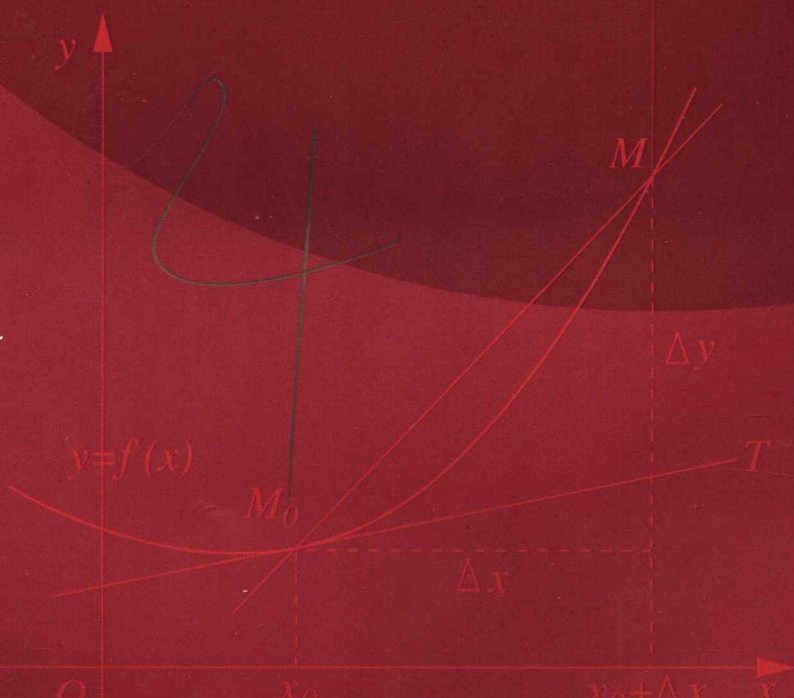
· 经济数学基础 ·

微积分

严守权 主编



中国人民大学出版社

· 经济数学基础 ·

微积分

严守权　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/严守权主编.
北京：中国人民大学出版社，2007
经济数学基础
ISBN 978-7-300-08466-4

Ⅰ.微…
Ⅱ.严…
Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 133567 号

经济数学基础
微积分
严守权　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 8 月第 1 版
印　　张	25　插页 1	**印　　次**	2007 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	461 000	**定　　价**	29.00 元

总　　序

随着教学改革的不断深入和办学规模的扩大，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时，全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大，其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言，经过多年调整，实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点：作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程，《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲，融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围；突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练；内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求和分级教学的需要，本套教材推出了《高级经济数学教程》分册，该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外，作为高等数学知识的进一步延伸和扩展，本套教材同时推出了《实用运筹学》分册，该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识，并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是，基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，以便于学生自习。另一方面，《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充，增加相当数量的研究生入学考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面，帮助学生实现跨越，达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此，这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的

功能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有20年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人多年从事研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006年10月

前　　言

本书参照经济学核心课程经济数学基础教学大纲和全国硕士研究生入学考试经济类考试大纲微积分部分编写而成，包括一元微积分学、级数、多元微积分学、微分方程、差分方程等，覆盖了大纲的基本内容，表述简洁、难度适中。每章配有习题，书末附有习题参考答案。同时，我们编写了与本教材配套的辅导书——《微积分学习指导》。辅导书除对教材中重点、难点作了深入浅出的讲解外，还针对硕士研究生入学考试数学试卷的题型特点和要求，增加了相当数量的典型例题，其中包括填空题和单项选择题。辅导书每章配有综合练习题和答案，有助于提高读者分析解决问题的能力，书后还附有教材所有习题的详解。

本书可作为高等学校经济和管理类专业数学基础课微积分的教材或教学参考书，配套的《微积分学习指导》可作为经济管理类硕士研究生入学考试备考用书。

本书由中国人民大学严守权负责编著，参加部分编写工作的有中国人民大学的赵晋和于长千同志。

中国人民大学林勇、赵国庆、张庆彩、张伦传、阳庆节，北京大学姚孟臣，清华大学胡金德等同志对教材的编写大纲、书稿内容、体例都提出了宝贵的意见，中国人民大学出版社有关编审人员认真审阅了书稿，也提出了不少改进意见，对此，我们一并表示感谢。

由于编者水平有限，编写时间较为仓促，教材中一定存在不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

严守权

2007 年 7 月

目　录

第1章　函　数

函数是微积分研究的对象，也是高等数学的重要基本概念之一. 鉴于函数在微积分中的重要地位. 本章将重温函数概念并进一步学习相关的知识.

