

闻邦椿 李以农 徐培民 韩清凯 编著

# 工程非线性振动

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 工程非线性振动

闻邦椿 李以农 徐培民 韩清凯 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是作者所在科研团队长期从事“工程非线性振动”教学和科研工作的总结。本书从非线性振动理论在工程技术领域得到广泛应用的实际情况出发,首先列举了工程技术领域中的若干非线性振动实例,进而系统讲述了非线性振动问题的主要求解方法:等价线性化与谐波平衡法、传统小参数法和多尺度法、平均法和渐近法、图解法与数值法、点映射和胞映射法等;接着进一步论述了非线性振动系统的若干动态特性,其中包括非线性振动系统的共振与非共振、稳定振动和不稳定振动、频率俘获和振动同步、慢变和突变、分岔与混沌等;最后研究了非线性振动系统的工程应用,如光滑非线性振动系统和分段线性非线性振动系统、滞回与时滞非线性振动系统、自激振动系统与带有冲击的振动系统、非线性波及波能传输的理论 and 应用,以及若干典型非线性振动系统的利用与控制等。

本书可作为工程专业的研究生和高年级本科生及从事振动研究和设计的工程技术人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

工程非线性振动/闻邦椿等编著. —北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-019606-4

I. 工… II. 闻… III. 工程力学-非线性振动 IV. TB123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 124438 号

责任编辑:马长芳 于宏丽 / 责任校对:刘小梅  
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

深海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年8月第一版 开本:B5(720×1000)

2007年8月第一次印刷 印张:26 3/4

印数:1—3 000 字数:520 000

定价:48.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

## 本书第一作者简介



闻邦椿,原籍浙江温岭,1930年9月生于浙江省杭州市,1957年研究生毕业于东北工学院机械系。现为东北大学机械工程与自动化学院教授,机械电子工程研究所名誉所长,IFTToMM(国际机器理论与机构学联合会)中国委员会委员,国际转子动力学技术委员会委员,亚太振动会议指导委员会委员,中国振动工程学会名誉理事长,上海交通大学“振动、冲击、噪声”国家重点实验室学术委员会名誉主任。曾任第六、七、八、九届全国政协委员,第二、三、四届国务院学位委员会机械工程学科评议组成员,中国振动工程学会理事长和《振动工程学报》主编等。现任或曾任全国20余所大学的兼职教授、顾问教授和名誉教授,兼任北京吉利大学校长等职务。1984年被评为全国第一批有突出贡献的中青年专家,1991年当选为中国科学院院士。

闻邦椿院士系统研究和发展了振动学与机器学相结合的新学科——振动利用工程学,还在转子动力学、机械系统非线性振动理论及应用、机械故障的振动诊断、机电一体化以及机械产品设计理论与方法等方面进行了系统深入的研究。曾发表论文700余篇,SCI、EI和ISTP三大检索的论文250余篇,专著和主编的论文集10余部,被引用2980余次。指导研究生100余名,已有70名研究生取得了硕士学位,55名研究生取得了博士学位,还曾指导博士后10名、俄罗斯和哈萨克斯坦访问学者各1名。曾应邀去日本、德国、澳大利亚等国讲学,参加过在美、英、日、澳、加、意、韩、保、匈、新、马、芬、前苏联、西班牙等20余个国家召开的国际学术会议,宣读论文50余篇,并多次应邀做大会报告,还曾访问德、波、瑞士、瑞典、乌克兰、拉脱维亚、泰国、朝鲜等国。他曾主持召开国际学术会议4次,主编国际学术会议论文集4种。

闻邦椿院士完成了数十项国家和横向重大科研项目,包括国家自然科学基金重大项目、重点项目、面上项目和973、863项目等,曾获国际奖两项,国家发明奖和科技进步奖4项,省、部、委级奖10余项,全国优秀科技图书奖2项,2006年还获得中国工程院颁发的光华工程科技奖,申请与被批准的国家专利10项。有多项成果达到国际先进水平或国际领先水平,取得了重大的经济效益和社会效益。

本书是他领导的科研团队所取得的重要科学研究成果之一。

## 前 言

在物质世界里到处存在着各种形式的振动(包括波动)。人体的许多器官每时每刻都处在振动之中,例如,心脏的搏动、脉搏的跳动、血压或高或低的变化、胃的蠕动、肺部的张缩呼吸、耳膜和声带的振动等。人类离不开这些有用的振动,在人类生活的环境中,振动也是无处不在,如汽车、火车、飞机及机械设备的振动,家用电器、钟表的振动,地震以及电、磁、声、光的波动等;广义来看,在社会经济生活中,经济发展速度的增长与衰减、股市的升跌和振荡等,都可以归纳为不同形式的振动;在自然界及宇宙中,振动和波动的例子也是不胜枚举,如月亮的圆缺、潮汐的涨落等。

