数学素质培养丛书之二

杰出人物与方法论

李铁木 著

地震出版社

数学素质培养丛书之二

杰出人物与方法论

李铁木 著

地震出版社

1999

数学素质培养丛书之二

杰出人物与方法论

李铁木　著

责任编辑：李小明

责任校对：庞娅萍

地震出版社出版

北京民族学院南路9号

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　4.5印张　121千字

1999年1月第一版　　1999年1月第一次印刷

印数　0001－3000

ISBN 7-5028-1590-2/G・127

(2033)　定价：7.00元

前　言

摆在我面前的这套《数学素质培养丛书》，令我感慨万千。它的作者李铁木同志，论年龄比我还要晚一代人，现在正是他著书立说的黄金年华，竟然故去了。他利用业余时间创作的数学专著《分析提纲与证明》上、下两册，已于80年代由宇航出版社出版，得到数学界的好评。而这套旨在提高年轻一代乃至全民族的数学素质的丛书，编删取舍，历时十年，竟成了作者的封笔之作。想到作者生前未能见到它的出版，我不禁为之怅然。想到作者将毕生业余时间，献身于丰富我国的数学教育理论工作，作为一个从事教育工作逾半个世纪的老人，我不能不感到由衷的激动。科教兴国，全面提高中华民族的文化素质，就需要一批像李铁木同志这样执著的学者和作者。

我翻阅了李铁木同志的手稿，无论他的选题，还是他的表述，都令我赞叹不已。具体而言，本丛书中的公式树、方法论等内容是他个人独创，而将数学与哲学、尤其与美学专题相连进行深入的探讨，使原本相伴生的数学与哲学在分道扬镳多年后又在作者笔下回归合一，这样的科普著作我以为意义重大。数学具有逻辑思维的科学性，数量计算的普遍性，和运用领域的广泛性，这是一门人人要学好的基本学科，凡事都要努力做到“心中有数”，定量和定性结合。在功利主义影响日增的今天，能够静下心来，就数学的通俗化这个少人问津、无利可图的题目著书立说，没有信念的支持和热情的驱使，是不可能有始有终地完成这项非常富于开拓意义的工作的。我相信读者从这套丛书中汲取到的不仅是一个数学工作者对于数学专题的心得、领悟和创见，而且还能感受

到一个淡泊名利、追求真知的灵魂的呐喊。

基于以上所感，我郑重地向各界朋友推荐这部《数学素质培养丛书》。

中国教育学会顾问　张健
一九九八年八月

人　物　表

学生甲：大学数学系一年级学生
学生乙：大学数学系二年级学生
学生丙：大学数学系二年级学生
学生丁：大学数学系三年级学生
老　师：数学教员

目　　录

开 场 白

老　师　这一年来，我时常高兴地看到诸位在学习上的进步。特别是最小的一位也已成了大学生，还选择了数学为终身的主攻方向。我想，我们之间的共同语言是将会与日俱增的。

作为“科学的皇后”的数学，也毫无例外。数学史和数学方法论这两门学问，已引起了越来越多的人们高度的重视。

既然人类已有5000年的文明史，那么作为最古老的学问之一的数学，它自萌发到今天也大体上有这么长的历史。但不管怎样，直至17世纪以前的数学，其大致的内容均可在小学、中学的数学教科书里叙述。但是，仅隔三个世纪后的今天，其数学分支和科目之繁多，发展之迅速，使得即便是一个出色的数学家也已很难成为精通于数学各个领域的圣者。人们称当今是知识大爆炸的时代，知识的老化时刻在威胁着人们，学生的学习方法及老师的讲授方式也发生相应的战略性的改变。人们必须认真地对待千姿百态的、富有挑战性的未来。在这一历史关头，方法论的学习和研究将具有特别重要的意义。这一次就围绕数学史上的几件大事，重点讨论人们是通过什么方法得到的那些结果，在数学的发展中产生了怎样的影响等问题，讲座的名称就叫方法论。

学生乙　我们上两次的讲座（公式树、归纳法）是通过一些具体的例子，讲解演绎法和归纳法这两种重要的推理方法在数学研究中应用的。那么，这些是否也可看成是方法论范畴的呢？

