2008 人大考研

读考研书 找人大社

2008年考研
数学
新编考试参考书

主编 李恒沛

- 权威命题专家亲自编写
- 理工经济通用

针对历年考研试题概念性强、综合性强、运算性强，灵活考查考生推理与应用能力的特点，全面精讲精练，重点突出

例题选择多样化，典型性强，解析透彻，侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用

每章后精选习题，与例题相互补充，深化内容

中国人民大学出版社

2008年考研
数学新编考试参考书

主　编　李恒沛

编著者　（以姓氏笔画为序）

李恒沛　张旭利

高文森　陶　荟

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

2008年考研数学新编考试参考书/李恒沛主编. 4版
北京：中国人民大学出版社，2007
ISBN 978-7-300-04657-0

Ⅰ. 2…
Ⅱ. 李…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第053955号

2008年考研数学新编考试参考书
主编　李恒沛

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2004年4月第1版
			2007年5月第4版
印　　张	35.5	**印　　次**	2007年5月第1次印刷
字　　数	1 086 000	**定　　价**	42.00元

前　言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第1～8章）、线性代数（第9章）、概率论与数理统计（第10章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并示明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录1为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生备用），附录2、附录3分别为2006年和2007年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用。本书也可供在读本科生加深学习内容、复习备考以及教师教学参考使用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：(1) 概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。(2) 综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。(3) 运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运算自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力。这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不烦琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；章章小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演算习题，两者都是很重要的。

本书由李恒沛、张旭利、高文森、陶荟编写，全书由李恒沛统稿。

编著者均长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的从事过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深刻的研究，考研辅导效果显著。编著者愿此书的出版对考研学子有所裨益。

本书在编写过程中，主要参考了如下资料：

教育部：《2007年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，高等教育出版社，2006。

全国高校工科数学课程教学指导委员会《工科数学》编委会：《工科数学・二零零一年考研专辑》，2001。

蔡燧林、张继昌：《研究生数学入学考试精编》（第二版），浙江大学出版社，2000。

李恒沛、王日爽、萧亮壮：《全国研究生入学数学统考应试指导》，广西科学技术出版社，1988。

编著者

于北京，2007年4月

读考研书　找人大社

一、2008 人大版考研英语类图书

书　　名	作者	开本	定/估价	出版时间
历年考研英语真题名家详解（2008 版）	张锦芯	16K	26.00	2007.3
2008 年考研英语新教程	张锦芯	16K	36.00	2007.2
2008 年考研英语阅读 200 篇	郭庆民	16K	46.00	2007.3
2008 年考研英语阅读 Part B 全突破	张锦芯	16K	26.00	2007.3
2008 年考研英语写作专项突破	田育英	16K	22.00	2007.3
2008 年考研英语词汇复习指南	谢振元	16K	32.00	2007.2
2008 年考研英语高分词汇精记速记	谢振元	32K	28.00	2007.2
2008 年考研英语词汇必备	王长喜	16K	29.00	2007.2
2008 年考研英语必备	王长喜	16K	36.00	2007.3
2008 年考研英语经典讲义	张锦芯	16K	29.00	2007.3
2008 年考研英语词汇活学活用巧链记	白　洁	32K	19.00	2007.2
2008 年考研英语短文写作及英汉翻译	刘鸿飞	16K	28.00	2007.2
2008 年考研英语阅读完形翻译全突破	袁秉政	16K	29.00	2007.3
2008 年考研英语模拟考场	张锦芯	16K	36.00	2007.9

