PROGRESS EVERY DAY

天天向上

2008高考总复习

其实人生豪迈，需要我们好好学习、天天向上；时刻为梦想创造可能，相信自己一定能成功！

总策划/陈志强

数学

中国书籍出版社

我来…

为胜利而来！

总策划：陈志强
主　编：韦实香
副主编：陈炳强
编　委：韦顺天　韦志举　覃　睿
冯　毅　程伏波　李阳刚
王广臣　李其信

天天向上

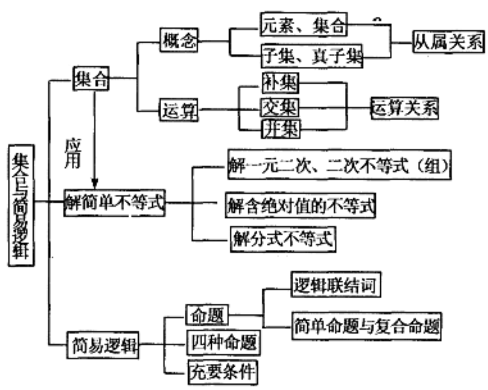
PROGRESS EVERY DAY

目录

美丽有两种：
一是深刻又动人的方程；
一是你泛着倦意淡淡的笑容。

第一章　集合与简易逻辑

知识网络



高考要求

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念．了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义．掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合．

2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义．

命题规律

1. 考题特点

近年来，高考中关于集合与简易逻辑的试题可分为两大类：一类是集合、命题、条件本身的基础题，这类题多为选择、填空题；另一类是集合、命题、条件与其他知识的综合题．从难度上讲，多为容易题和中档题．从考题号排序上看，较以往靠后，这也说明考查的侧重点逐步由考查“双基”转变为考查能力．

2. 高考热点

热点之一：集合的包含关系与集合的运算．这类试题

又包含两类，一是考查具体集合间关系或具体集合的运算.解答这类问题应注意把抽象问题具体化、形象化；二是抽象集合（不知道集合含有哪些元素）间的关系与运算，解答这类问题，有时可借助图示法把它形象化.

热点之二：充要条件的判定以及命题真假的判定.而在考查命题知识的同时，主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力.

热点之三：集合与简易逻辑常作为载体或中间过程与其他知识相互渗透、综合考查，特别是把对逻辑知识的考查常融入具体的数学问题之中.这类试题要求考生有较好的、较全面的基础知识，能进行简单的逻辑推理，一般难度不大.

高考预测

1. 集合的概念及运算的考查稳中求新、稳中求活

集合在命题时，仍会以基本题型为主.大多数是选择题、填空题型，多为学科内的小型综合题，从涉及知识上讲，常与映射、函数、方程、不等式等综合命题，还可能出小型应用题以及开放题.

2. 简易逻辑的考查

通常不会单独命题，但它却贯穿在每道题的始终，主要考查对其概念的理解和判断，有时会考查到用反证法证明命题，应给予重视.

3. 充要条件的考查

这类题几乎年年考到，多数是与代数、三角、立体几何、解析几何中的知识点进行结合命题，多为综合题。

总之，今后关于"集合与简易逻辑"这一章内容涉及的高考题，可能有小型题，也可能有大型综合题.掌握本学科各章节基础知识是解决这一章该类问题的关键.

备考建议

(1) 集合的复习应注重基础，注意辨析

对于集合的复习，首先要注重基础，熟练掌握集合间的关系（子集与真子集）的判定方法、进行集合间的运算；同时，还要对集合的有关概念和符号进行辨析，只要准确把握它们，才不会在高考中掉进命题者设制的陷阱之中.

首先，要明确集合元素的意义，弄清集合由哪些元素所组成，这就需要对集合的文字语言、符号语言、图形语言进行相互转化.其次，由于集合知识概念新、符号多，往往顾此失彼，因此需要注意如下几个方面的问题：一要注意集合元素的三性（确定性、互异性、无序性）；二要注意 0、$\{0\}$、$\varnothing$、$\{\varnothing\}$ 的关系，数 0 不是集合，$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合；$\{\varnothing\}$ 则是由 $\varnothing$ 为元素的集合；三要注意空集的特殊性，空集是任何非空集合的真子集，它在解题过程中极易被忽视；四要注意符号"$\in$"与"$\subseteq$"（或"$\subsetneqq$"）的区别，符号"$\in$"表示元素与集合之间的从属关系，"$\subseteq$"（或"$\subsetneqq$"）表示集合与集合之间的包含关系.

(2) 简易逻辑的复习重在基础、注重综合

对于简易逻辑的复习，重在掌握命题、四种命题、充要条件等基本概念和基本知识，熟练掌握命题真假的判定、四种命题的构成、充要条件的判定的基本方法，重在掌握常规题型的常规解法即可.但应注意的是：高考对简易逻辑的考查，必须以其他知识为载体，因此复习时，必须注重综合

1.1 集合的概念与运算

知识要点梳理

1. 集合的含义与表示

(1) 一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合（或集）.构成集合的每个对象叫做集合中的元素.集合中的元素具有________性、________性和________性三个特征.

(2) 集合有三种表示方法：________、________、________.它们各有优点，用什么方法来表示集合，要具体问题具体分析.

(3) 集合中元素与集合的关系分为________与________两种，分别用________和________来表示.

2. 集合间的基本关系

(1) 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的________，记作________.

(2) ____________叫空集，用________表示.

(3) 对于两个给定的集合 A、B，属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合，叫做 A、B 的________，记作________.

(4) 对于两个给定的集合 A、B，把它们所有的元素并在一起构成的集合，叫做 A 与 B 的________，记作________.

(5) 若已知全集 U，集合 $A\subseteq U$，$\complement_U A=$________.

3. 集合的基本运算

(1) $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则 A________B；$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 A________C；

(2)$\varnothing$ ______ A，若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing$ ______ A；

(3)$A\cap A=$ ______，$A\cap\varnothing=$ ______；

(4)$A\cup A=$ ______，$A\cup B$ ______ $B\cup A$，$A\cup\varnothing=$ ______；

(5)$A\cap\complement_U A=$ ______，$A\cup\complement_U A=$ ______；

(6)$A\cap B$ ______ A ______ $A\cup B$；

(7)$\complement_U(A\cap B)=$ ______；$\complement_U(A\cup B)=$ ______；

(8) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B$ ______ $A\cup B$，$A\cap B=$ ______，$A\cup B=$ ______.