振动可分为有害振动和有用振动两大类。有害振动会给人民生活带来诸多不便,给生产造成巨大破坏。例如,运载工具的振动会使乘客感到不舒适,环境噪声会使人烦躁不安,共振及次谐波振动会引起机械设备、桥梁结构及飞机的破坏,地震会使人民生命财产遭受巨大损失等。对于这些有害振动,科技工作者付出了很大的努力,提出了一些有效措施来限制以至完全消除这些有害振动,但仍然还有许多有害的振动问题没有被深入研究和解决。例如,直到现在还没有办法对地震进行准确的预报和预防。

振动也有诸多的用途,合理地利用振动能改善人民的生活、给人类造福。例如,拨动琴弦能发出美妙动人的音乐;在医疗方面,利用超声波能够诊断、治疗疾病;在土建工程中,常用到振动沉桩、振动拔桩以及混凝土灌注时的振动捣固等技术;在电子和通信工程方面,录音机、电视机、收音机、程控电话等诸多电子器件以及电子计时装置和通信系统使用的谐振器,都是由于振动才能有效的工作;在工程地质方面,利用振动进行检测和地质勘探;在原油开采上,还可利用振动提高原油产量;在海洋工程方面,海浪波动的能量可以用来发电;在许多工矿企业,利用振动设备可完成许多工艺过程,提高某些机器的工作效率。最近三十多年来,应用振动原理而工作的机器(振动机械)得到了迅速的发展。据不完全统计,目前已用于工业生产的振动机有数百种之多,如振动压路机、振动给料机和振动成型机等。

为了最大限度地抑制那些有害振动,以及有效地利用有用振动,首先要弄清振动的机理,揭示振动的内在规律及其外部影响因素。在此基础上,进一步采取有效措施,对振动与波动实行有效控制及利用,以便减轻和消除它对人类生活和生产所造成的有害影响,使有用的振动与波动更好地为人类服务。

振动按其特性可分为线性振动和非线性振动两类。严格地说,绝大多数振动

系统都是非线性的。在非线性因素较弱的情况下,非线性振动系统可按线性振动系统来近似处理。但是,工程中的不少非线性振动问题是在忽略非线性因素的情况下进行分析与计算,所得的结果与实际情况相比会有很大的误差,甚至会得出错误的结论,这是因为在非线性振动与线性振动之间存在着许多本质的区别,因此只有利用非线性振动的理论和方法,才能弄清那些非线性振动问题。国内外的许多科学技术工作者都曾致力于非线性振动理论的研究,力图提出比较完善的方法来处理这些非线性振动问题。最近一个时期非线性振动的研究工作得到了较大的发展,无论是关于定量研究还是定性研究都提出了一些新的方法,特别是对混沌现象的揭示及对其研究得到的一些结果,被认为是 20 世纪科学领域的重大发现和重要成就之一。由于近三十年来计算机技术的迅速发展,许多非线性振动问题可以借助数值计算与数值模拟方法予以解决,这就使得非线性振动问题的研究向前推进了一大步。

本书是作者在从事非线性振动教学与科研三十多年的基础上编著而成的,撰写的出发点是以工程应用为目的,因此本书以讲述工程中的非线性振动问题的定量计算方法为重点,介绍如何运用这些方法,并举出了一些应用实例,有关定性方面的问题只讲述一些必要的基本知识。

本书主要研究工程中的非线性振动问题,主要内容包括:①列举工程技术部门中若干工程应用实例;②讨论非线性系统的建模及其求解方法;③研究非线性振动系统若干特性及其工程应用;④研究某些非线性振动系统的利用与控制。

本书力图从以下几个方面突出它的特点:

(1)从工程实际问题出发,讨论各种工程非线性振动问题的建模方法。

(2)为使读者较全面地掌握非线性振动系统的定量求解方法,本书较系统地讲述了非线性振动问题的各种求解方法,如等价线性化法与谐波平衡法、传统小参数法与多尺度法、平均法与渐近法、图解法与数值法、点映射法与胞映射法等。

(3)研究工程中非线性振动系统的一些动态特性:非线性振动系统的共振与非共振、非线性振动系统的稳定振动与不稳定振动、慢变与突变、非线性振动系统的频率俘获及振动同步、非线性振动系统的分岔与混沌等。

