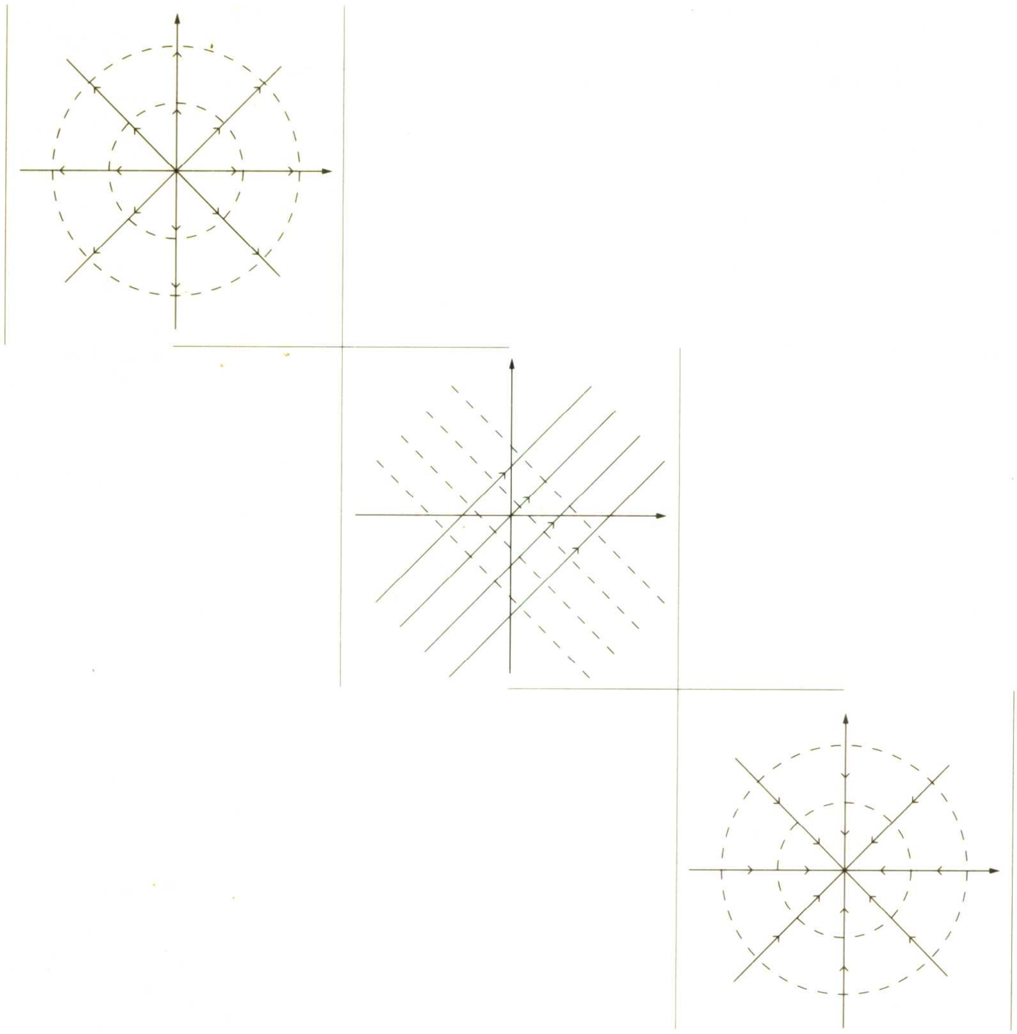
FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

复变函数与积分变换

白艳萍 雷英杰 杨明 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

复变函数与积分变换

白艳萍　雷英杰　杨明　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 提 要

本书是根据国家教委工科数学课程教学指导委员会编制的复变函数、积分变换教学的基本要求编写的。全书共9章，分别是：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换。各章配有适量习题，书末附有习题答案。书中有“*”号部分供读者选读。

本书可作为高等工科院校本科生或专科生复变函数与积分变换课程教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 白艳萍等编著. —北京：国防工业出版社，2007.8 重印
ISBN 978-7-118-03587-2