疑难学法指津

1. 集合的元素必须满足三性：确定性、互异性、无序性. 解决集合有关问题时，一方面，在解答完毕之后，不要忘记检验集合的元素是否满足这三性；另一方面，善于抓住集合元素的三性，就能顺利地找到解题的切入点.

2. 对于描述法：给出的集合 $\{x\mid x\in P\}$ 要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P. 如 $\{y\mid y=x^2\}$，$\{x\mid y=x^2\}$，$\{(x,y)\mid y=x^2\}$ 三种集合的含义是不同的.

3. 集合与集合之间的关系有子集(包含、包含于)、真子集(真包含、真包含于)、相等. 在判断集合与集合之间的关系时，如果能确定真包含(或真包含于)则不能用包含($\subseteq$)表示. 要注意区分“$\in$”、“$\subseteq$”、“$\subsetneqq$”的含义，并能正确地运用它解题.

4. 集合的交、并、补运算是集合的核心，其关键在于对“且”与“或”的正确理解；“且”的意思与通常理解的“既……同时……”是一样的；“或”则与通常理解的“非此即彼”有区别，它可以是两者兼有.

5. 解决集合问题时要注意以下几点：① 明确集合元素的意义，它是怎样类型的对象(如数、点、图形等)；② 弄清集合由哪些元素所组成，这就需要我们把抽象的问题具体化、形象化，也就是善于对集合的三种语言(文字、符号、图形)之间相互转化，同时还要善于对用多个参数表示的符号描述法 $\{x\mid P(x)\}$ 的集合化到最简形式；③ 要善于运用数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法来解决集合的问题；④ 集合问题多与函数、方程、不等式等知识综合在一起，要注意各类知识的融会贯通.

基础跟踪体验

1. ('06 年北京) 设集合 $A=\{x\mid 2x+1<3\}$，$B=\{x\mid -3<x<2\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x\mid -3<x<1\}$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$

C. $\{x\mid x>-3\}$　　D. $\{x\mid x<1\}$

2. ('06 年全国 Ⅱ) 已知集合 $M=\{x\mid x<3\}$，$N=\{x\mid \log_2 x>1\}$，则 $M\cap N=$ ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid 0<x<3\}$

C. $\{x\mid 1<x<3\}$　　D. $\{x\mid 2<x<3\}$

3. 设集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$，那么下列结论正确的是 ( )

A. $P\cup Q=P$　　B. $P\cap Q\supsetneqq Q$

C. $P\cap Q\subsetneqq P$　　D. $P\cup Q=Q$

4. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{x=3,y=-1\}$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

典例分类剖析

题型一：集合概念

解决此类问题的关键是化简给定的集合，确定集合的元素，依据集合的有关概念求解.

【例题 1】 (05·湖北) 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【分析】 分别讨论集合 P 中的每一个元素与集合 Q 中的元素的“+”运算结果.

【解】 集合 P 中的元素 0 与集合 Q 中的元素组成 $P+Q$ 的元素为 1,2,6；P 中的元素 2 与集合 Q 中的元素组成 $P+Q$ 的元素为 3,4,8；P 中的元素 5 与集合 Q 中的元素组成 $P+Q$ 的元素为 6,7,11. 综上，集合 $P+Q$ 中的元素一共有 8 个，故选择 B.

【评注】 本题是一道新“定义”题目，正确解答此题的关键在于读懂题意，比如下面的题目：

定义 $A-B=\{x\mid x\in A,但 x\notin B\}$. 已知 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{0,1,3,5,8\}$，则 $A-B=$ ______.

此题也是自定义题目，其意义在于对所定义的集合“$A-B$”作出一种“规定”. 按照这种规定，易知填 $\{2,4,6\}$.

题型二：集合间的关系

此类题型高考中也可设置难度较大的题目，多为选择和填空.

【例题 2】 (06·全国 Ⅰ(理)) 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有 ( )

A. 50 种　　B. 49 种　　C. 48 种　　D. 47 种

【分析】 先确定 A 中的元素，再根据要求确定 B 中的元素，从而确定集合的个数.

【解】 若 A 中最大的数为 1，那么集合 B 可以是 $\{2,3,4,5\}$ 的所有非空子集，有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$ 种，共有不同的选择方法为 $1\times15=15$ 种；

若 A 中最大的数为 2，那么集合 A 有 2 个(分别是 $\{2\}$，$\{1,2\}$)，B 可以是 $\{3,4,5\}$ 的所有非空子集，有 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种，共有不同的选择方法 $2\times7=14$ 种；

若 A 中最大的数为 4，那么集合 A 有 8 种(分别是 $\{4\}$，$\{1,4\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$)，B 只有 1 种 $\{5\}$，共有不同的选择方法 8 种.

综上知共有不同的选择方法为 $15+14+12+8=49$ 种，选择 B.

【评注】 本题考查了子集的概念和两个基本原理. 可推广到一般情况：

设集合 $I=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 选择 I 的两个空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有多少种？

按上述分析，共有不同的选择方法为

$2^0\times(2^{n-1}-1)+2^1\times(2^{n-2}-1)+2^2\times(2^{n-2}-1)+\cdots+2^{n-2}\times(2^1-1)=(n-2)\times 2^{n-1}+1$(种).

题型三：交集、并集与补集

《考试大纲》对集合的运算要求“理解补集、交集、并集的概念”，属于第二个层次，这就要求考生能够熟练地求集合的交、并、补运算，因而集合的运算问题是高考考查的热点问题. 它主要考查具体集合的运算问题，偶尔也涉及到抽象集合的运算问题. 解决集合的运算问题关键在于把握集合的“元素构成”. 集合的运算性质 $A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$. $\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$ 能简化集合的运算，应熟练掌握.

【例题 3】 (06·江苏)若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有 (　　)

A. $A\subseteq C$　B. $C\subseteq A$　C. $A\neq C$　D. $A=\varnothing$

【分析】 用排除法.

【解】 解法一：令 $A=B=C\neq\varnothing$，可排除 C、D；又令 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{1,2,3\}$，满足 $A\cup B=B\cap C$，排除 B，故选择 A.

解法二：由 $A\subseteq A\cup B$，$A\cup B=B\cap C$，$B\cap C\subseteq C$，可得 $A\subseteq C$.