老　师　如果大家是从方法论的观点接受的那些内容，那就更好。也唯其如此才是我们之间对话的真正目的。因为只有到那时，大家所得到的才不是几个有限的珠宝，而是挖掘矿藏的工具。

虽然，还很难确切地规定数学方法论所要研究的范围，与其它学科的明确界限等，但我认为从所研究的内容和方法的宏观、微观之差别，大体上可分为这么几个层次的不同类型。

第一类：数学中充满了辩证法，数学内部的矛盾运动是数学发展的内部动力。从哲学的观点出发，研究数学科目的特殊发展规律及解决矛盾的方法等等，就构成了这一类的方法论的主要内容。这里自然地将涉及到较多的哲学问题。

第二类：研究数学中普遍适用的一般数学方法，而这些方法在科学的其它各领域里都是适用的，如我们所讨论过的演绎法和归纳法就属于此一类。此外，我们将在后面还要谈到的归谬法、类比法、抽象分析法数学方法的移植等也都属于此一类的方法论，这时自然地将涉及到较多的逻辑学问题。

第三类：数学的发展和人类的生产实践和科学技术的需求是紧密相关的，即客观的需求是数学发展的外部动力。所以，撇开数学的具体内在矛盾，从人类的生产活动和科学技术发展史的观点研究数学中新思想、新方法的产生过程，就成了此类方法论的主要内容。对杰出数学家的思想形成过程的研究也属于此类的方法论，因为每一代杰出的数学家都是那个时代的（一般来说是必然的）产物。这里自然地将涉及到较多的科学史包括数学史。

方法论的这几种不同层次显然有其研究范围，但有时也很难指明它们之间不可逾越的确切界限又在哪里。如用方法论的观点深刻研究一个重大的数学事件，恐怕不允许这三类方法论中任何一方可袖手旁观的，实际上它们都将交叉地出现。

至于学习数学方法论会对我们有哪些意义，我不想在这里谈得更多。在结束这一次谈话之时，让我们一起来总结吧。近代科学大师爱因斯坦的一个十分风趣的公式似乎和我们的主题有关：

$$A=X+Y+Z$$

这里 A 代表成功；X 表示艰苦的劳动；Z 表示少说空话，而中间一项 Y——正确的方法！

下面各讲大体上是按照数学事件的年代次序排的，这也有助于使我们清楚地了解导致今日数学的来龙去脉。偶尔也迁就各讲之间的衔接性。

第一讲　欧几里德的几何学

——公理化数学的最早典范

老　师　在5000年人类文明历史的前头半个时期里，数学也逐渐形成并得到了不断的丰富。但是，在那漫长的发展道路上人们所获得的数学发现，不论是算术的还是几何的，虽然也灿如繁星，但都是孤立零散的，彼此之间没有有机的联系。即数学还没有成为一门系统的、理性的学问。到了公元前6世纪，（世界）数学史结束了它的第一个发展时期即萌芽时期，跨入了第二个发展时期即初等数学发展时期。这一新旧数学的发展时期的交接点，正是以一批古希腊哲学家、数学家们先后登场为标志的。

一、古希腊人的文明成就

在所有文明古国的古代灿烂文化中，对后来乃至当今世界的自然科学思想带来深远影响的，首当其冲的应算是古希腊人的文明成就。探讨古希腊的文明史可追溯到公元前28世纪。但作为科学的形成时期是从公元前6世纪开始的，当时在希腊已形成了农奴所有制。到了公元前5～4世纪，已是一派蓬勃景象：学派林立，思想活跃，人们广泛探讨着哲学、自然科学、艺术乃至伦理等领域的知识。如，对我们并不陌生的古希腊唯心主义哲学家、逻辑学的创始人亚里士多德(Aristoteles，约公元前384～约322)，他的老师、古希腊唯心主义哲学家柏拉图(Platon，约公元前427～约347)，后者的老师、古希腊唯心主义哲学家苏格拉底(Sokrates，约公元前469～约399)以及因有以他的名字命名的数学定理而被每一个中学生熟知的毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前582～约497)等人，都是这一历史时期的“各领风骚数百年”的各学派首领。由他们的思想综合而成的哲学是欧洲哲学史上第一个最庞大