(4)讨论工程中常用的光滑非线性和分段线性非线性振动系统、滞回和时滞非线性振动系统、自激振动系统和带有冲击的非线性振动系统等。

(5)随着控制理论在工业技术领域的推广应用,工程非线性振动的控制技术也得到了突飞猛进的发展。因此,书中也叙述了非线性振动系统控制的内容。

(6)举出了工程中非线性振动系统及其动态特性具体利用的实例。

(7)鉴于振动利用工程学的发展,还叙述了非线性波动的传递及其应用的实际问题。

本书共分 16 章,第 1 章列举了工程技术中若干非线性振动实例与一些典型

的非线性振动方程式;第2~6章分别讨论等价线性化法和谐波平衡法、传统小参数法与多尺度法、平均法与渐近法、图解法与数值法及点映射与胞映射法等;第7~11章讨论非线性振动系统的动态特性,其中包括非线性振动系统的稳定振动与不稳定振动、近共振与非共振、慢变与突变、频率俘获与振动同步、分岔与混沌等;第12~16章介绍光滑非线性系统与分段线性非线性振动系统、滞回与时滞非线性振动系统、自激振动系统与带有冲击的非线性振动系统、非线性波动的理论及应用和若干典型非线性振动系统的利用与控制等。

特别应该指出的是,本书是我课题组正在执行的“现代机构创新及机械系统动态优化设计理论与方法的研究”国家自然科学基金重点项目(50535010)的部分成果。

本书由闻邦椿教授、李以农教授、徐培民教授和韩清凯教授等编写,在撰写过程中得到了关立章、文成秀、纪盛青、刘杰、张天侠、刘树英、张义民、袁惠群等教授的支持与协助,以及任朝晖、李鹤、姚红良、李小彭、王宗勇等博士的热情帮助。在编写本书的过程中,作者曾得到同行专家黄文虎院士、陈予恕院士、徐建学教授、关立章教授和胡海岩教授等的大力帮助,他们对本书的内容提出了不少宝贵的修改意见,在此一并向他们致以衷心的感谢。

由于水平所限,书中难免有不妥之处,希望读者给予指正。

闻邦椿

2007年3月20日

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 概论</b> .....	1
1.1 研究非线性振动问题的工程意义 .....	1
1.2 工程非线性振动实例 .....	3
1.3 一些典型的非线性振动微分方程.....	23
1.4 研究非线性振动问题的常用解析方法与数值方法.....	28
1.5 研究工程中非线性振动问题的实验方法与动态仿真.....	29
计算与思考 .....	31
<b>第 2 章 等价线性化法与谐波平衡法</b> .....	32
2.1 等价线性化法.....	32
2.2 谐波平衡法.....	38
计算与思考 .....	40
<b>第 3 章 传统小参数法与多尺度法</b> .....	41
3.1 传统小参数法.....	41
3.2 多尺度法.....	51
计算与思考 .....	77
<b>第 4 章 平均法与渐近法</b> .....	79
4.1 平均法.....	79
4.2 单自由度非线性系统的渐近法.....	87
4.3 弱非线性多自由度系统的渐近法 .....	106
计算与思考.....	118
<b>第 5 章 图解方法与数值方法</b> .....	120
5.1 相平面作图法 .....	120
5.2 李纳(Liénard)作图法 .....	124
5.3 数值解法 .....	128
计算与思考.....	133
<b>第 6 章 点映射法与胞映射法</b> .....	135
6.1 点映射法 .....	135
6.2 胞映射法 .....	138



计算与思考·····	147
<b>第 7 章 非线性振动系统的稳定振动与不稳定振动</b> ·····	149
7.1 研究的意义及主要方法·····	149
7.2 常系数线性系统的稳定性·····	151
7.3 非线性系统稳定性的一次近似判别法·····	152
7.4 线性周期系数系统的稳定性·····	156
7.5 李雅普诺夫直接方法·····	158
7.6 中心流形判别法·····	159
7.7 应用举例·····	161
计算与思考·····	167
<b>第 8 章 非线性振动系统的近共振与非共振</b> ·····	169
8.1 概述·····	169
8.2 非线性振动系统的幅频曲线及其特点·····	169
8.3 近共振情况下振动的计算·····	174
8.4 非共振情况下振动的计算·····	178
8.5 非共振—近共振—非共振的慢变过渡过程·····	182
计算与思考·····	185
<b>第 9 章 非线性振动系统的慢变与突变</b> ·····	186
9.1 研究非线性振动系统慢变与突变的意义·····	186
9.2 慢变参数非线性振动系统的渐近方法·····	187
9.3 转子系统的慢变过程与分段慢变过程的非线性动力学·····	195
9.4 双参数慢变的故障转子系统非线性动力学·····	205
9.5 非线性振动系统的突变·····	209
计算与思考·····	213
<b>第 10 章 非线性振动系统的频率俘获与振动同步</b> ·····	215
10.1 非线性振动系统的频率俘获·····	215
10.2 非线性振动系统的振动同步及其应用·····	216
计算与思考·····	235
<b>第 11 章 非线性振动系统的分岔与混沌</b> ·····	236
11.1 分岔概述·····	236
11.2 静态分岔与动态分岔·····	242
11.3 分岔问题的研究方法·····	245
11.4 分岔的应用举例·····	249
11.5 混沌概述·····	251