§1.1　实数与实数集

一、实数与数轴

微积分主要是在实数范围内研究函数. 有理数和无理数统称为**实数**，全体实数的集合称为**实数系**. 实数轴是一条有原点、正方向和长度单位的直线. 如图1-1所示，数轴上的点与实数之间存在一一对应关系. 因此，通常当我们用一个字母或数字表示一个实数时，也同时表示数轴上以该实数为坐标的对应点. 例如，实数 x 既可称为数 x，也可以称为点 x.

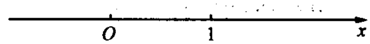


图1-1

容易看到，数轴上任意两个不同点的坐标之间可以比较大小；任意两个不同点之间必存在无穷多个点；有理数和无理数对应的有理数点和无理数点填满数轴，即实数具有有序性、稠密性和完备性或连续性.

二、实数的绝对值及其性质

定义1.1　设 x 是一个实数，定义 x 的绝对值为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示点 x 到原点 O 的距离，$|x-y|$ 则表示 x 与 y 两点之间的距离.

例1　解不等式 $|x-3|<|x+5|$.

解　根据绝对值的几何意义，不等式表示数轴上与点 $x_1=-5$ 的距离大于与点 $x_2=3$ 的距离的所有点的集合. 如图1-2，与

图1-2

点 x_1 和 x_2 等距离的中点为

$$x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-1,$$

所求点集在 x_3 的右侧,因此得解集 $\{x \mid x>-1\}$.

例 1 表明,熟悉绝对值的几何意义,对于求解绝对值问题是有益的.

绝对值有以下基本性质:

设 x,y 为任意实数,则

(1) $|x|\geqslant 0,|x|=|-x|,|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$;

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(4) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$;

(5) $|xy|=|x||y|$,一般地,$|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\cdots\cdot|x_n|$;

(6) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},y\neq 0$.

只证(3)和(4),其余性质读者可自行证明.

由性质(2),有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

从而有

$$-(|x|+|y|)=-|x|-|y|\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|,$$

即

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

又由性质(3),有

$$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$
$$|y|=|(y-x)+x|\leqslant|y-x|+|x|,$$

即

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|,\quad |y|-|x|\leqslant|y-x|=|x-y|,$$

从而有

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

三、区间与邻域

实数系可以用一般的集合表示法表示,并习惯用特殊记号表示特定的实数集,如 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合,$\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合,$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合,又如 $\mathbf{R}^+$、$\mathbf{Z}^-$ 分别表示全体正实数、全体负整数的集合.此外还有其特定的表示法,即区间表示法.

设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,定义:

$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，称为开区间(a,b)；

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，称为闭区间$[a,b]$；

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间.

$[a,b)$，$(a,b]$，(a,b)，$[a,b]$统称为**有限区间**，a，b 称为区间的**左**、**右端点**，$b-a$ 为**区间长度**. 当端点为无限时，相应区间为**无穷区间**，即

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

类似地可定义$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$.

在讨论问题时，还经常会涉及到在某定点 x_0 附近的点的集合，因此，需要引入邻域的概念.

设 δ 为某个正数，则称开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$$

为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的邻域，记作 $\mathrm{N}_\delta(x_0)$，如图 1-3；并称集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的去心邻域，记作 $\mathrm{N}_\delta(\overline{x}_0)$，其中$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右邻域，如图 1-4.

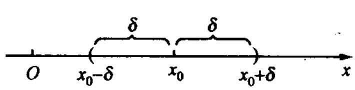


图 1-3

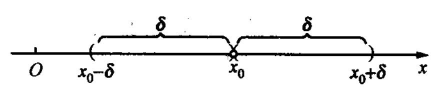


图 1-4

广义上，可将∞看作数轴上的无穷远点. 设 M 为正常数，类似地可以定义集合

$$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)=\{x\,\big|\,|x|>M\}$$

为点∞的 M 邻域，记作 $\mathrm{N}_M(\infty)$. $(-\infty,-M)$，$(M,+\infty)$分别称为∞的左、右邻域.

§1.2 函数概念

一、常量与变量

微积分学通常又称为变量数学. 变量是指某一个过程中不断变化的量. 如运动物体行走的路程、某上市公司的股票价格、生产某种产品的成本、某地区的

气温等.而在某个变化过程中,取值恒定不变的量称为常量.如在同一大气压下水的沸点、在一段时间内银行的存款利率、圆周率 π 等.在变化过程中形成的变量之间的相互依存关系是构造函数关系的基础.