二、2008 人大版考研政治类图书

书　　名	主编	开本	定/估价	出版时间
2008 年考研政治理论复习导本	李淮春	16K	39.00	2007.2
2008 年考研政治理论课常考知识点	包仁等	16K	39.00	2007.5
最新考研政治真题命题研究与高分策略	余学本 郭务本 肖秀荣	16K	28.00	2007.3
2008 年考研政治实用经典教程	包　仁 李海洋 辛　逸	16K	39.00	2007.7
2008 年考研政治理论最新精编 1000 题	包　仁 李海洋 辛　逸	16K	39.00	2007.7
2008 年考研政治理论新编考试参考书	考研研究中心	16K	29.00	2007.7
2008 年硕士研究生入学考试政治理论复习指导	教育部就业 指导中心	16K	36.00	2007.7
2008 年考研政治重要知识点深度解析	陈先奎 包　仁	32K	15.00	2007.9
2008 年考研政治“形势与政策”精讲与预测	辛　逸	32K	12.00	2007.10
考研政治考前 10 小时金题预测	考研研究中心	16K	10.00	2007.12

三、2008 人大版考研数学类图书

书　　名	主编	开本	定/估价	出版时间
2008 年考研数学经典讲义（理工类）	黄先开 曹显兵	16K	49.00	2007.2
2008 年考研数学经典讲义（经济类）	黄先开 曹显兵	16K	46.00	2007.2
考研历届数学真题题型解析（数学一）	黄先开 曹显兵	16K	35.00	2007.2
考研历届数学真题题型解析（数学二）	黄先开 曹显兵	16K	22.00	2007.2
考研历届数学真题题型解析（数学三）	黄先开 曹显兵	16K	32.00	2007.2
考研历届数学真题题型解析（数学四）	黄先开 曹显兵	16K	29.00	2007.2
2008 年考研数学最新精选 600 题（理工类）	黄先开 曹显兵	16K	25.00	2007.3
2008 年考研数学最新精选 600 题（经济类）	黄先开 曹显兵	16K	25.00	2007.3
微积分习题集（考研经济数学题库）	严守权	16K	28.00	2007.3
线性代数习题集（考研经济数学题库）	胡显佑	16K	25.00	2007.3
概率论与数理统计习题集（考研经济数学题库）	姚孟臣	16K	19.00	2007.3
2008 年考研数学新编考试参考书	李恒沛	16K	42.00	2007.5
2008 年考研数学新编考试参考书（经济类）	胡显佑	16K	32.00	2007.5
2008 年考研数学模拟冲刺试卷	李恒沛	16K	20.00	2007.11

四、2008 人大版其他考研图书

书　　名	作者	开本	定/估价	出版时间
2008 年考研日语指南	易友人	16K	45.00	2007.5
2008 年考研俄语指南	钱晓蕙	16K	52.00	2007.3
2008 年考研中医综合科目辅导讲义	赵百孝	16K	48.00	2007.5
2008 年考研西医综合科目辅导讲义	于吉人	16K	56.00	2007.5

五、2008 人大版法硕（1 月份考试）图书

	书　　名	作者	开本	定/估价	出版时间
基础篇	全国法律硕士专业学位研究生入学联考考试指南（第八版）	全国法硕 指导委员会	16K	109.00	2007.7
	2008 年法律硕士联考考试大纲配套练习	曾宪义等	16K	69.00	2007.7
强化篇	全国法律硕士研究生入学联考标准化题库	白文桥等	16K	68.00	已出版
	2008 年法律硕士联考考试大纲重要知识点深度解析及模拟试卷	法硕联考 命题研究组	16K	78.00	2007.7
	法律硕士联考四年真题归类详解及知识清单	北京万国学校	16K	29.00	2007.5
高分篇	法律硕士联考重要法条释解	曾宪义等	16K	32.00	2007.5
	2008 年法律硕士联考最新试题分析及考点解析	曾宪义等	16K	32.00	2007.5
	法律硕士联考专业基础课必备·经典案例分析	刘守芬等	16K	29.00	2007.5
冲刺篇	2008 年全国法律硕士专业学位研究生入学联考模拟试卷及解析	曾宪义等	16K	59.00	2007.8
	2008 年全国法律硕士专业学位研究生入学联考大串讲	曾宪义等	16K	46.00	2007.9
	法律硕士联考考前最后 5 套题	刘守芬等	16K	26.00	2007.11

中国 1 考网：www.1kao.net　　咨询电话：（010）62511915

咨询信箱：1kao2005@163.com　　邮购电话：（010）82501766

读者服务部：（010）62514148　62516566（人大院内）

目　录

第一章

函数、极限、连续性

§1 函 数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量，也称 y 是因变量，称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的).