Ⅰ.复… Ⅱ.白… Ⅲ.①复变函数 ②积分变换
Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第081891号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 17½ 字数 406 千字
2007年8月第4次印刷 印数 10501—13500册 定价 24.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　　言

工程数学中复变函数与积分变换是理工科院校学生继高等数学课程之后的又一门数学基础课。通过本课程的学习,不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论以及工程技术中的常用数学方法,同时还可以复习、巩固高等数学的基础知识,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础。为此我们按照教育部关于课程改革的精神,结合多年从事同名课程的教学实践,并参照国家教委 1993 年批准印发的工程数学复变函数、积分变换课程基本要求编写了这本复变函数与积分变换教材。该教材可供高等工科院校的电类有关专业使用,也可供其他专业选用或作为工程技术人员的参考书。

在编写过程中,我们力求将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起,既保证了教学质量,又压缩了教学时数,完成本教材的全部教学内容需要 48 学时。为使理论完善,为学生展望新知识留下窗口,我们适当增加了一些超出大纲的内容,并在教材中打有“*”号,供有关专业选用。

本书由白艳萍教授任主编,雷英杰、杨明任副主编,其中第 1 章至第 5 章由雷英杰编写,其余部分由杨明编写。

本书在编写过程中得到蔡锁章教授、高玉斌教授、潘晋孝副教授以及张磊、郝慧艳等老师的热情帮助,并提出许多宝贵意见;还有院、系各位领导的大力协助,在此一并致谢。

限于水平,书中难免有不妥和错误之处,恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 5 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数 ········· 1

§1.1　复数 ········· 1

* §1.2　无穷远点与复球面 ········· 8

§1.3　复变函数 ········· 9

习题 1 ········· 16

第 2 章　解析函数 ········· 19

§2.1　解析函数的概念 ········· 19

§2.2　解析函数与调和函数 ········· 27

§2.3　初等函数 ········· 30

* §2.4　平面场 ········· 39

习题 2 ········· 44

第 3 章　复变函数的积分 ········· 47

§3.1　复变函数的积分 ········· 47

§3.2　柯西积分定理 ········· 52

§3.3　柯西积分公式 ········· 56

§3.4　解析函数的高阶导数 ········· 60

习题 3 ········· 65

第 4 章　级数 ········· 69

§4.1　复数项级数 ········· 69

§4.2　复变函数项级数 ········· 72

§4.3　泰勒级数 ········· 80

§4.4　洛朗级数 ········· 87

§4.5　孤立奇点 ········· 96

* §4.6　函数在无穷远点的性态 ········· 101

习题 4 ········· 104

第 5 章　留数 ········· 107

§5.1　留数定理及留数的求法 ········· 107

§5.2　用留数定理计算实积分 ········· 117

* §5.3　对数留数与辐角原理 ········· 125

习题 5 ········· 131

第 6 章　保角映射 ········· 134

§6.1　保角映射的概念 ········· 134

§6.2 分式线性映射 …… 139
§6.3 惟一决定分式线性映射的条件 …… 145
§6.4 几个初等函数所构成的映射 …… 156
习题 6 …… 162
第 7 章 Fourier 变换 …… 166
§7.1 Fourier 变换的概念 …… 166
§7.2 单位脉冲函数及其 Fourier 变换 …… 176
§7.3 Fourier 变换的性质 …… 181
§7.4 应用举例 …… 191
习题 7 …… 194
第 8 章 Laplace 变换 …… 198
§8.1 Laplace 变换的概念 …… 198
§8.2 Laplace 变换的性质 …… 204
§8.3 Laplace 逆变换 …… 214
§8.4 应用举例 …… 219
习题 8 …… 226
***第 9 章 Z 变换** …… 229
§9.1 序列、差分和差分方程 …… 229
§9.2 Z 变换 …… 231
§9.3 Z 变换的性质 …… 234
§9.4 Z 逆变换 …… 240
§9.5 Z 变换的应用 …… 243
习题 9 …… 244
习题答案 …… 247
附录Ⅰ Fourier 变换简表 …… 262
附录Ⅱ Laplace 变换简表 …… 266
附录Ⅲ Γ 函数的基本知识 …… 270
参考文献 …… 274