---

11.6	耗散系统及奇怪吸引子	255
11.7	分析混沌的方法	259
11.8	混沌的应用举例	266
	计算与思考	270
<b>第 12 章</b>	<b>光滑非线性振动系统与分段线性非线性振动系统</b>	<b>271</b>
12.1	光滑非线性振动系统的利用	271
12.2	分段线性非线性振动系统的工程应用	277
	计算与思考	284
<b>第 13 章</b>	<b>滞回非线性振动系统与时滞非线性振动系统</b>	<b>285</b>
13.1	工程中滞回非线性系统的数学模型	285
13.2	振动压实过程不对称滞回系统的非线性振动分析	290
13.3	带有间隙的滞回系统	292
13.4	时滞系统非线性振动	299
	计算与思考	305
<b>第 14 章</b>	<b>自激振动系统与带有冲击的非线性振动系统</b>	<b>306</b>
14.1	自激振动系统的应用	306
14.2	转子-轴承系统的油膜振荡	308
14.3	转子系统油膜失稳的振动实验	313
14.4	机床切削颤振的非线性振动分析	316
14.5	带有冲击的非线性振动系统的工程应用	319
	计算与思考	321
<b>第 15 章</b>	<b>非线性波及波能的传递理论及应用</b>	<b>323</b>
15.1	振动采油工程中应力波的传递	323
15.2	结构健康诊断中应力波的传递	330
15.3	声波利用中的非线性问题	342
15.4	超声波利用中的非线性问题	345
	计算与思考	349
<b>第 16 章</b>	<b>非线性振动的利用与控制</b>	<b>350</b>
16.1	非线性振动利用举例	350
16.2	非线性振动控制举例	355
	计算与思考	369
	参考文献	370
	附录 非线性动力系统数值分析演示程序	392

# 第 1 章 概 论

## 1.1 研究非线性振动问题的工程意义

在人类生活的物质世界里,振动(包括波动)随处可见,这不仅说明在人类的周围环境中存在着振动,而且人体自身的许多器官及循环系统也都处在持续的振动之中。人类很早就开始和那些有害的振动展开了百折不挠的斗争,总是千方百计预防和限制以至消除它带来的危害,如对待地震就是如此;另一方面,人类也设法利用那些有用的振动,使它更好地为人民服务,为人类造福。

振动的种类繁多,形式各异,它们存在于各个角落、各种场所、各个领域。例如,建筑物和机器的振动,地震、声和光的波动、无线电技术和电工学中的振动、磁系中的振动、控制系统的振动、同步加速器与火箭发动机中的振动。此外,还有生物力学及生态学中的振动、化学反应过程中的振动,以及社会经济领域中的振动等。自然界与工程中存在的振动可分为线性振动与非线性振动两大类,就机械振动而言,线性振动是指该系统中的恢复力、阻尼力和惯性力分别是位移、速度和加速度的线性函数,不具备上述线性关系的振动则称为非线性振动,自然界与工程技术各领域中的振动,绝大多数都属于非线性振动这一类。

随着工业与科学技术的迅速发展,在工程技术各领域中遇到的大量非线性振动问题亟待被深入研究和解决。对这类问题的研究工作大致可以分为以下三方面:①非线性振动的机理;②非线性振动的抑制和控制;③非线性振动的利用。

目前在工程技术领域中,对许多非线性振动机理的研究还很不深入,或者说还没有获得充分的研究。例如,对于一些在复杂非线性因素影响下的强非线性多自由度系统的精确求解、复杂时变过程的特性、复杂系统失稳的机理、复杂自激振动的形成和发展过程、一些重大机械设备产生重大事故和发生破坏的原因、亚谱分岔解的形成、混沌运动的产生等。

在抑制与控制有害的非线性振动的研究工作方面,也存在大量的问题亟待解决。众所周知,地震会给人民生命财产造成重大损失,但目前有关地震的预报及预防还停留在有限的水平上,直到现在还没有一种较完善和可靠的技术对地震进行准确监测、预报和预防。国内外,重大机械设备屡屡发生严重的振动破坏事故,每一事故的发生都会造成重大的经济损失,目前虽已研制出一些可进行在线监测和诊断的设备,但其准确性和可靠性还没有达到理想的地步。火箭发射失败多数也

是由于振动或控制失灵所引起的,提高其工作可靠性是研究人员一项迫切需要完成的任务。在水下航行的潜艇,由于噪声过大,极易暴露目标,如何降低噪声和对噪声进行控制,自然是设计与开发潜艇的头等重要课题。上述例子多数属于非线性振动问题,因此,加强对非线性振动抑制和控制的研究是一项十分迫切的任务。