【评注】 本题中所给的不是具体的集合，所以宜用排除法. 如果用文氏图法解答，则比较麻烦.

【例题 4】 (06·四川(理))已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid |2x-1|>3\}$，则 $A\cap B$ 为 (　　)

A. $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　B. $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

C. $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　D. $\{x\mid -1<x<3\}$

【分析】 把集合 A、B 分别化简后根据交集的定义解答.

【解】 $A=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid |2x-1|>3\}=\{x\mid x<-1,\text{或 }x>2\}$，

$\therefore A\cap B=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$. 故选择 C.

【评注】 本题是以不等式为切入点考查集合运算的题型，在求交集时可借助数轴.

【例题 5】 (05·浙江(理))设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$，则 $(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$ (　　)

A. $\{0,3\}$　B. $\{1,2\}$　C. $\{3,4,5\}$　D. $\{1,2,6,7\}$

【分析】 设 P 中元素为 t，用 t 表示 $\hat{P}$、$\hat{Q}$.

【解】 设 $t=2n+1(n\in\mathbf{N})$，则 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}=\{0,1,2\}$.

$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}=\{1,2,3\}$，$(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=\{0,3\}$，故选择 A.

【评注】 解答本题的易错点在于读不懂题目的意思，导致无法求解.

题型四：集合的综合应用

集合的综合应用有两种情形：一种是用集合与简易逻辑的语言、符号来表述的题，这种题实质上就是代数、几何、三角题，大部分属中档题和稍难题；另一种情形是题中并未出现集合、简易逻辑的语言、符号，但解决它需要用集合的思想或者从条件的充要性来思考，这时解题的思想往往较深刻，因而也较难.

【例题 6】 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y+a\geqslant 0\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

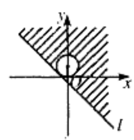
【分析 1】 A、B 均为点集，A 是一个圆，B 是一个平面区域，$A\subseteq B$，则圆在平面区域内.

【解】 $\because A\subseteq B$，$\therefore$ 圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 总在平面区域 $x+y+a\geqslant 0$ 内.

当 $x=y=0$ 时，$x+y+a\geqslant 0$ 中的 $a\geqslant 0$.

$\therefore$ 直线 $y=-x-a$ 的截距小于 0.

$\therefore$ 在坐标系中作出平面区域和圆，如下图，当直线 $y=-x-a$ 在图中 l 的位置且向左下方平移时，均满足条件，故只需求出临界状态 l 的截距.



由直线 $x+y+a=0$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 相切，得 $\dfrac{|0+1+a|}{\sqrt{2}}=1$，

$\therefore a=\sqrt{2}-1$，或 $a=-\sqrt{2}-1$(舍).

$\therefore a$ 的范围是 $[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

【分析 2】 本题中考虑到 a 是一次，且求 a 的范围，$\therefore a\geqslant -(x+y)$，即 a 大于等于 $-(x+y)$ 的最大值，从而转化为求 $z=-(x+y)$ 在条件 $x^2+(y-1)^2=1$ 下的最大值问题.

【解】 设 $x=\cos\alpha$，$y=1+\sin\alpha$ 代入 $z=-(x+y)$ 中，得 $z=-(\cos\alpha+\sin\alpha+1)=-[\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})+1]\leqslant-(-\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-1$，$\therefore a\geqslant\sqrt{2}-1$.

【评注】 本题抓住子集的概念，将集合问题转化成直线与圆相切的问题解决，或转化为求函数最大值问题，其中分离参数 a 是关键.

巩固检测提升

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $\complement_U(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\{1,2,4\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{3,5\}$　　D. $\varnothing$

2. ('06 年重庆) 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{1,6\}$　　B. $\{4,5\}$

C. $\{2,3,4,5,7\}$　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

3. ('06 年安徽) 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\mathbf{R}$

B. $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

C. $\{0\}$

D. $\varnothing$

4. ('06 年辽宁)(理) 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

5. ('06 年山东) 定义集合运算：$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )

A. 0　　B. 6

C. 12　　D. 18

6. 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

7. 设 A、B、I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是 ( )

A. $(\complement_I A)\cup B=I$

B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

8. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$P=\{x\mid y=\log_{\frac{1}{2}}x,y\in M\}$，下列各式中，正确的是 ( )

A. $M\cap P=P$

B. $M\cup(\complement_U P)=M$

C. $(\complement_M)\cup P=\{x\mid x\leqslant 1\}$

D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant 0\text{ 或 }\frac{1}{2}<x<1\right\}$

二、填空题

9. ('06 上海) 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ______.

10. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ ______.

11. 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是 ______.

三、解答题

12. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的定义域为 B.

(1) 求 A；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

13. 记函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=\sqrt{1-\frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求

(1) 集合 M、N；

(2) 集合 $M\cap N$，$M\cup N$.

14. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围；

(2) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并把这个元素写出来；

(3) 若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围；

(4) 若 A 中仅有两个元素，求 a 的取值范围.

15. 设函数 $f(x)=\lg(\frac{2}{x+1}-1)$ 的定义域为 A，$g(x)=\sqrt{(x-a)^2-1}$ 的定义域为 B.

(1) 当 $a=1$ 时，求集合 $A\cap B$；

(2) 若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等解法

知识要点梳理

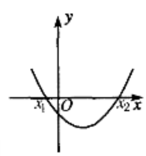
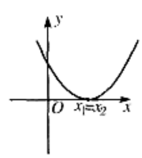
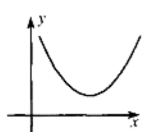
1. 绝对值不等式的解法：

(1) 当 $a>0$ 时，$|x|>a$ 的解集为________；$|x|<a$ 的解集为________.

(2) 当 $a=0$ 时，$|x|>a$ 的解集为________；$|x|<a$ 的解集为________.

(3) 当 $a<0$ 时，$|x|>a$ 的解集为________；$|x|<a$ 的解集为________.

2. 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是一个有机的整体，要理解和掌握三者之间的联系，下面以 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 为例，结合 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根，研究不等式解的情况：

$\Delta=b^2-4ac$	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象	$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的实数根	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解
$\Delta>0$		$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	不等式的解集为：________
$\Delta=0$		$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	不等式的解集为：________
$\Delta<0$		方程无解	不等式的解集为：________

3. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数解的分布问题：

记 $f(x)=ax^2+bx+c$，x_1,x_2 为 $f(x)=0$ 的两实根，且 $x_1<x_2$.