第 1 章　复数与复变函数

复变函数是自变量为复数的函数。它的理论和运算方法已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切。

而关于复数，虽在初等代数中已有论述，但是为了便于我们今后的讨论，很有必要给出系统的叙述和补充。

§1.1 复　　数

一、复数的概念及其表示

1. 复数的概念

早在 16 世纪初期，数学家们在解二次方程

$$x^2 + 1 = 0$$

时，发现不存在任何实数，其平方等于 -1，因此，就促使人们引入符号 i，定义 $i^2 = -1$（但暂时还是形式上的），这是 17 世纪到 18 世纪的数学家的想法，并把它带到计算中去，出乎意料地得到了很好的应用。然而，人们始终未能明确认识到这种新数已导致数域的扩充，这一点从他们称$\sqrt{-1}$为"虚数"得到充分证实，甚至一贯被人们誉为"复数理论"的奠基人高斯（Gauss）也无例外地使用"虚数"一词。用 i 表示$\sqrt{-1}$则是欧拉（Euler）首先引进的，直至今天，人们还普遍采用这些记号。

称形如 $z = x + iy$ 的数为复数。其中 x 和 y 均为实数，i 称为虚数单位，$i^2 = -1$，x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x = \mathrm{Re}z,\ y = \mathrm{Im}z$$

当 $\mathrm{Im}z = 0$ 时，$z = \mathrm{Re}z$ 为实数。因此，实数全体可看成复数的一部分，复数则是实数的扩充，当 $\mathrm{Re}z = 0$ 时，$z = \mathrm{Im}z$ 称为纯虚数。复数无大小之分。

两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$，当且仅当 $x_1 = x_2$ 及 $y_1 = y_2$ 时，称这两复数相等，记作 $z_1 = z_2$。

2. 复数的表示法

一个复数 $x + iy$ 可完全由一对有序数组(x, y)所确定，因此，我们在平面上可建立类似于高等数学的平面直角坐标系，使平面上的点(x, y)与复数 z 建立一一对应的关系，只要将 x 轴作为实轴，y 轴作为虚轴即可。这样建立的平面称为复平面或 z 平面（图 1－1）

1）用点表示

引入复平面后，复数与平面上的点之间建立了一一对应，从而复数的许多结果得到了几何直观的解释。为方便起见，"复数 z"与"点 z"可等同叙述。不再加以严格区别。例

如

$$\{z:\text{Im}z>0\} \text{ 与 } \{z:0\leqslant \text{Re}z\leqslant 1,0\leqslant \text{Im}z\leqslant 1\}$$

分别表示上半平面和以 0,1,1+i,i 为顶点的正方形。

2) 用向量表示

用向量 **Op** 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,此向量的起点在原点 $O(0,0)$,终点为 $P(x,y)$,x,y 分别为 **Op** 在 x 轴、y 轴上的投影(图 1-2)。点 P 实际上是图 1-1 中的点 z。这样,复数与平面上的向量建立了一一对应关系。因此,也不严格区别"向量 **z**"与"复数"。

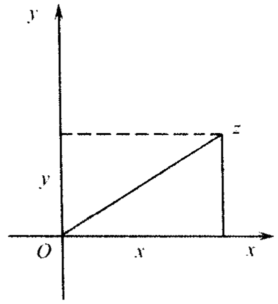


图 1-1

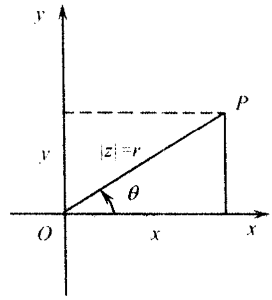


图 1-2

(1) z 的模

向量 **Op** 的长度称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模,记为 $|z|$ 或 r,即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1}$$

由模的定义易得不等式

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y| \tag{1.2}$$

(2) z 的辐角

实轴的正向与向量 **Op** 之间的夹角(这里假定 $z\neq 0$)$\theta=\text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 称为复数 z 的辐角,记作:

$$\theta=\text{Arg}z$$

辐角的正负,视正向实轴是按逆时针方向还是顺时针方向转至向量 **z** 而定,即逆时针转至向量 **z** 时,z 的辐角取正值,顺时针转至向量 **z** 时,z 的辐角取负值。显然,一个复数有无穷多个辐角。若 θ_1 是复数 z 的一个辐角,那么

$$\theta=\theta_1+2k\pi(k \text{ 是整数})$$

就给出了复数 z 的全部辐角。在复数 z 的辐角中,有一个 θ_0 满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$,称 θ_0 为复数 z 的主要辐角,或辐角的主值,记作 $\arg z$。