近二十年来,非线性振动的利用得到迅速发展,人类在生产和生活中,几乎一刻都离不开振动。目前,振动已成为人类生活与工农业生产等方面的一种不可缺少的环节和必要的机制。例如,一些作物的种子采用射线适当处理,可以提高产量;在医疗方面,利用超声可诊断与治疗多种疾病;在工程地质领域,利用振动可以对地下资源进行勘探,在石油开采工作中,利用振动可提高原油产量;在海洋工程方面,海浪波动的能量可以用来发电;在土建工程中,振动也得到了广泛利用,如振动沉拔桩、振动夯土、筑路机械的振动压实(压路)与振动摊铺,以及浇灌混凝土时的振动捣实等;在冶金、煤炭、化工、轻工、机械、电力、食品加工等部门,广泛应用振动给料、振动输送、振动筛分、振动冷却、振动烘干、振动破碎、振动粉磨和振动脱水等作业过程;在电子仪器和仪表及通信工程方面,如录音机、电视机、收音机、程控电话、电子计时装置和通信设备中使用的谐振器等都是由于利用了振动才能有效地工作;人类借助于电磁波实现无线电通信,传递信息,成为当今信息时代人类相互联系不可缺少的桥梁和纽带;光在光导纤维中的传播也是一种特殊形式的波,利用光纤来代替通电的导线,其重大的应用价值是无法估量的。从前面举出的一些例子不难看出,振动对人类的生活和生产是多么的重要!上述列举的问题绝大多数也都属于非线性振动的范畴,这些问题的研究和解决将会大大地促进工农业生产和科学技术的发展,并造福于人类。

非线性振动的研究工作已取得了许多重要成果<sup>[1~538]</sup>,并且已经解决了理论上和工程应用上的诸多问题,但到目前为止,还有很多问题没有彻底解决。目前工程上对多数非线性振动问题仍采用一些近似方法或在忽略非线性因素的情况下进行分析计算,因而在多数情况下所得结果与实际结果相比较有较大的误差,甚至会得出错误的结论。这是因为线性振动和非线性振动有许多本质的区别。因此,在最近一个时期,科技工作者对许多非线性振动问题进行了深入研究,在定量研究或是定性研究方面都提出了一些新的有效方法。特别是近三十年来,对混沌运动现象的揭示及对其开展的研究工作,被认为是当今科学领域的重大发现和重要成就之一。此外,由于近二十年来计算机技术的迅速发展,许多非线性振动问题可以借助数值计算与数值模拟方法予以解决,这就使得非线性振动问题的解法向前推进了一大步。但是由于非线性振动问题的复杂性,彻底解决非线性问题,在数学和力学上仍存在一定的难度,因而直到现在仍然有很多问题亟待进行研究和解决。这些问题包括:

- (1) 复杂非线性振动系统的建模、系统参数的识别方法与试验;

- (2) 由流体或其他非线性因素激发的复杂非线性系统振动的机理;
- (3) 多自由度强非线性振动问题的精确求解方法;
- (4) 多自由度非线性振动系统的各种类型的分岔;
- (5) 复杂非线性振动系统的混沌运动;
- (6) 非线性振动系统失稳机理及系统的局部和全局稳定性;
- (7) 时变(包括参变、慢变、时滞及瞬态过程)非线性振动系统的特性;
- (8) 复杂非线性振动系统的自激振动;
- (9) 带有冲击的非线性振动系统的振动机理与振动特性;
- (10) 非线性系统振动的不稳定性振动及其控制;
- (11) 有关非线性振动的动态过程及其利用;
- (12) 与非线性振动有关的设备或结构破坏的机理及故障的诊断方法;
- (13) 在复杂因素影响下的非线性波的机理及其控制与利用;
- (14) 板壳及复杂结构在大变形情况下的非线性振动的研究;
- (15) 复杂建筑结构和跨度桥梁在特殊载荷下的颤振与弛振;
- (16) 复杂非线性结构的解耦和数值计算及优化方法。

加强对上述问题的研究,无疑会在不同程度上取得相应的新进展,并会促进工农业及科学技术进一步的发展,进而为国家创造重大的经济效益和社会效益。

## 1.2 工程非线性振动实例

工程中的振动问题可以归纳为线性振动和非线性振动两大类。

线性振动可以由线性微分方程加以描述。一般机械系统的线性振动方程可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.1)$$

式中, $m$ 为振动质量; $c$ 为阻力系数; $k$ 为弹簧刚度; $\ddot{x}$ 、 $\dot{x}$ 、 $x$ 为振动的加速度、速度和位移; $f(t)$ 为干扰力或激振力, $t$ 为时间。