的客观唯心主义哲学体系。他们学术思想活跃，不拘一格地广泛阐述着自己的见解，包括哲学的、数学的、物理的、天文的、逻辑的、伦理的、艺术的乃至美学的——在古代，科学和艺术不是分开的。这个时期，作为萌芽阶段的唯物主义哲学家的代表人物有赫拉克利特(Herakleitos，约公元前 540～约 480)，列宁称他为"辩证法的奠基人之一"，哲学家兼科学家泰勒斯(Thales 约公元前 636～约 546)，在历史上人们称他为"科学之祖"。虽然在这里不可能对他们的论著一一研究，但仅从上述的历史事件和评价中就可看出希腊的古典文化对后世科学的影响之大了。

学生丁　但我们还是想多了解一些古希腊人当时在和数学及方法论方面有关的成就。

老　师　这是和我们的主题有关的，所以有必要对古希腊的数学和亚里士多德的形式逻辑学作个概要的介绍。

历史上，希腊人曾崇拜过埃及和巴比伦地区的文化，认为那里是科学的创始地。所以曾有许多希腊人到那里学习。这样，在希腊的古文明中有这些地区的文明成分，也有自己创造的独步于古代世界的文明成果。前面提到的泰勒斯将埃及的地面测量几何改造成平面几何，他当时已发现了许多几何奥秘。如"直径平分圆周"、"三角形两边相等则对应的两角相等"、"两直线相交时对顶角相等"、"半圆的内接三角形必为直角三角形"等等。毕达哥拉斯学派已知道直角三角形中两个直角边的平方和等于斜边平方，并搞出由整数构成的直角三角形的一套办法，如当 m 为奇数时，m，$(m^2-1)/2$，$(m^2+1)/2$ 这三个数就是。虽然这里没有得出全部解，但可以看出他们将数学发现一般化的企图。这样的三个数组西方叫做毕达哥拉斯三元数组[①]。此外，人们认为这个学派还发现了平行线、多边形、球、正多面体的一些定理，知道三角

① 毕达哥拉斯定理和三元数组在中国叫商高定理和商高数组。在教学中也常称为勾股定理和勾股数组。此数组的全部解可由恒等式 $(m^2+n^2)+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ 给出。商高是周朝人，是世界上最早提出"勾三股四弦五"这一命题的人。

形内角和为180°等。他们还研究了许多几何作图问题。在对于数的认识上，这个学派研究了整数、整数列、素数等，$\sqrt{2}$作为最早发现的无理数，也是这个学派(叫做Hippasus)的人发现的。晚期的毕达哥拉斯学派及后继的一些学派如柏拉图学派的学者们，不断地丰富着古希腊的数学，他们把证明像$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，…这些数都是无理数(按他们的说法是和1不可比的，就是与1的比不能表成两个整数之比，这是现在无理数的定义)；已经知道正多面体最多只有五种，还研究了一些圆锥曲线，纠缠人们2000多年的古典三大几何作图难题也成了他们大力研究的对象。

对数学本质的认识，他们认为数学中的数或图像都是思维的产物，与实际事物不同，毕达哥拉斯学派就主张数学要研究抽象概念。在数学的方法论上，柏拉图学派已能重视演绎和证明。

上述事例说明：直到公元前3世纪希腊数学已有相当发展，积累了大量经验性的知识，但尚处在彼此缺乏联系的孤立状态。换言之，这时的希腊数学为非逻辑的、非理性的。这就需要有一个人从这繁茂芜杂中走出来，把这些分散而零乱的结果纳入统一的逻辑系统中。而完成了这一伟大业绩的是欧几里德(Euclid)。

为使数学从零星的、经验性的软弱状态中摆脱出来，成为强有力的理性的学问，必须要有相当的逻辑学为工具。古希腊学者们已能运用基本的思维法则进行数学演绎，而把这些逻辑规律加以规范化和系统化的，就是柏拉图的学生亚里士多德。恩格斯称他是“古希腊哲学家中最博学的人物”、“古代世界的黑格尔”。虽然他在甚多方面都有大量的著述，但最大的贡献是创立了逻辑学。今天所学的形式逻辑，在亚里士多德时期就已大体上形成了。他提出了基本逻辑原理：矛盾律——一个命题不能既是真的又是假的；排中律——一个命题必须要么是真的要么是假的，两者必居其一。这是归谬法的基本依据。他建立了相当完整的三段论，这是人们的思维和语言时普遍遵守的基本逻辑形式，也是一般数学问题的判断或论证中经常得到应用的逻辑形式。现在如果有人说