注意,有时为方便起见,也取其他的主值范围,如 $0<\theta_0\leqslant 2\pi$,但不管 $\arg z$ 的范围如何取,总有

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k\text{ 是整数})$$

在平面上只有原点(即复数 $z=0$)的辐角是不定的。

$\arg z(z\neq 0)$与 $\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}$的主值[1] 有如下关系

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x>0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x=0, y>0\text{ 时取“+”号}, y<0\text{ 时取“-”号} \\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi & x<0, y>0\text{ 时取“+”号}, y<0\text{ 时取“-”号} \\ \pi & x<0, y=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

例 1.1　求 $\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})$及 $\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$;

解

$$\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i}) = \arg(2-2\mathrm{i})+2k\pi = \arctan\frac{-2}{2}+2k\pi = -\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi = \left(\arctan\frac{4}{-3}+\pi\right)+2k\pi = (2k+1)\pi-\arctan\frac{4}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例 1.2　已知流体在某点 M 的速度 $v=-1-\mathrm{i}$,求其大小和方向

解　大小:$|v|=\sqrt{2}$

方向:$\arg v = \arctan\dfrac{-1}{-1}-\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$

从直角坐标与极坐标的关系,我们可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z,即(图 1-2)

$$z = r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.4}$$

我们引出熟知的欧拉公式:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \tag{1.5}$$

并且容易验证

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

利用公式(1.5),就可以将式(1.4)改写成

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.7}$$

---

① 即取 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$时。

我们分别称式(1.4)及式(1.7)为复数 $z\neq0$ 的三角表示和指数形式。

例 1.3 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$;

$$\mathrm{i}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}};$$

$$1=1\cdot(\cos0+\mathrm{i}\sin0)=\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}};$$

$$-3\mathrm{i}=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}。$$

二、复数的运算

1. 复数的四则运算

1) 复数的四则运算的定义

设两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,其加、减、乘、除定义如下:

加法 $z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$

减法 $z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$

乘法 $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$

除法 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)$

显然上述四则运算满足以下定律:

交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

由于实数是复数的特例,我们在规定复数的四则运算时,一个基本要求是复数的运算法则施行于实数时,能够与实数运算的结果相符合。

2) 复数的四则运算的几何意义

复数加、减法的几何意义。复数可用向量表示,两复数的加法可按平行四边形(或三角形)法则,其几何意义如图 1-3 所示。减法 z_1-z_2 可看作 $z_1+(-z_2)$,其几何意义如图 1-4 所示。

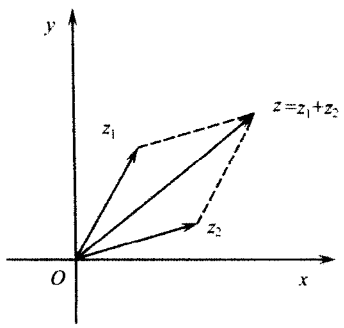


图 1-3

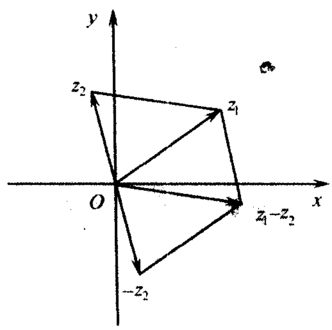


图 1-4

由复数加、减法的几何意义，即可得三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.8}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \tag{1.9}$$

复数乘法的几何意义　若将复数 z_1 与 z_2 写成三角表示式及指数表示式，即

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

则

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

由此可得

$$|z| = |z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \tag{1.11}$$

从而也有

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 \tag{1.12}$$

因此，两复数乘积的模等于它们模的乘积，两复数乘积的辐角等于辐角之和。

由式(1.10)可知，$z_1 \cdot z_2$ 的几何意义是：将向量 z_1 伸长(或缩短)$|z_2|$倍，然后将其辐角按逆时针方向旋转 θ_2 角度(图 1-5)。