(1) x_1,x_2 均小于 $k\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ k\ \_\_\_\_\_\_\ -\frac{b}{2a},\\ af(k)\ \_\_\_\_\_\_\ 0;\end{cases}$

(2) x_1,x_2 均大于 $k\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ k\ \_\_\_\_\_\_\ -\frac{b}{2a},\\ af(k)\ \_\_\_\_\_\_\ 0;\end{cases}$

(3) $x_1,x_2\in(k_1,k_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ af(k_1)\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ af(k_2)\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ k_1<-\frac{b}{2a}<k_2;\end{cases}$

(4) $x_1<k_1,x_2>k_2(k_1<k_2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ \_\_\_\_\_\_\ 0,af(k_1)\ \_\_\_\_\_\_\ 0,\\ af(k_2)\ \_\_\_\_\_\_\ 0;\end{cases}$

(5) x_1,x_2 仅有一个在 (k_1,k_2) 内 $\Leftrightarrow f(k_1)f(k_2)$ ________ 0.

疑难学法指津

1. 解绝对值不等式的关键是正确去掉绝对值符号，转化为一般不等式求解，不论使用哪种转化方法，都要求各步变形是等价变形(同解变形)，这也是解任何不等式必须遵循的基本原则.

2. 解带参数的不等式 $(x-a)(x-b)>0$ 应讨论 a 与 b 的大小. 解一元二次不等式的一般过程是：一看(看二次项系数的符号)，二算(计算判别式，判断相应方程根的情况或求根)，三写(写出不等式解集).

3. 解分式不等式时不宜去分母，应把分式 $\frac{ax+b}{cx+d}\geqslant0$ 转化成和它等价的 $\begin{cases}(ax+b)(cx+d)\geqslant0\\ cx+d\neq0\end{cases}$ 不等式组来解.

基础跟踪体验

1. 不等式 $|x+1|+1<0$ 的解集是 ( )

A. $\{x|-2<x<0\}$　　B. $\mathbf{R}$

C. $x<-2$ 或 $x>0$　　D. $\varnothing$

2. 不等式 $3-|-2x-1|>0$ 的解集是 ( )

A. $\{x|x\in\mathbf{R}\}$

B. $\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$

C. $\{x|-2<x<1\}$

D. $\{x|-1<x<2\}$

3. 不等式 $\frac{x-1}{2x}\leqslant1$ 的解集是 ( )

A. $\{x|x\geqslant-1\}$　　B. $\{x|x\leqslant-1\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant0\}$　　D. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x>0\}$

4. 不等式 $2x+3-x^2>0$ 的解集是 ( )

A. $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leqslant x<1\right\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<3\}$　　D. $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leqslant x<3\right\}$

典例分类剖析

题型一：含绝对值不等式的解法

解绝对值不等式的关键是如何去掉绝对值符号，常用方法有：

(1) $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$. 此转化无需讨论 $g(x)$ 的正负.

(2) 平方法，注意两边非负.

$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$；$|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$.

(3) 分段讨论：对含有多个绝对值的不等式，可找到零点(零点即是使含绝对值符号的代数式的值等于 0 的未知数的值)，将这些值标在数轴上，它们将数轴分成若干段，进行分段讨论.

(4) 对形如 $|x-a|+|x-b|<c$，$|x-a|+|x-b|>c$ 的不等式，可利用绝对值的几何意义来确定不等式的解集.

【例题 1】 解不等式 $|x+1|>2-x$.

【解】 解法一　令 $x+1=0$，则 $x=-1$.

当 $x\geqslant -1$ 时，原不等式变形为 $x+1>2-x$，

$\therefore x>\frac{1}{2}$；

当 $x<-1$ 时，原不等式变形为 $-(x+1)>2-x$，得 $-1>2$，

$\therefore$ 此时无解.

综上，原不等式的解集为 $\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$.

解法二　由 $|x+1|>2-x$ 可得

$x+1>2-x$，　①

或 $x+1<-(2-x)$.　②

由 ① 解得 $x>\frac{1}{2}$，② 无解.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$.

解法三　观察不等式

(1) 当 $2-x<0$ 时，不等式显然成立.

$\therefore x>2$ 是原不等式的解.

(2) 当 $2-x\geqslant 0$ 时，两端平方有 $x^2+2x+1>x^2-4x+4$，即 $6x>3$.

$\therefore x>\frac{1}{2}$. 又 $2-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 2$.

$\therefore \frac{1}{2}<x\leqslant 2$ 是原不等式的解.

综上所述，原不等式的解集为 $\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$.

【评注】 解法一是分段去绝对值的方法，这是处理含有多个绝对值的不等式的基本方法；解法二是公式的应用，这里可不必考虑 $2-x$ 的正负；解法三是平方法去绝对值，要注意两边非负.

【例题 2】 解不等式 $3<|2x-3|<5$.

【分析】 (1) 由于原不等式等价于 $|2x-3|>3$ 且 $|2x-3|<5$，因此可先分别解出两个绝对值不等式的解集，然后求其交集.

(2) 根据绝对值的含义.

$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$，利用分类讨论的方法去掉绝对值符号，进而求解.

(3) 可以利用绝对值不等式的几何意义.

【解】 解法一　原不等式等价于不等式组

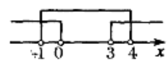
$\begin{cases}|2x-3|>3 & ①\\ |2x-3|<5 & ②\end{cases}$

由 ① 得 $2x-3>3$ 或 $2x-3<-3$.

解得 $x>3$ 或 $x<0$.

由 ② 得 $-5<2x-3<5$.

解得 $-1<x<4$.



如上图所示，所以原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<0$ 或 $3<x<4\}$.

解法二　原不等式可化为不等式组

$\begin{cases}2x-3\geqslant 0\\ 3<2x-3<5\end{cases}$　①

或 $\begin{cases}2x-3<0\\ 3<-(2x-3)<5\end{cases}$　②

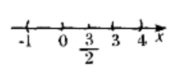
由 ① 得 $\begin{cases}x\geqslant \frac{3}{2}\\ 3<x<4\end{cases}$，解得 $3<x<4$.