“所有三角形内角和都等于180°，直角三角形也是三角形，所以直角三角形的内角和也是180°”这一句话，我们自然认为他说的是完全正确的：前提正确，推理正确，结论正确。这里，人们已经自觉地或不自觉地运用了三段论的形式进行思考和表述的。亚里士多德的逻辑学是从对数学的研究中得到的，但他力图把思维和存在联系起来，按照现实来阐述逻辑的规律。不仅为使数学获得严密性提供了逻辑准则，也概括了古希腊的科学方法、辩证法。史学家们认为，希腊的古典文明到亚里士多德这里而告终。

以上那些不过是从浩瀚的史料中有关片断的摘引。如果大家想了解更详细内容，可阅读科学、数学史专著。从某种意义上可以说，上述的内容是本次讲座的基础。

二、欧几里德的几何学

如果说前一节里提到的那种古希腊人的数学成就和状态为新数学的产生提出了必要性，那么他们的逻辑学水平已为这种数学的问世提供了可能性。

继承古希腊数学的精华，把那些发现作为一系列逻辑推理的产物而系统地总结出来的人和著作中，最突出的是欧几里德（约公元前325～?）和他的《几何原本》。2000多年过去了，可是现在的中学生还要学习欧几里德的几何学，就已足见他的著作对后世的影响。自采用印刷术以来，《几何原本》（以下简称《原本》）[①]译成各种文字达数百次，行后出现1000多种版本。虽然在久远的流传过程中《原本》也曾被后世学者们增写、改写过，但至今的中学几何教材中直接取自《原本》的几何材料仍占很大比例。一些著名的数学家、科学家们都曾兴致盎然地回忆自己小时候学习

---

① 欧几里德的原著希腊名为 Στοιχεῖα，拉丁名 Elementa，英译作 Elements，就是《原本》之意。自从1607年中国明代科学家徐光启（1562～1633）和意大利传教士利玛窦合译此书时取名《几何原本》之后，中国一直按此流传。这里的简称《原本》其实是原名。

欧几里德几何学时的情景。本世纪的英国大数学家、哲学家和逻辑学家罗素(Russell，1871～1970)回忆说："我在十一岁的时候，开始学习欧几里德几何，并请我哥哥教我。这是我一生中的大事，它使我像初恋一样入了迷，我当时没有想到世界上还会有这样有趣的东西"。爱因斯坦(Einstein，1879～1955)回忆说："书中都是如此确定的论断，譬如三角形的三条高交于一点这个论断——虽然一点也不显然——还是可以得到非常精确的证明而不会使人怀疑。这种明澈和确定性给我留下了不可泯灭的印象"。从这些受益者们的追述中不难看出，欧几里德几何学之所以具有那般迷人的魅力，正是由于它的逻辑力量。是它的强大的逻辑力量，使学生明澈而不容置疑地学得几何学知识，是它的强大的逻辑力量，教师把讲授欧几里德几何学作为培养学生逻辑思维能力的重要途径，还是它的强大的逻辑力量，使欧几里德的几何学成为公理化数学的最早典范。而这最后一点，在数学史以至科学史上的贡献是远远超出了一门几何学的价值的。

学生丙 我们在中学里学习了欧几里德几何学，确实很有兴趣。但它对方法论方面具有很大意义这件事却是没有想到过。

学生甲 什么叫公理化数学？为什么说欧几里德几何学是最早的公理化数学呢？

老 师 下面就谈这些问题。好在上次在《归纳法》里介绍过自然数公理，在那里也曾说明了为什么在数学中总有一些基本概念是无法在数学范围内给出严格定义，为什么有些数学事实是无法在数学内部得出证明。明乎此理，就不难明白，在数学中允许有一些不经数学定义的基本概念，人们叫原始概念，也允许有一些不经数学证明的基本事实，人们叫做公理。一组公理构成一个公理系统，一个理想的公理系统要具备无矛盾性、独立性、完备性这三点重要性质，这些都是在《归纳法》里提到过的，在若干个不经定义的原始概念和一组公理的基础上，用逻辑推理的方法得出的一门演绎数学，就叫做公理化数学。因为欧几里德最早