读者可类似写出复数除法的几何意义。

2. 复数的其它运算

1) 共轭

设 $z = x + iy$，则 z 的共轭复数为：

$$\bar{z} = x - iy$$

显然

$$|\bar{z}| = |z|,\ \mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg}z \tag{1.13}$$

这表明在复平面上，z 与 $\bar{z}$ 关于实轴是对称点(图 1-6)

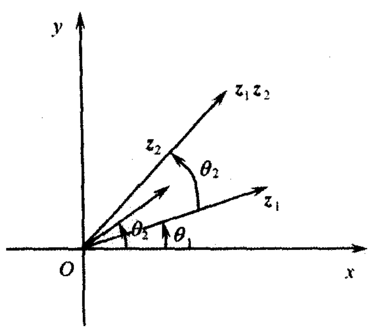


图 1-5

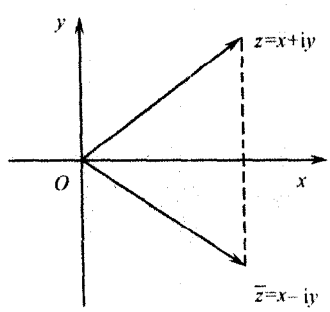


图 1-6

我们也容易验证下列关系：

(1) $\overline{(\bar{z})}=z,\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$

(3) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, $\mathrm{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$表示对于复数 $a,b,c,\cdots$的任一有理运算，则

$$\overline{R(a,b,c,\cdots)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$$

例 1.4 设 A,C 为实数，$A\neq0$，β 为复数且$|\beta^2|>AC$，证明 z 平面上的圆周可以写成 $Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}\bar{z}+C=0$

证 在解析几何中，已知任意一圆的方程可写作

$$A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0\tag{1.14}$$

这里 A,B,C,D 为实数，且 $A\neq0$，$B^2+D^2-4AC>0$，我们知道

$$x^2+y^2=z\bar{z},\ x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$$

将此代入方程式(1.14)，有

$$Az\bar{z}+\frac{B}{2}(z+\bar{z})+\frac{D}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})+C=0$$

也就是

$$Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-D\mathrm{i})z+\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})\bar{z}+C=0\tag{1.15}$$

令

$$\beta=\frac{1}{2}(B+D\mathrm{i})$$

以此代入式(1.15)即可得证。

例 1.5 设 z_1,z_2 为任意两个复数，试证：$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$

证 由共轭的性质(3)和(1)，得

$$\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}}}{2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2}{2}$$

故得

$$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$$

2) 乘幂与方根

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即 $z^n=z\cdot z\cdots z$

若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则对于任意的正整数 n，有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\tag{1.16}$$

若定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则公式(1.16)中当 n 为负整数时也成立，特别当 $r=1$ 时，引出德摩

弗(Demoivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

求 z 的 n 次方根,相当于在方程

$$\omega^n = z \tag{1.17}$$

中,求解 ω。

设 $z\neq 0$($z=0$ 时,解显然为 0),并令 $z=re^{i\theta}$,$\omega=\rho e^{i\varphi}$,则方程(1.17)变形为

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$$

从而得两个方程

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta + 2k\pi$$

解之得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

因此 z 的 n 次方根($n\geqslant 2$)为

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}} \tag{1.18}$$

这里的 k 表面上可取 $0,\pm1,\pm2,\cdots$,但实际上只要取 $k=0,1,\cdots,n-1$ 就可得出 n 个不同的根,事实上,我们将式(1.18)表为

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\omega_0,\ (\omega_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}})$$

为了得出 $\sqrt[n]{z}$ 的不同值,可由 ω_0 依次旋转 $\frac{2\pi}{n}$,$2\cdot\frac{2\pi}{n}$,$3\cdot\frac{2\pi}{n}$,$\cdots$,当 k 取到 n 时,又与 ω_0 重合了,即 $\omega_n=\omega_0$。故非零复数 z 的 n 次方根共有 n 个,它们就是以原点为中心,$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点(图 1-7 是 $n=6$ 的情形)。