由 ② 得 $\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ -1<x<0\end{cases}$，解得 $-1<x<0$.

所以原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<0$ 或 $3<x<4\}$.

解法三　$3<|2x-3|<5\Leftrightarrow \frac{3}{2}<|x-\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$，

$\frac{3}{2}<|x-\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$ 的几何意义为数轴上点 x 到点 $\frac{3}{2}$ 的距离大于 $\frac{3}{2}$ 且小于 $\frac{5}{2}$. 如图



则以点 $\frac{3}{2}$ 为圆心，以 $\frac{3}{2}$ 为半径画弧得端点 0，3(图中较短的弧) 以外；再以 $\frac{3}{2}$ 为圆心，以 $\frac{5}{2}$ 为半径画弧得端点 -1，4(图中长的弧) 以内，则交集为 $(-1,0)\cup(3,4)$.

【评注】 掌握绝对值的定义：

$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$ 及基本绝对值不等式：$a>0$ 时，$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$

是解决本题的关键，也是解决其他较难绝对值不等式的基础，能将绝对值不等式转化为普通的不等式(组)，或将已知不等式从整体上解决，也可联系绝对值的几何意义求解.

方法一，两不等式 $|2x-3|>3$ 和 $|2x-3|<5$ 须取交集，最好能画数轴帮助求解，既简便也不易出错；方法三利用绝对值的几何意义，必须先转化为 $\frac{3}{2}<|x-\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$，使 x 的系数为 1.

【例题 3】 解不等式 $|x-1|+|x+2|<5$.

【分析】 可通过零点分段法和绝对值的几何意义来解决.

【解】 解法一　分别求 $|x-1|$，$|x+2|$ 的零点，即 $1,-2$. 由 $-2,1$ 把数轴分成三部分：$x<-2$，$-2\leqslant x\leqslant 1$，$x>1$.

当 $x<-2$ 时原不等式即 $1-x-2-x<5$，

解得 $-3<x<-2$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，原不等式即 $1-x+2+x<5$，

因为 $3<5$ 恒成立，则 $-2\leqslant x\leqslant 1$；

当 $x>1$ 时，原不等式即 $x-1+2+x<5$，

解得 $1<x<2$.

综上，原不等式的解集为 $\{x|-3<x<2\}$.

解法二　不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的几何意义为数轴上到 $-2,1$ 两个点的距离之和小于 5 的点组成的集合，而 $-2,1$ 两个端点之间的距离为 3，由于分布在 $-2,1$ 以外的点到 $-2,1$ 的距离在 $-2,1$ 外部的距离要计算两次，而在 $-2,1$ 内部的距离则只计算一次，因此只要找出 -2 左边到 -2 的距离等于 $\frac{5-3}{2}=1$ 的点 -3，以及 1 右边到 1 的距离等于 $\frac{5-3}{2}=1$ 的点 2，这样，原不等式的解集为 $\{x|-3<x<2\}$.

【评注】 (1) 一般地，对 $|x-m|+|x-n|<a$，为叙述方便，不妨设 $m<n$，且 m、n 之间的距离小于 a，那么从几何意义来看，求出 m 左边到 m 的距离等于 $\frac{a-(n-m)}{2}$ 的点 $\frac{m+n-a}{2}$，以及 n 右边到 n 的距离等于 $\frac{a-(n-m)}{2}$ 的点 $\frac{m+n+a}{2}$，则不等式的解集为 $\{x|\frac{m+n-a}{2}<x<\frac{m+n+a}{2}\}$. 不难推出，$|x-m|+|x-n|\geqslant a$ 的解集为 $\{x|x\leqslant\frac{m+n-a}{2}$ 或 $x\geqslant\frac{m+n+a}{2}\}$.

(2) 本题如果是求 $|x-m|-|x-n|<a$，则通过几何意义同样可以求出来：不妨设 $m<n$，显然 m,n 的中点 $\frac{m+n}{2}$ 到 m,n 两点的距离相等；m 左侧的点(含 m) 到 m,n 的距离之差等于 $m-n$；n 右侧的点(含 n) 到 m,n 的距离之差等于 $n-m$，且 m,n 之间的点到 m,n 的距离之差介于 $m-n$ 和 $n-m$ 之间，根据 a 的大小，可以确定原不等式的解集.

题型二：一元二次不等式的解法

解一元二次不等式的步骤是：

(1) 将二次项系数化为正数.

(2) 求出相应一元二次方程的根.

(3) 据二次函数的图象、二次方程的根与不等式解集的关系，结合不等号定解.

【例题 4】 解关于 x 的不等式：$ax^2-(a+1)x+1<0$.

【解】 (1) 当 $a=0$ 时，原不等式化为 $-x+1<0$，

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|x>1\}$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，原不等式可化为 $a(x-1)\cdot(x-\frac{1}{a})<0$.

当 $a<0$ 时，有 $(x-1)(x-\frac{1}{a})>0$，

$\because \frac{1}{a}<1$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1\}$.

当 $a>0$ 时，原不等式可化为 $(x-1)(x-\frac{1}{a})<0$.

① 当 $\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$.

② 当 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，不等式即为 $(x-1)^2<0$，解集为 $\varnothing$.

③ 当 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$.

综上所述，原不等式的解集为：

当 $a<0$ 时，$\{x|x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1\}$；

当 $a=0$ 时，$\{x|x>1\}$；

当 $0<a<1$ 时，$\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$；

当 $a=1$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $a>1$ 时，$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$.

【评注】 对含有字母的不定方程或不等式等问题均要分情况进行讨论，讨论时要做到不重不漏，而且最后还要得出结论.

① 容易忽视 $a=0$ 的情况；② 在每种情况里面同时还可能含有其他情况，比如 $a>0$ 里，还要分 $a>1$，$a=1$，$0<a<1$ 三种情况，否则就不完整.

【例题 5】 已知 $a\in\mathbf{R}$，二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A，又知集合 $B=\{x|1<x<3\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

(2006 年，全国 Ⅱ 21 题，12 分)

【分析】 本题涉及数学第一章集合的概念与运算、一

元二次不等式的解法.考查了集合中交集的概念、一元二次不等式的解法等基础知识,其中一元二次不等式是每年必考的内容.解决这一部分内容的关键是熟练掌握一元二次不等式的解法.整个解题思路如下:

解一元二次不等式 → 确定集合关系 → 求出参数范围.