式(1.1)中的惯性力 $m\ddot{x}$ 、阻尼力 $c\dot{x}$ 及弹性力(或称恢复力) $kx$ 分别是加速度 $\ddot{x}$ 、速度 $\dot{x}$ 及位移 $x$ 的线性函数;也就是说,质量 $m$ 、阻力系数 $c$ 、弹簧刚度 $k$ 为常数,所以方程(1.1)是线性微分方程,用线性微分方程描述的振动系统称为线性系统。

非线性振动可以由非线性微分方程加以描述。多数机械系统的非线性方程可表示为

$$m\ddot{x} + f_c(\dot{x}, x) + f_k(x, x) = f(t) \quad (1.2)$$

式中, $f_c(\dot{x}, x)$ 为非线性阻尼力; $f_k(x, x)$ 为非线性弹性力。

在某些特殊情况下,惯性力、阻尼力和弹性力是加速度 $\ddot{x}$ 、速度 $\dot{x}$ 及位移 $x$ 的

非线性函数<sup>[243]</sup>, 这时非线性方程为

$$f_m(\dot{x}, \dot{x}, x) + f_c(\dot{x}, \dot{x}, x) + f_k(x, \dot{x}, x) = f(t) \quad (1.3)$$

式中,  $f_m(\dot{x}, \dot{x}, x)$  为非线性惯性力;  $f_c(\dot{x}, \dot{x}, x)$  为非线性阻尼力;  $f_k(x, \dot{x}, x)$  为非线性弹性力。

在非线性振动的微分方程式中, 非线性惯性力、非线性阻尼力或非线性弹性力不是加速度  $\ddot{x}$ 、速度  $\dot{x}$  及位移  $x$  的线性函数, 也就是说, 惯性力、阻尼力或弹性力并不分别与加速度  $\ddot{x}$ 、速度  $\dot{x}$  及位移  $x$  的一次方成正比。

在某些振动系统中, 干扰力也是加速度  $\ddot{x}$ 、速度  $\dot{x}$  及位移  $x$  的非线性函数, 其表示式为  $f(x, \dot{x}, x, t)$ , 这类方程也是非线性方程。下面对含非线性惯性力的振动系统、含非线性阻尼力的振动系统、含光滑非线性恢复力的振动系统、含分段线性非线性恢复力的振动系统、含滞回恢复力的振动系统、自激振动系统、带有冲击的非线性振动系统、考虑涡动时转子系统的非线性振动、非线性弹性体的振动、非线性波动、含非线性作用力的多自由度的振动系统、慢变参数振动系统、参数激励的振动系统、时滞系统等 17 类振动问题分别举出应用实例, 并写出它们的运动微分方程。

### 1.2.1 含非线性惯性力的非线性振动系统

工业中应用的振动机械, 如振动输送机、振动冷却机、振动离心脱水机、振动磨机、振动筛、振动给料机和振动落砂机等, 都是通过振动对物料进行加工或处理的。在这些工艺过程中, 物料有时与振动机体一起运动, 有时离开机体, 对机体做相对滑动或跳动。因此, 在一个振动周期内, 计及物料质量的系统是属于含有分段质量的非线性振动系统, 该系统包含非线性惯性力, 下面举出两个例子<sup>[236, 239~241]</sup>。

#### 1. 考虑物料断续滑动的弹性连杆式振动输送机系统

如图 1.1 所示, 当考虑物料沿机体断续滑动时, 弹性连杆式振动输送机的运动方程为

$$\begin{cases} m_p \ddot{S} + f_s \dot{S} + m_m \ddot{S} \sin^2 \delta + F_m(x, \dot{x}, x) \cos \delta + kS = k_0(rs \sin \nu t - S) \\ F_m(x, \dot{x}, x) = \begin{cases} m_m \ddot{S} \cos \delta & \varphi_m - 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_k \\ f_s m_m (g + \ddot{S} \sin \delta) & \varphi_k < \varphi < \varphi_m \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

式中,  $m_p$ 、 $m_m$  为工作机体质量与物料质量;  $f_s$  为阻力系数;  $k$ 、 $k_0$  为主振弹簧刚度和连杆弹簧刚度;  $S$ 、 $\dot{S}$ 、 $\ddot{S}$  为机体沿振动方向的位移、速度和加速度;  $x$ 、 $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$ 、 $y$ 、 $\dot{y}$ 、 $\ddot{y}$  为机体沿  $x$  和  $y$  方向的位移、速度和加速度,  $x = S \cos \delta$ ,  $y = S \sin \delta$ ;  $\delta$  为振动方向角;  $F_m(x, \dot{x}, x)$  为  $x$  方向物料的非线性作用力;  $\nu$  为振动频率;  $t$  为时间;  $f$  为物料对机体的动摩擦系数;  $\varphi_k$ 、 $\varphi_m$  为物料正向滑动开始和终止的相位角。