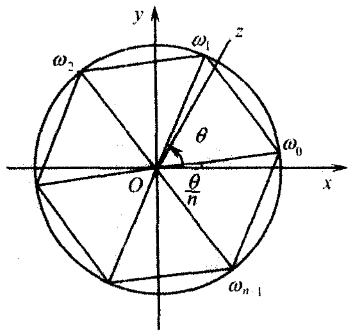


图 1-7

例 1.6　计算 $\sqrt[4]{1-i}$ 的所有值。

解　由于 $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$,所以 $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)}$　$(k=0,1,2,3)$

因此

$$\sqrt[4]{1-i} = \omega_0,\ i\omega_0,\ -\omega_0,\ -i\omega_0$$

式中 $\omega_0=\sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi}{16}i}$,这四个值均匀地分布在半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆周上,其中 ω_0 的辐角为 $-\frac{\pi}{16}$,其它的每隔 $\frac{\pi}{2}$ 分布一个点。

例 1.7　计算 $\sqrt[3]{-8}$ 的所有的值。

解　因 $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

故

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2)$$

当 $k=0$ 时，$(\sqrt[3]{-8})_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

当 $k=1$ 时，$(\sqrt[3]{-8})_1=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2$；

当 $k=2$ 时，$(\sqrt[3]{-8})_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}。$$

注 在初等代数中，规定 -8 的三次实方根为 -2，即规定 $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$，只相当于这里 $k=1$ 的情形。

* §1.2 无穷远点与复球面

一、无穷远点

加法、减法和乘法在以上所定义的复数系统中都没有例外，但除法就不然，因为全部复数中任何数与 0 的乘积都是 0，所以不能有这样一个数，它是一个复数被 0 所除的商。

为了使复数运算更具有普遍性，有必要将复数系统加以扩充，引入一个新的概念：无穷远点，记做 ∞。

读者注意，在初等数学中，∞ 不是一个定值，它是代表变数无限增大的符号；而我们在复变函数论中，把它作为一个定值。它的运算规定如下：

设 A 是异于 ∞ 的一个复数，我们规定

$$A+\infty=\infty+A=\infty,\quad \frac{A}{\infty}=0$$

设 B 是任意不为 0 的复数（B 可为 ∞），我们规定

$$B\cdot\infty=\infty\cdot B=\infty,\quad \frac{B}{0}=\infty$$

为了避免和算术定律相矛盾，对 $\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$，不规定其意义。

对于复数 ∞，实部和虚部以及辐角的概念都没有意义，至于它的模，则规定为 $|\infty|=+\infty$。而对于任何正常的（有限的）复数 z，$|z|<+\infty$。

在复平面上没有任何一点与 ∞ 相对应，但我们可设想平面上有一理想点和它相对应，这个理想点叫做无穷远点。我们规定复平面上只有一个无穷远点。

复平面加上无穷远点称为扩充复平面，也叫做闭平面。因为复平面被无穷远点所封闭，不包含无穷远点的平面叫做开平面。如不特别指明，本书提到的复平面均指开平面。显然，闭平面上所有直线都视为经过无穷远点。

为使无穷远点的存在得到直观解释，黎曼（Riemann）特别创造了复数的球面表示法。

二、复数的球面表示法

以复平面的原点为心，作半径为 1 的球，从原点引垂直于复平面的直线为 z 轴，交球

面于 N 和 S，分别称为北极和南极(如图 1-8 所示)。对复平面上任一点 z，从起点 N 引过 z 的射线交球面于 P；反之，由起点 N 到球面上任一点 P 的射线交复平面于一点，记为 z。这样，我们就建立了球面上(除 N 点外)与复平面上的点间的一一对应。所以就可以用球面上的点来表示复数。