(2) 奇偶性：设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性：设 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性：设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于任何 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u，$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 E，若 $E \subseteq D_u$，则对于任何 $x \in D_x$，有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应，而 $u \in E \subseteq D_u$，故又有确定的 y 与 u 对应，从而，对于任何 $x \in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立起 y 与 x 的对应关系的，因而，称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任何一个 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

注意：$x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图像是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数　$y = x^{\mu}$(μ 为实数).

指数函数　$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$.

对数函数　$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$.

三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内，其对应法则有着不同的初等函数表达式，则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容，应重点掌握以下几点：

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

例如，应会求函数的定义域和值域，会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式，即从 $f(\varphi(x)) = g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式，尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如，应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例 1　已知 $f(x+\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

分析：这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式，欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题. 此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中，令 $\varphi(x) = u$，即可得到 $f(u)$ 的表达式，从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解：令 $x + \frac{1}{x} = u$，则有

$$f(u) = \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \frac{1}{u^2-2},$$

所以　$f(x) = \frac{1}{x^2-2}$.

例 2　已知 $f(x)$ 在$[-2,2]$上为偶函数，且 $f(x) = 2x^2 + x(x \in [-2,0])$，那么当 $x \in [0,2]$ 时，$f(x)$ 的表达式为(　　).

(A) $2x^2 + x$　　(B) $2x^2 - x$　　(C) $-2x^2 + x$　　(D) $-2x^2 - x$

分析：已知函数的奇偶性时，可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x \in [0,2]$ 时，$-x \in [-2,0]$，由于 $f(x)$ 是偶函数，所以有

$$f(x) = f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) = 2x^2 - x.$$

解：应选 B.

例 3　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2\ , & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析：这是一个分段函数求复合函数的问题，按照一般求复合函数的方法，先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数，要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

解：$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |g(x)| > 1, \end{cases}$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| \leqslant 1$，当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| > 1$.

先来讨论使 $|g(x)|\leqslant 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x|\leqslant 2$ 时才可能使 $|g(x)|\leqslant 1$.

在 $|x|\leqslant 2$ 范围内,要使 $|g(x)|=|2-x^2|\leqslant 1$,只需

$$1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}.$$

所以,当 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$ 时,有 $|g(x)|\leqslant 1$.

再来讨论使 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x|>2$ 时 $|g(x)|>1$. 另外,当 $\sqrt{3}<|x|\leqslant 2$ 或 $|x|<1$ 时,也有 $|g(x)|>1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x))=\begin{cases}1, 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\0,\ |x|>\sqrt{3} \text{ 或 } |x|<1.\end{cases}$$

例 4 设 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$,当 a,b 满足条件________时,该函数的反函数与该函数相等.

分析:由 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x=(a-y^n)^{\frac{1}{b}}$$

也即反函数为 $y=(a-x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b=n$,a 为任意值时,反函数与直接函数相等.

解:$b=n$,a 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在$[a,b]$上单增,$f(x)$ 在$[g(a),g(b)]$上单减,则 $f(g(-x))$( ).

(A) 在$[a,b]$上单增 (B) 在$[a,b]$上单减

(C) 在$[-b,-a]$上单增 (D) 在$[-b,-a]$上单减

分析:首先,可知保证 $f(g(-x))$ 有定义的区间应是$[-b,-a]$,所以,可排除 A、B 选项.

然后,再用单调性定义判断.

任取 $x_1,x_2\in[-b,-a]$,$x_1<x_2$,则

$$-x_1,-x_2\in[a,b], \text{且} -x_1>-x_2.$$

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1)>g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1))<f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在$[-b,-a]$上单增.

解:应选 C 项.

例 6 设 $y=\frac{1}{2x}f(t-x)$,当 $x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$,求 $f(x)$.

解:$x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}f(t-1)=\frac{1}{2}t^2-t+5$.