① 复习集合的运算关系即交集、并集、补集,明确 $A\cap B\neq\varnothing$ 的含义:即 A 与 B 至少有一个公共元素;② 明确一元二次不等式的解法,掌握一元二次不等式解集的两个端点实际就是一元二次方程的两根,从而得出解决问题的方法就是保证一元二次不等式 $ax^2-2x-2a>0$ 解集的两个端点中至少有一个在区间(1,3)内;③ 其实本题也可以利用根的分布进行处理.

【解】 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq 0$.

令 $f(x)=0$ 解得其两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$,$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$.

由此可知 $x_1<0$,$x_2>0$.

(ⅰ) 当 $a>0$ 时,$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$,

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$,即

$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$,

解得 $a>\frac{6}{7}$.

(ⅱ) 当 $a<0$ 时,$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$,即

$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$,

解得 $a<-2$.

综上,使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(\frac{6}{7},+\infty)$.

附另解:要使 $A\cap B\neq\varnothing$,可分以下两种情况考虑(由于 $\Delta>0$).

(ⅰ) 方程 $f(x)=0$ 有一根在(1,3)内则应满足

$f(1)\cdot f(3)<0$,解得 $\left\{a\mid a<-2 \text{ 或 } a>\frac{6}{7}\right\}$

(ⅱ) 方程 $f(x)=0$ 两根都在(1,3)内,由于此时至少应满足对称轴 $x=\frac{1}{a}\in(1,3)$,

$\therefore \frac{1}{3}<a<1$.

所以应满足 $\begin{cases}\Delta>0,\\ \frac{1}{3}<a<1,\\ f(1)>0,\\ f(3)>0,\end{cases}$

解得 $a\in\varnothing$.

综上可知此时 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(\frac{6}{7},+\infty)$.

【评注】 此题难点在于考生对符号 $A\cap B\neq\varnothing$ 的理解,对题目所给出的条件不能认清其实质内涵,同时有部分学生虽然读懂了题目,对于 $f(x)>0$ 不敢直接去求解,因而感觉无从下手.

巩固检测提升

一、选择题

1. 不等式 $|x+2|>\frac{3x+14}{5}$ 的解是 ( )

   A. $x<-3$ 或 $x>2$　　B. $-3<x<2$

   C. $-2<x<0$　　D. $0<x<2$

2. 不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是 ( )

   A. $\{x\mid -3<x<2\}$

   B. $\{x\mid -1<x<2\}$

   C. $\{x\mid -2<x<1\}$

   D. $\left\{x\middle| -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$

3. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $0<\alpha<x<\beta$,则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集是 ( )

   A. $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$　　B. $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

   C. $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$　　D. $-\frac{1}{\beta}<x<-\frac{1}{\alpha}$

4. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 ( )

   A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid x<0$ 且 $x\neq-1\}$

   C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\{x\mid x<1$ 且 $x\neq-1\}$

5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2+px+q<0\}$ 满足 $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,则 p,q 满足 ( )

   A. $2p+q+4=0$　　B. $p+q+5=0$

   C. $p+q=0$　　D. $p-q=0$

6. 若不等式 $5-x>7|x+1|$ 和不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集相同,则实数 a,b 的值为 ( )

   A. $a=-8,b=-10$　　B. $a=-1,b=9$

   C. $a=-4,b=-9$　　D. $a=-1,b=2$

7. 使关于 x 的不等式 $|x+1|+k<x$ 有解的实数 k 的取值范围是 ( )

   A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,1)$

   C. $(-1,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

二、填空题

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,则 a 的取值范围是________.

9. 设集合 $A=\{x\mid|4x-1|\geqslant 9,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid\frac{x}{x+3}\geqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cap B$ ________.

10. 已知集合 $M=\{x\mid|x-1|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$,$P=\{x\mid\frac{5}{x+1}\geqslant 1,x\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap P$ 等于________.

三、解答题

11. 解不等式 $3 < \left|2x-\frac{2}{3}\right| \leqslant 7$.

12. 解不等式 $a|x-1| > 2+a(a \in \mathbf{R})$.

13. 解不等式 $2x^2 \leqslant |x-1|$.

14. 已知不等式 $2x-1 > m(x^2-1)$

(1) 对于所有实数 x 不等式恒成立，求 m 的取值范围；

(2) 若对于 $m \in [-2,2]$ 不等式恒成立，求 m 的取值范围.

15. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-5x+4 \leqslant 0\}$ 与 $B=\{x \mid x^2-2ax+a+2 \leqslant 0\}$，若 $B \subseteq A$，求 a 的范围.

1.3 逻辑联结词与四种命题

知识要点梳理

1. 逻辑联结词.

(1) 可以判断________的语句叫命题，不含逻辑联结词的命题叫做________命题；由简单命题与逻辑联结词构成的命题，叫做________命题.

(2) 逻辑联结词：

或：两个简单命题至少一个成立.

且：两个简单命题均成立.

非：对一个命题的否定.

(3) 真值表：表示命题真假的表叫真值表.

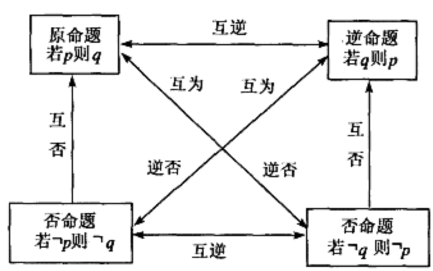
复合命题的真假可通过下面的真值表来加以判定：

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真			
真	假			
假	真			
假	假			

2. 四种命题

(1) 四种命题.

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式为：



原命题：____________；

逆命题：____________；

否命题：____________；

逆否命题：____________；

(2) 四种命题的关系.

3. 反证法.

欲证"若 p 则 q"为真命题，从________即"________"出发，经过正确的逻辑推理导出矛盾，从而"________"为假，即原命题为真，这样的方法称为反证法.

疑难学法指津

1. 一个语句是否为命题，关键要看能否判断真假. 陈述句、反诘疑问句都是命题，而祈使句、疑问句、感叹句都不是命题.

2. 会运用逻辑联结词，把几个简单命题构成复合命题；反之，会把一个复合命题分解为几个简单命题.

3. 根据一个命题来构造它的逆命题、否命题和逆否命题的关键在于分清条件和结论. 一个命题的否定与命题的否命题是不同的，前者只否定结论，后者既否定条件，又否定结论.