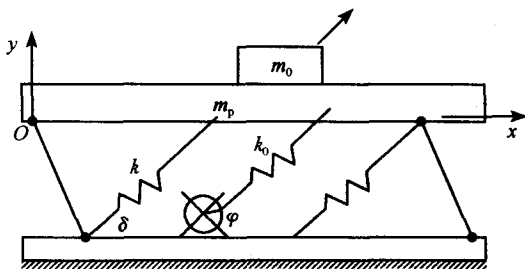


图 1.1 弹性连杆式振动输送机的振动系统

2. 被清理的铸件与振动落砂机的机体所组成的振动系统

振动落砂机是铸造厂常用的一种振动机械(图 1.2(a)),它利用机体的振动对铸件进行清砂。假如该落砂机的铸件处在轻微抛掷的情况下工作,则在机体振动的每一周期内,铸件有时与机体接触,在铸件与机体彼此接触的时间内,它们的加速度是相等的;而当振动机体的加速度大于某一定值时,铸件便离开机体做抛掷运动;经过一定时间后它又落到机体上,并与机体产生冲击;然后,又与机体一起运动。因此铸件在机体上的运动可分为三个阶段(图 1.2(b)):

- (1) 符合运动:铸件与机体一起运动阶段(振动相位角由  $\varphi_{a1} \rightarrow \varphi_{a2}$ );
- (2) 抛掷运动:铸件被抛起阶段(振动相位角由  $\varphi_{b1} \rightarrow \varphi_{b2}$ );
- (3) 冲击运动:铸件落下时与机体产生冲击阶段(振动相位角由  $\varphi_{c1} \rightarrow \varphi_{c2}$ )。

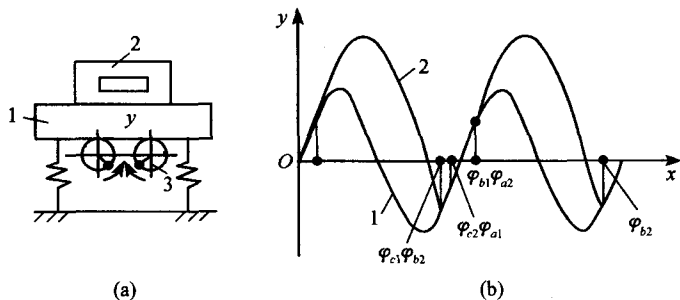


图 1.2 铸件在振动落砂机上的运动图

- (a) 振动落砂机机构图,其中 1 为机体,2 为铸件,3 为激振器;
- (b) 机体与铸件运动位移图,其中 1 为机体位移曲线,2 为物料位移曲线

在这三个阶段中,机体的惯性力及铸件对机体的冲击作用力的综合表达式为

$$f_m(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \begin{cases} (m_p + m_m)\ddot{y} & \varphi_{a1} \leq \varphi \leq \varphi_{a2}, t_{a1} \leq t \leq t_{a2} \\ m_p\ddot{y} & \varphi_{b1} < \varphi < \varphi_{b2}, t_{b1} < t < t_{b2} \\ m_p\ddot{y} + F_c(t) & \varphi_{c1} < \varphi < \varphi_{c2}, t_{c1} < t < t_{c2}. \end{cases} \quad (1.5)$$

式中,  $m_p$ 、 $m_m$  为振动机体的质量及铸件的质量;  $F_c(t)$  为冲击作用力;  $t_{a1}$ 、 $t_{a2}$ 、 $t_{b1}$ 、 $t_{b2}$ 、 $t_{c1}$ 、 $t_{c2}$  为符合运动阶段、抛掷运动阶段和冲击运动阶段的初始瞬时和终结瞬时;  $\phi_{a1}$ 、 $\phi_{a2}$ 、 $\phi_{b1}$ 、 $\phi_{b2}$ 、 $\phi_{c1}$ 、 $\phi_{c2}$  为符合运动阶段、抛掷运动阶段和冲击运动阶段的初始振动相位角和终结振动相位角。

因此, 振动落砂机的运动方程是非线性方程, 并可表示为

$$f_m(\dot{y}, \dot{y}, y) + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \nu t \quad (1.6)$$

假如铸件在机体上做轻微抛掷运动, 冲击作用力可以忽略不计, 这时变质量非线性惯性力可表示为

$$f_m(\dot{y}, \dot{y}, y) = \begin{cases} (m_p + m_m)\dot{y} & \varphi_{a1} \leq \varphi \leq \varphi_{a2}, t_{a1} \leq t \leq t_{a2} \\ m_p \dot{y} & \varphi_{b1} < \varphi < \varphi_{b2}, t_{b1} < t < t_{b2} \end{cases} \quad (1.7)$$