任何变量的取值都有一个确定的范围,称为该变量的变域.变域一般是实数集的一个子集,或为实数轴上的一个点集,变量可看作该点集的一个动点.从广义上讲,常量也可看作在一个非空单元素集合中取值的变量.因此,常量也可看作变量的特例,在数轴上表示一个定点.

如果变量的变域是由区间构成的,则称此类变量为连续型变量.连续型变量在变域中的取值过程是连续的,是不可按自然数顺序一一可列的.在现实生活中,物理量一般都是连续型的,如时间变量 t、物体运动的速度 v、某地区的气温 T 等.如果变量的变域是非区间的,其取值过程是"跳跃"可列的,则称该类变量为离散型变量.经济报表中的经济量通常是离散型变量,如不同年度的人口量、国民收入、税收额等.

注意 一个量的变与不变是相对的,通常与特定的过程或研究的范围有关.例如,在世界的不同高度,水的沸点是变化的.在一个相对长的时间范围内,银行的存款利率也在不断调整.又如,在研究商品的销售收益时,一般情况下要考虑价格因素,即把价格看作变量处理.但在研究广告费对销售收益的影响时,则把广告投入看作变量,而把价格看作常量.因此,在处理具体问题时,首先要弄清问题所在的环境或条件,把握变与不变的辩证关系.

二、函数概念

定义 1.2 设有两个变量 x,y, x 属于一个非空实数集 D.如果存在一个对应法则 f,使得对于每个 $x\in D$,依法则必存在唯一的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上一个**函数**,记作 $y=f(x)$.其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为 f 的**定义域**,记作 D_f,函数全体取值的集合称为 f 的**值域**,记作 Z_f,即 $Z_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$.

根据定义 1.2,法则 f 确定了变量 x 与 y 之间的一种对应关系,并称之为函数关系.$f(x)$是在法则 f 下变量 x 对应的函数值.显然,f 与 $f(x)$是有区别的,由于微积分主要是通过函数值 $f(x)$的变化来研究函数的,因此,习惯上我们仍然把 $f(x)$看作自变量 x 的函数.

注意 构成函数概念的两个基本要素是定义域和对应法则.两个函数只有在定义域和对应法则都相同的情况下才相等.例如,函数 $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ 有相同的定义域和对应法则,因此两函数相等;函数 $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 定义域不相同,因此两函数不相等.

三、函数表示法

函数关系的表示法通常有图像法、表格法、公式法，有时也可用文字语言表述法.

我们来看几个函数概念的实例.

例 1 伽利略在研究自由落体运动时，发现 t 时刻物体下落的距离 y 与时间 t 的平方成正比，比例系数为常数 $\frac{1}{2}g$，其中 g 为重力加速度. 于是当物体从高度为 h 的地方自由下落时，变量 y 与 t 之间构成函数关系

$$y=\frac{1}{2}gt^2.$$

这是用公式法建立函数关系的最早的实例，其中 t 为自变量，y 为因变量，定义域为 $D_f=\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，值域为 $Z_f=[0,h]$.

例 2 表 1-1 表示的是 20 世纪的世界人口数，如果用 n 表示年份，x_n 表示第 n 年世界人口数，表格构成了 x_n 与 n 的函数关系，定义域为 $D_f=\{1900, 1910, 1920, \cdots, 2000\}$.

表 1-1 （单位：百万）

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口	1 650	1 750	1 860	2 070	2 300	2 560	3 040	3 710	4 450	5 280	6 080

一般情况下，我们把定义在正整数集合上的函数称为**数列**，或称为**整标函数**. 记作 $\{x_n\}=f(n)$，其中 x_n 或 $f(n)$ 称为**通项**或**一般项**.

例 3 图 1-5 是深圳证券交易所 2006 年某交易日股票交易综合指数图. 该曲线描绘了该交易日股票行情随时间 t 的变化而波动的情况. 由曲线图可以确定该交易日内的任何一个时点股票交易价格的综合指数，这是用图像法表示函数的一个实例.

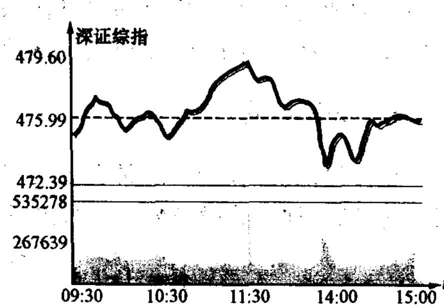


图 1-5

例 4 函数 $y=[x]$ 称为取整函数，即 y 定义为不超过 x 的最大整数，如 $[1.054]=1$，$[-1.436]=-2$，取整函数可看作是用语言定义的函数.