4. 判断命题的真假要以真值表为依据. 原命题与其逆否命题为等价命题，逆命题与否命题为等价命题，一真俱真，一假俱假. 当一个命题的真假不易判断时，可考虑判断其等价命题的真假.

5. 确定一个若"p则q"形式的命题为真，一般要由条件"p"经过一定的逻辑推理得出结论"q"，确定一个"若 p 则 q"的命题为假，一般只须举一个反例说明即可.

基础跟踪体验

1. 命题"菱形的对角线互相垂直平分"是 (　　)
   A. 简单命题
   B. "p 或 q"形式的复合命题
   C. "p 且 q"形式
   D. "非 p"形式的复合命题
2. 已知命题 p:0 是偶数，命题 q:1 是最小的质数，则下列命题为真的是 (　　)
   A. p 且 q　　B. p 或 q
   C. 非 p　　D. 非 p 且非 q
3. 如果原命题的结论是"p且q"形式，那么否命题的结论形式为 (　　)
   A. $\neg p$ 且 $\neg q$　　B. $\neg p$ 或 $\neg q$
   C. $\neg p$ 或 q　　D. p 或 $\neg q$
4. 若命题 p 的否命题为 r，命题 r 的逆命题 s，则 s 是 p 的逆命题 t 的 (　　)
   A. 逆否命题　　B. 逆命题
   C. 否命题　　D. 原命题

典例分类剖析

题型一：复合命题真假的判断问题

解这类问题要弄清逻辑联结词和简单命题及复合命题以及复合命题的构成形式，准确地运用真值表判断.

【例题 1】 判断下列复合命题的真假：

(1) 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边；

(2) 方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 $x=\pm1$；

(3) $A \not\subseteq (A\cup B)$.

【分析】 先确定复合命题的构成形式以及构成它的简单命题，然后研究各简单命题的真假，最后再根据相应地真值表判定复合命题的真假.

【解】 (1) 这个命题是"p且q"的形式，其中 p:等腰三角形顶角的平分线平分底边，q:等腰三角形项角的平分线垂直于底边，因 p 真 q 真，则"p 且 q"真，所以该命题是真命题.

(2) 这个命题是"p 或 q"的形式，其中 p:方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 1，q:方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 -1，因 p 假 q 真，则"p 或 q"真，所以该命题是真命题.

(3) 这个命题是"非 p"的形式，其中：p:$A\subseteq(A\cup B)$，因 p 真，则"非 p"假，所以该命题是假命题.

【评注】 一个复合命题，从字面上看不一定有"或"、"且"、"非"字样，这样需要我们掌握一些词语、符号或式子与逻辑联结词"或"、"且"、"非"的关系，如"或者"、"$x=\pm1$"、"$\leqslant$"的含义为"或"；"$\not\parallel$"的含义为"且"；"不是"、"$\not\subseteq$"的含义为"非".

题型二：四种命题及真假的判断问题

解这类问题的基础是会准确地写出四种命题，把握原命题与逆否命题，逆命题和否命题的等价性.

【例题 2】 写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并分别判断四种命题的真假：

(1) 末位数字是 0 的多位数一定是 5 的倍数；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB>AC$，则 $\angle C>\angle B$；

(3) 若 $x^2-2x-3>0$，则 $x>3$ 或 $x<-1$；

(4) 若 $m^2-4n\geqslant0$，则对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有不等式 $x^2+mx+n>0$ 成立.

【分析】 写出一个命题的逆命题、否命题和逆否命题，关键是找出原命题的条件 p 与结论 q，将原命题写成"若 p 则 q"的形式. (2) 中原命题有大前提"在 $\triangle ABC$ 中"，在写出它的逆命题、否命题和逆否命题时，应当保留这个大前提.

(3) 中"$x>3$ 或 $x<-1$"的否定形式是"$x\leqslant3$ 且 $x\geqslant-1$"，即"$-1\leqslant x\leqslant3$". 一般地"p或q"的否定形式是"非 p 且非 q"，"p 且 q"的否定形式是"非 p 或非 q".

【解】 (1) 原命题：若一个多位数的末位数字是 0，则它是 5 的倍数.

逆命题：若一个多位数是 5 的倍数，则它的末位数字是 0.

否命题：若一个多位数的末位数字不是 0，则它不是 5 的倍数.

逆否命题：若一个多位数不是 5 的倍数，则它的末位数字不是 0.

这里，原命题与逆否命题为真命题，否命题与逆命题是假命题.

(2) 逆命题：在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C>\angle B$，则 $AB>AC$.

否命题：在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB\leqslant AC$，$\angle C\leqslant\angle B$.

逆否命题：在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C \leqslant \angle B$，则 $AB \leqslant AC$.

这里，四种命题都是真命题.

(3) 逆命题：若 $x>3$ 或 $x<-1$，则 $x^2-2x-3>0$.

否命题：若 $x^2-2x-3 \leqslant 0$，则 $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

逆否命题：若 $-1 \leqslant x \leqslant 3$，则 $x^2-2x-3 \leqslant 0$.

这里，四种命题都是真命题.

(4) 逆命题：若对于任意 $x \in \mathbf{R}$，都有不等式 $x^2+mx+n>0$ 成立，则 $m^2-4n \geqslant 0$.

否命题：若 $m^2-4n<0$，则存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $x^2+mx+n \leqslant 0$.

逆否命题：若对于任意 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $x^2+mx+n \leqslant 0$，则 $m^2-4n<0$.

这里，四种命题都是假命题.

【评注】 写原命题的逆命题、否命题、逆否命题时，比较容易错的是写否命题，原命题是“若 p 则 q”的形式时，否命题就应为“若 $\neg p$ 则 $\neg q$”，既要否定条件，又要否定结论.四种命题形式之间的关系是相对的，如逆命题的逆命题是原命题，逆否命题的逆否命题也是原命题.原命题与逆否命题同真假，而原命题与逆命题（或否命题）未必同真假，如(1).由于逆命题与否命题之间的关系是“互为逆否”，因此，逆命题与否命题同真假，则有时原命题的真假不易判断时，可判断它的逆否命题的真假.常见的否定形式有：

原语句	是	都是	$>$	至少有一个	至多有一个	对任意 $x \in A$，使 $p(x)$ 真
否定形式	不是	不都是	$\leqslant$	一个也没有	至少有两个	存在 $x \in A$，使 $p(x)$ 假

题型三：反证法在证明题中的应用

有许多证明题，直接入手证明较难，可以从其反面，用反证法进行证明，一般为解答题目，证明过程不是很繁，证题的关键是假设原结论的对立问题成立，由此导出矛盾.