在这种情况下, 非线性特性的产生来源于一个周期内铸件抛离工作机体表面而引起整个振动系统质量的变化。

铸件抛离工作机体的相位角  $\varphi_{b1}$ 、 $\varphi_{b2}$ , 可按照振动机上物料运动的理论进行计算<sup>[108]</sup>, 而铸件与机体接触的相位角  $\varphi_{a1}$ 、 $\varphi_{a2}$ , 可按下式算出:

$$\varphi_{a2} = \varphi_{b1}, \quad \varphi_{b2} = \varphi_{a1} \quad (1.8)$$

当振动落砂机的参数确定以后, 便可求出  $\varphi_{a1}$ 、 $\varphi_{a2}$ 、 $\varphi_{b1}$ 、 $\varphi_{b2}$ , 进而求出非线性方程的解。

### 1.2.2 含非线性阻尼力的非线性振动系统

含非线性阻尼力振动系统的工程实例很多, 如用于测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆; 高速列车行驶时气体的阻力(包括平方阻尼或立方阻尼等)及材料产生弹塑性变形时所包含的非线性阻尼等。

测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆是具有库仑阻尼与速度平方阻尼的振动系统。图 1.3(a) 为用于测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆的示意图。摆的运动微分方程可表示为

$$J\ddot{\phi} + mgl \sin \phi = mr(g \cos \phi + l\dot{\phi}^2) f \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|} \quad (1.9)$$

式中,  $J$  为摆对悬挂点的转动惯量;  $m$  为摆的质量;  $l$  为摆的质心至悬挂点之距;  $r$  为轴的半径;  $f$  为轴承与轴销之间的摩擦系数;  $\phi$  为摆的摆动角度。

在摆动角度不很大的情况下, 式(1.9)中的  $\cos \phi$  和  $\sin \phi$  可展开为

$$\begin{cases} \cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} + \dots \\ \sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{6} + \dots \end{cases} \quad (1.10)$$

在这种情况下, 式(1.9)可写为



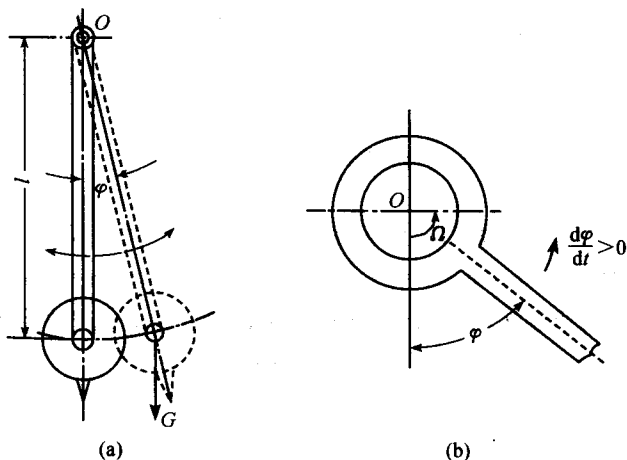


图 1.3 测量轴与轴销之间摩擦系数的摩擦摆与弗洛特摆

(a) 摩擦摆; (b) 弗洛特摆

$$J\ddot{\varphi} + mgl\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) = mr\left[g\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + l\dot{\varphi}^2\right]f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \quad (1.11)$$

或

$$J\ddot{\varphi} + mgl\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) + mgr \frac{\varphi^2}{2} f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} = mr[g + l\dot{\varphi}^2]f \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$$

式(1.11)中等号右第一项为干摩擦,第二项为速度平方阻尼。

### 1.2.3 含光滑非线性恢复力的振动系统

弗洛特摆是带光滑软式非线性恢复力的振动系统,为了增加电磁振动给料机振幅的稳定性,有时将该机中的板弹簧的支承夹紧装置制成曲线形,该系统属光滑硬式非线性振动系统;由板弹簧支承的卡车是带光滑不对称弹性力曲线的非线性振动系统;离心调速器是具有特殊形式的光滑恢复力的非线性系统;曲线船体在水中做垂直方向振动时具有不对称的光滑曲线恢复力。

#### 1. 利用弗洛特摆测量轴承的摩擦系数

文献[292]、[293]通过弗洛特摆测定了轴与内套之间的动摩擦系数,图 1.3 (b)为其力学模型,转动轴上的外套及摆的内套为一组试件,滑动面半径为  $r$ ,摆的重心至转动轴心距离为  $l$ 。当轴以角速度  $\Omega$  逆时针转动时,摩擦力将带动摆偏转  $\varphi$  角度。

摆的运动微分方程为

$$J\ddot{\varphi} = M_r - mgl \sin\varphi - ul\dot{\varphi} \quad (1.12)$$