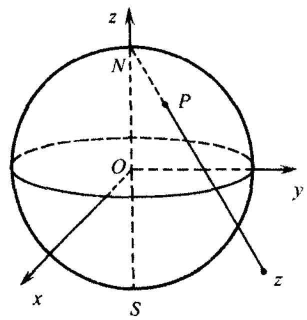


图 1-8

但是，对于 N 点，还没有复平面内的一个点与它对应，由图 1-8 容易发现，当 z 点无限远离原点时，即 $|z|$ 无限增大时，点 P 就无限地接近于 N，为使复平面与球面上的点无例外地都能一一对应起来，我们规定：复平面上有惟一的"无穷远点"，它与球面上的北极 N 相对应，这个点所表示的复数即"∞"。因此，全部复数都可以用这个球面上的点来表示。这样规定的球面叫做黎曼球面，或复数球面。

§1.3 复变函数

一、复平面上的点集

1. 区域

(1) 邻域　复平面上以 z_0 为中心，以正数 δ 为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的 δ 邻域。记为 $U(z_0,\delta)$，即 $U(z_0,\delta)=\{z\,|\,|z-z_0|<\delta\}$。

称集合 $U(z_0,\delta)/z_0=\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z\,|\,0<|z-z_0|<\delta\}$ 为 z_0 的去心 δ 邻域。

(2) 聚点　若任意 $U(z_0,\delta)$ 中含有点集 E 中无穷多个点，则称 z_0 为点集 E 的聚点。

(3) 内点　设有一个点集 E，若对于某一点 $z_0\in E$，存在一个邻域 $U(z_0,\delta)\subset E$，则称 z_0 为 E 的内点。

(4) 开集　若 E 中每一个点 z 都是 E 的内点，则称点集 E 为开集。

(5) 连通集　若点集 E 中任意两点都可以用完全属于 E 的折线连接起来，则称该集合 E 为连通集。

(6) 区域　连通的开集称为区域(开区域)。

(7) 界点　设 E 是区域，点 $z_0\notin E$，若对于任意的 $U(z_0,\delta)$ 中，既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的界点。区域 E 的全体界点的集合称为 E 的边界。

(8) 闭区域　区域 E 连同它的边界所构成的集合称为闭区域，记为 $\bar{E}$。

(9) 有界区域　对于区域 E，若存在正实数 M，使 $U(0,M)\supset E$，则称 E 为有界区域，否则称为无界区域(图 1-9)。

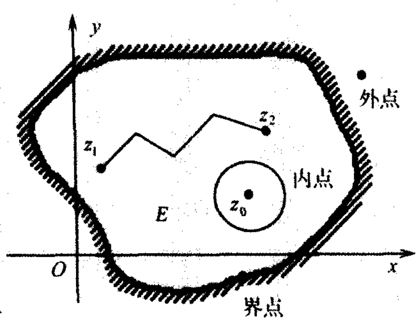


图 1-9

应用关于复数 z 的不等式来表示 z 平面上的区域，有时是很方便的。

例 1.8 (1) 求 z 平面上以原点为圆心,R 为半径的圆(即圆形区域)的表示。

(2) 求 z 平面上以原点为圆心,R 为半径的闭圆(即圆形闭区域)的表示。

解(1)
$$\{z \mid |z| < R\}$$

(2)
$$\{z \mid |z| \leqslant R\}$$

例 1.9 求图 1 - 10 所示的带形区域表示

解
$$\{z \mid y_1 < \mathrm{Im}z < y_2\}$$

例 1.10 求图 1 - 11 所示的同心圆环(即圆环形区域)的表示。

解
$$\{z \mid r < |z| < R\}$$

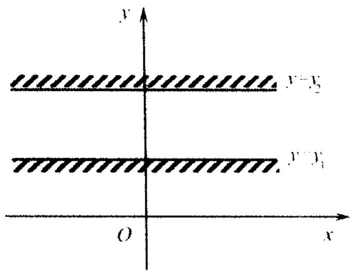


图 1 - 10

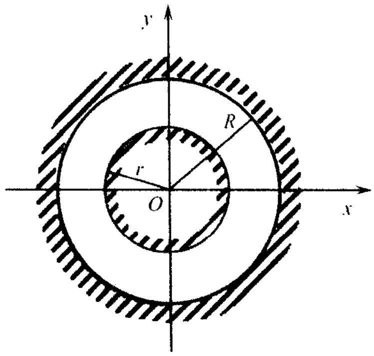


图 1 - 11

一般区域的边界可能十分复杂,在上面所举的例子中,圆盘的边界是圆周,为了研究比较一般的区域,先讲述曲线的概念。

2. 平面曲线

在高等数学课程中已经知道,平面曲线可以用一对连续的函数

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

来表示(称为曲线的参数方程)。也可用实变数的复值函数 $z(t)$来表示,即

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

例如,以坐标原点为圆心,以 a 为半径的圆周,其参数方程可表示为

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

写成复数形式即为

$$z = a(\cos t + \mathrm{i}\sin t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