从而 $f(t-1)=t^2-2t+10$.

令 $t-1=x$, $f(x)=(x+1)^2-2(x+1)+10$.

所以 $f(x)=x^2+9$.

例 7 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ $(x\neq 1)$,则 $f(f(f(f(x))))=$________.

分析:$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x\quad(x\neq 1)$,

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}=\frac{x}{x-1}\quad(x\neq 1).$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1).$$

解:应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为( ).

(A) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (B) $f(x) = ([x])^2$

(C) $f(x) = (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x$ (D) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析:此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数,B 选项的函数非奇非偶,故只有选择 C.

因为此时

$$f(-x) = (2+\sqrt{3})^{-x} + (2-\sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$$
$$= (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = f(x).$$

解:选择 C.

例 9 下列函数中不是周期函数的应为( ).

(A) $f(x) = \sin^2 x$ (B) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

(C) $f(x) = \sin 2x + \cos \pi x$ (D) $f(x) = x - [x]$

分析:因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,故 $f(x)$ 为周期函数,其最小正周期为 $T = \pi$;容易看出,$\sin\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π,$\cos\frac{x}{3}$ 的最小正周期为 6π,从而其和的最小正周期为 12π;同理 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π,$\cos \pi x$ 的最小正周期为 2,从而其和不是周期函数;至于 $f(x) = x - [x]$(若 $x = n + \alpha$,n 为整数,且 $0 \leqslant \alpha < 1$,则$[x] = n$),容易验证它为周期函数. 事实上,设 $x = n+\alpha$,n 为整数,$0 \leqslant \alpha < 1$,m 为整数,则

$$\begin{aligned} f(m+x) &= f(m+n+\alpha) = m+n+\alpha-[m+n+\alpha] \\ &= m+n+\alpha-m-[n+\alpha] = n+\alpha-[n+\alpha] \\ &= x-[x] = f(x). \end{aligned}$$

于是所有整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,而最小正周期为 1. 综上分析,应选 C.

解:应选 C.

§2 极 限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义:对于数列 $\{x_n\}$,如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,也记为 $x_n \to a(n \to \infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义.

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,也记为 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $X>0$,使得当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,也记为 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $X>0$,使得当 $x<-X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,也记为 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义:如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

类似地,可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 时的无穷小.

(5) 无穷大的定义:设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地,可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地,还可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义:设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称当 $x\to x_0$ 时,α 是比 β 高阶的无穷小,记为 $\alpha=o(\beta)$;

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A(A\neq0)$,则称当 $x\to x_0$ 时,α 是与 β 同阶的无穷小,记为 $\alpha=O(\beta)$;特别地,当 $A=1$ 时,则称当 $x\to x_0$ 时,α 是与 β 等阶的无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$;

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称当 $x\to x_0$ 时,α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地,可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2)(保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0(A<0)$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$,则 $A\geqslant0(A\leqslant0)$.

(4)(局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则存在 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0,\delta)$,使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,\delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或其他过程) 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2)(夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域(或 $|x|$ 充分大时) 内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式:设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$,则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

5. 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=AB$;

(3) 若 $B\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述性质当 $x\to\infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大;反之,若 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(6)(等价无穷小替换) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x\to\infty$ 时也成立.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

(1) 利用极限的运算法则求极限.

(2) 利用两个重要极限求极限.

(3) 利用等价无穷小替换求极限.

(4) 利用极限存在准则求极限.

(5) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

(6) 利用函数的连续性求极限.

(7) 利用"洛必达法则"求极限.

上述(6)、(7) 项的内容将在后面复习.

二、例题分析

例 1 "对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数N,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的(　　).

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

分析:此题是1999年全国考研数学二的原题,考查对数列极限的定义的理解. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义是"对任意给定的$\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数$N_1$,当$n > N_1$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$". 两种说法相比较,似乎定义中的条件更强些,显然,由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义必能推出"对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数$N$,当$n > N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$". 但是其逆也是正确的. 因为对任意$\varepsilon_1 > 0$,取$\varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,显然$\varepsilon \in (0,1)$,所以总存在正整数$N$,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$. 现取$N_1 = N - 1$,于是当$n > N_1$时,恒有$|x_n - a| \leqslant \frac{2\varepsilon_1}{3} < \varepsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的,即选项C是正确的.