用这种方法总结了古希腊的数学知识，写成了《原本》，所以这部具有划时代意义著作是公理化数学的最早典范了。

《原本》是欧几里德一生中完成的约十部著作中最重要的著作，共含十三卷，除大部分是几何学外，还有一些数论的内容。在第二篇归纳法里曾提到欧几里德有一个很巧妙的证明素数无限多的方法，正是在《原本》的数论部分里叙述的。人们最感兴趣又最称道的还是前面五卷的几何学部分。全书由定义、公设、公理和由此一一得到演绎证明的四五百个定理所组成，这与今天的数学教程的结构是一样的。书中的五个公设和五个公理是——

公设：

1. 从任一点到另一点作直线[是可能的]；

2. 把有限直线不断循此直线延长[是可能的]；

3. 以任一点为中心和任一距离[为半径]作一圆[是可能的]；

4. 所有直角彼此相等；

5. 若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直觉无限延长后必相交于该侧的一点。

公理：

1. 跟同一件东西相等的东西，它们彼此也相等；

2. 等量加等量，总量仍相等；

3. 等量减等量，总量仍相等；

4. 彼此重合的东西是相等的；

5. 整体大于部分。

此上就是欧几里德赖以演绎的无经证明的数学依据。

学生甲 “公设”又是什么呢？还有，五个公设中前几个都很直观，似乎没有特意肯定一番的必要，而第五个则像一个证明题，似乎需要证明。特别是，我们在中学几何里知道欧几里德有一个很出名的公理叫平行线公理，可这里怎么就没有呢？

老 师 现在让我逐一试答。一，“公设”一词是亚里士多德首先用的。他主张把公设与公理加以区别，把适用于一切科学的

不言自明的真理叫公理，把只适用于某一门科学的真理叫公设。显然欧几里德是接受了亚里士多德的术语的。现在的人们已习惯于统称之为公理了。二，前面几个一望而知的公设又有什么意义呢？人们只有首先解决了某种图形是可绘出的之后才能把图形视为数学对象来研究，而那几个公设就肯定了线段、直线、圆等都是可作出的，而且这也意味着他的几何作图问题只能用直尺和圆规完成的，这也正是欧几里德几何学的一个特点。三，最后一个公设正是自始至今一直令人瞩目的著名的“第五公设”。由于叙述很繁，后人用另一等价命题“过直线外一点只能引一条直线与已知直线不相交”来代替，这就是有名的平行线公理。但不论采取哪一种叙述方式，这个命题确实不像前几个那样一目了然，这就是引起人们 2000 年来的怀疑、争论的原因。这里附带说明：前面也曾提到过《原本》在漫长的流传过程中有不少后人的改动、更正的补充，不同的版本对公理的记载有所出入，连数学史家们也莫衷一是，这里只能援引其中较为流行的说法，好在我们的着眼点始终是在方法论上，对历史细节的考证对我们来说不是第一位的。

学生丁　《原本》中是否也有不经定义的原始概念呢？

老　师　这又是一个问题。从形式逻辑的观点看，越是努力保持严密性的一门演绎数学，越需要对每一新概念给出数学的定义。那么，头一批概念如何来定义呢？只能从数学以外的知识中给出它们的规定性。否则，或者出现逻辑循环的毛病，或者陷入无止境地寻求定义项的定义的事务中，这是一个无终期的过程，所以实际上也是做不到的。可见，《原本》当然也需要不经定义的原始概念。如点、线、面等就是。可是，欧几里德却用心良苦地为这些概念给出了所谓的定义。如在他的定义中有：

1. 点是没有部分的那种东西；
2. 线是没有宽度而只有长度的那种东西；
3. 面是只有长度和宽度的那种东西，等等。

显然，这些所谓的定义都未用已定义的数学概念，其实都算