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为  $f$  的定义域,记作  $D_f$ ,函数全体取值的集合称为  $f$  的值域,记作  $Z_f$ ,即  $Z_f = \{y | y=f(x), x \in D_f\}$ .

根据定义 1.2,法则  $f$  确定了变量  $x$  与  $y$  之间的一种对应关系,并称之为函数关系.  $f(x)$  是在法则  $f$  下变量  $x$  对应的函数值.显然,  $f$  与  $f(x)$  是有区别的,由于微积分主要是通过函数值  $f(x)$  的变化来研究函数的,因此,习惯上我们仍然把  $f(x)$  看作自变量  $x$  的函数.

**注意** 构成函数概念的两个基本要素是定义域和对应法则.两个函数只有在定义域和对应法则都相同的情况下才相等.例如,函数  $y = \sqrt{x(1+x)}$  与  $y = \sqrt{x} \sqrt{1-x}$  有相同的定义域和对应法则,因此两函数相等;函数  $y = \sqrt{x(x-1)}$  与  $y = \sqrt{x} \sqrt{x-1}$  定义域不相同,因此两函数不相等.



### 三、函数表示法

函数关系的表示法通常有图像法、表格法、公式法,有时也可用文字语言表述法.

我们来看几个函数概念的实例.

**例 1** 伽利略在研究自由落体运动时,发现  $t$  时刻物体下落的距离  $y$  与时间  $t$  的平方成正比,比例系数为常数  $\frac{1}{2}g$ ,其中  $g$  为重力加速度.于是当物体从高度为  $h$  的地方自由下落时,变量  $y$  与  $t$  之间构成函数关系

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

这是用公式法建立函数关系的最早的实例,其中  $t$  为自变量, $y$  为因变量,定义域为  $D_f = [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$ ,值域为  $Z_f = [0, h]$ .

**例 2** 表 1-1 表示的是 20 世纪的世界人口数,如果用  $n$  表示年份, $x_n$  表示第  $n$  年世界人口数,表格构成了  $x_n$  与  $n$  的函数关系,定义域为  $D_f = \{1900, 1910, 1920, \dots, 2000\}$ .

表 1-1

(单位:百万)

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口	1 650	1 750	1 860	2 070	2 300	2 560	3 040	3 710	4 450	5 280	6 080

一般情况下,我们把定义在正整数集合上的函数称为**数列**,或称为**整标函数**.记作  $\{x_n\} = f(n)$ ,其中  $x_n$  或  $f(n)$  称为**通项**或**一般项**.

**例 3** 图 1-5 是深圳证券交易所 2006 年某交易日股票交易综合指数图.该曲线描绘了该交易日股票行情随时间  $t$  的变化而波动的情况.由曲线图可以确定该交易日内的任何一个时点股票交易价格的综合指数,这是用图像法表示函数的一个实例.

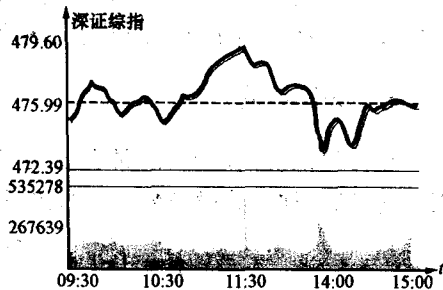


图 1-5

**例 4** 函数  $y = [x]$  称为取整函数,即  $y$  定义为不超过  $x$  的最大整数,如

$[1.054] = 1, [-1.436] = -2$ ,取整函数可看作是用语言定义的函数.