解:应选C.

例 2 若ε为任意给定的正数,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充要条件为(　　).

(A)$U(a,\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$的全部点

(B)$U(a,\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$的无穷多个点

(C)$U(a,\varepsilon)$之外至多有$\{x_n\}$的有限个点

(D)$U(a,\varepsilon)$之外可能有$\{x_n\}$的无穷多个点

分析:由于"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$"的精确含义是"对任意给定的$\varepsilon > 0$,总存在$N$,当$n > N$时,恒有$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$",所以,在$U(a,\varepsilon)$内不一定有$\{x_n\}$的全部点,只含有满足$n > N$的$x_n$,所以A不对. 而B"$U(a,\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$的无穷多个点"只能保证在某$N$之后的无穷多项$x_n$在$U(a,\varepsilon)$内,而不能保证$N$之后的一切$x_n$都在$U(a,\varepsilon)$内,故B也不对. C"$U(a,\varepsilon)$之外至多有$\{x_n\}$的有限个点"能保证存在$N$,当$n > N$时的$x_n$都在$U(a,\varepsilon)$内,所以,C与"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$"是可以互相推出的. 易知D项也不对.

解:应选C.

例 3 设对任意的x,总有$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$,则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

分析:此题是2000年全国考研数学三的原题. 有的考生认为由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$"则可得出"$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$",但它们不一定为零,故错选为B. 事实上,由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$"不一定能保证$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$的存在,例如若取$g(x) = e^x + e^{-x}$,$\varphi(x) = e^x - e^{-x}$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$,但$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$都不存在. 这样,可以想象,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$也不一定存在了. 例如取$f(x) = e^x$,则$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - \varphi(x)) = 0$,但$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$不存在.

解:应选D.

例 4 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$,$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有(　　).

(A) $a_n < b_n$对任意n成立　　(B) $b_n < c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$不存在

分析:由于极限值的大小只能反映当$n \to \infty$时的数列的变化趋势,不能反映前面有限项的取值情况. 所以,A、B选项都是不正确的. 由例$\lim\limits_{n\to+\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1$知C选项也不正确. 由无穷大的定义易知$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$,所

以，D选项正确.

解：应选 D.

例 5　设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 为(　　).

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量　　(D) 无界变量

分析：n 为奇数时，$x_n\to\infty$.

n 为偶数时，$x_n\to 0$.

所以，x_n 既不是无穷大量，也不是无穷小量. 由于 $x_n\to\infty$（n 为奇数），所以 x_n 不是有界变量而是无界变量，故 D 选项正确.

解：应选 D.

例 6　设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$(　　).

(A) $x\to\infty$ 时是无穷大量　　(B) $x\to\infty$ 时是无穷小量

(C) $x\to 0$ 时是无界变量　　(D) $x\to 0$ 时是无穷小量

分析：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，所以 A、B 选项均不对.

又由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以 D 正确，而 C 不正确.

解：应选 D.

例 7　若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则必有(　　).

(A) $f(x_0)=A$

(B) $f(x_0)$ 存在但不一定为 A

(C) 存在邻域 $U^0(x_0,\delta)$，使 $f(x)$ 在其中有界

(D) 对任何邻域 $U^0(x_0,\delta)$，$f(x)$ 在其中有界

分析：由极限的定义知“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”的精确含义是“对任何给定 $\varepsilon>0$，存在 $U^0(x_0,\delta)$，使得 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时，$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$”，易知 C 正确. 而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的，故 A、B 不正确. 由极限的定义可知“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界，故要求 $U^0(x_0,\delta)$ 中的 δ 较小，不能保证在任何的 $U^0(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 有界，所以 D 也不对.

解：应选 C.

例 8　当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

分析：由于当 $x\to 0^+$ 时，

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x},$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2},$$