又如,平面上连接点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)的直线段,其参数方程可表示为

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

从复平面上看,这就是连接点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与点 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线段,故其复数形式的参数方程可表示为

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

除了参数表示以外,通常我们还用动点 z 所满足的关系式来表示曲线。例如把以 $z=0$ 为圆心,以 a 为半径的圆周,表示成 $|z|=a$;平行于虚轴且通过点 $z=1$ 的直线,从 $1-\mathrm{i}$ 到 $1+\mathrm{i}$ 的一段可表示成 $\mathrm{Re}z=1(-1\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant 1)$ 等。

如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的,且对于 t 的每一个值,有 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$,那么称该曲线是光滑的,由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为分段光滑曲线,特别需要指出,折线是分段光滑曲线。

设 $C:z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 为一条连续曲线,$z(a)$ 和 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点,对于满足 $a<t_1<b,a\leqslant t_2\leqslant b$ 的 t_1 与 t_2,当 $t_1\neq t_2$,而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时,点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点。没有重点的连续曲线 C 称为简单曲线或若当(Jordan)曲线,如果简单曲线 C 的起点与终点重合,即 $z(a)=z(b)$,则称曲线 C 为简单闭曲线。

下面将区域分类:

在复平面上,如果区域 D 内任意一条简单闭曲线的内部都含于区域 D 内,则称 D 为单连通区域;否则,称为多连通区域。

一条简单闭曲线的内部是单连通域。单连通域在几何直观上是其中没有洞或割痕,所以单连通域内的任何一条简单闭曲线可以在该域内连续变形、不用越过或接触边界点而缩成一点。

考虑到本课程后边章节的积分是定义在有向曲线弧段上的,下面简要谈一下曲线方向。

一般地,简单曲线的正向规定为:从起点到终点所指的方向。简单闭曲线 C 的正向规定为:当观察者顺此方向前进时,曲线 C 所围区域一直在观察者的左手,图 1-12 给出一种常用的情形,若曲线所围部分为阴影部分,其正向如图所示。显然,该图是一复连通区域。

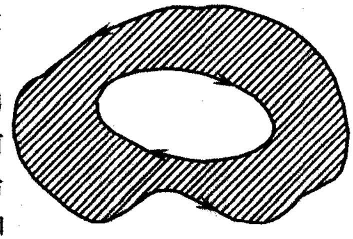


图 1-12

二、复变函数的概念

1. 定义

定义 1.1　设 E 是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合,如果存在一个法则,按这个法则对于 E 中的每一个 z,都有一个(或多个)确定的复数 $\omega=u+\mathrm{i}v$ 与之对应,那么就称 ω 是集合 E 上的 z 的复变函数,简称 ω 为 z 的复变函数,记作:$\omega=f(z)$。其中 z 称为自变量,ω 称为因变量。

复数集 E 称为 $\omega=f(z)$ 的定义集合,与 E 中 z 对应的 ω 值构成的集合称为函数值集合,记为 $f(E)$。显然,一个复变函数 $f(z)$ 可看作 z 平面到 ω 平面的一个映射。

设函数 $\omega=f(z)$ 定义在集合 E 上,并令 $z=x+\mathrm{i}y,\omega=u+\mathrm{i}v$,则复变函数 ω 与自变量 z 之间的关系 $\omega=f(z)$ 相当于以下两个关系式

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

即一个复变函数等价于两个实的二元函数。这样,我们可通过研究两个实的二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的性质去揭示 $\omega=f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的性质;反之,在复变函数论中对 $f(z)$ 的进一步研究,就能更加深入地了解这对实变二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的性质,这正