【例题3】 a,b,c 为实数，且 $a=b+c+1$，证明：两个一元二次方程 $x^2+x+b=0$，$x^2+ax+c=0$ 中至少有一个方程有两个不相等的实数根.

【分析】 本题若直接分析要分两种情况讨论，要证明两次，过程比较繁琐，可以从结论的对立面分析，即两个方程都没有两个不等的实数根，用反证法进行证明.

【证明】 假设两个方程都没有两个不等的实数根，则

$\Delta_1=1-4b \leqslant 0$，$\Delta_2=a^2-4c \leqslant 0$，

$\therefore \Delta_1+\Delta_2=1-4b+a^2-4c \leqslant 0$.

$\because a=b+c+1$，$\therefore b+c=a-1$.

$\therefore 1-4(a-1)+a^2 \leqslant 0$，

即 $a^2-4a+5 \leqslant 0$.

但是 $a^2-4a+5=(a-2)^2+1>0$，故矛盾.

所以假设不成立，原命题正确，即两个方程中至少有一个方程有两个不相等的实根.

【评注】 (1) 反证法可应用于数学证明的各个方面，只要正面直接证明有困难且有可能从结论的否定可推出矛盾的可能时，应考虑反证法.

(2) 反证法证题的关键是假设后推出矛盾.矛盾有三种可能：① 与原命题的条件矛盾；② 与定义、公理、定理等矛盾；③ 与结论的反面成立矛盾.

巩固检测提升

一、选择题

1. 下列判断错误的是 ( )
   A. 命题“p 且 q”的否定命题是“$\neg p$ 或 $\neg q$”
   B. 条件 $|a|<1$ 且 $|b|<2$ 是 $|a+b|<3$ 的充要条件
   C. 集合 $A=\{a,b,c\}$，集合 $B=\{0,1\}$，则从集合 A 到集合 B 的不同的映射个数有 8 个
   D. 命题 p：若 $M \cup N=M$ 则有 $N \subsetneqq M$，命题 q：$5 \notin \{2,3\}$，则命题“p 且 q”为假
2. 给出两个命题：p：$|x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数；q：存在反函数的函数一定是单调函数，则下列复合命题为真命题的是 ( )
   A. p 且 q　　B. p 或 q
   C. $\neg p$ 且 q　　D. $\neg p$ 或 q
3. 如果命题“非 p 或非 q”是假命题，则在下列各结论中，正确的为 ( )
   ① 命题“p 且 q”是真命题
   ② 命题“p 且 q”是假命题
   ③ 命题“p 或 q”是真命题
   ④ 命题“p 或 q”是假命题
   A. ①③　　B. ②④
   C. ②③　　D. ①④
4. 下面有四个命题
   ① $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k \in \mathbf{Z})$ 是 $\tan x=\sqrt{3}$ 的充分非必要条件；
   ② 函数 $f(x)=|2\cos x-1|$ 的最小正周期是 π；
   ③ 函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数；
   ④ 函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ 的图象的一条对称轴的方程为 $x=\frac{\pi}{4}$，则 $a+b=0$.
   其中正确命题的个数是 ( )
   A. 1　　B. 2
   C. 3　　D. 4
5. 命题 p：函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$，
   命题 q：函数 $g(x)=\sin(2x+\theta)+1$ 可能是奇函数（θ 为常数）；则复合命题“p 或 q”“p 且 q”“非 q”为真命题的个数为 ( )
   A. 0 个　　B. 1 个
   C. 2 个　　D. 3 个
6. 给出命题：“已知 a,b,c,d 是实数，若 $a \neq b$ 且 $c \neq d$，则 $a+c \neq b+d$”. 对原命题，逆命题，否命题，逆否命题而言，

其中的真命题有 ( )

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 4个

7. (郑州质检1月,4)给出两个命题:p:$|x|=x$的充要条件是x为正实数;q:存在反函数的函数一定是单调函数.则下列复合命题是真命题的为 ( )

A. p且q　　B. p或q

C. $\neg p$且q　　D. $\neg p$或q

8. 设有两个命题:

① 关于x的不等式$x^2+2ax+4>0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立;

② 函数$f(x)=-(5-2a)^x$是减函数,若命题有且只有一个是真命题,

则实数a的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(-2,2)$　　D. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

二、填空题

9. 已知命题p:$|x-2|<a(a>0)$,命题q:$|x^2-4|<1$,若p是q的充分不必要条件,则实数a的取值范围是________.

10. 给出下列命题:

① 若命题p:"$x>1$"是真命题,则命题q:"$x\geqslant 1$"是真命题;

② 函数$y=2^{-x}(x>0)$的反函数是$y=-\log_2 x(x>0)$;

③ 如果一个简单多面体的所有面都是四边形,那么$F=V-2$(其中F为面数,V为顶点数);

④"$a\neq 1$或$b\neq 5$"的充分不必要条件是"$a+b\neq 6$",其中所有真命题的序号是________.

11. 设命题p:$|4x-3|\leqslant 1$;命题q:$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$,若$\neg p$是$\neg q$的必要不充分条件,则实数$a$的取值范围是________.

三、解答题

12. 已知命题p:方程$ax^2+ax-2=0$在$[-1,1]$上有解;命题q:只有一个实数x满足:$x^2+2ax+2a\leqslant 0$.若命题"p或q"为假命题,求实数a的取值范围.

13. 已知p:$f^{-1}(x)$是$f(x)=1-3x$的反函数,且$|f^{-1}(a)|<2$;q:集合$A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x>0\}$且$A\cap B=\varnothing$.

求实数a的取值范围,使p,q中有且只有一个真命题.

14. a、b、$c\in\mathbf{R}$,写出命题"若$ac<0$,则$ax^2+bx+c=0$有两个不相等实根"的逆命题、否命题、逆否命题的真假.

15. 已知下列三个方程:

$x^2+4ax-4a+3=0$,

$x^2+(a-1)x+a^2=0$,

$x^2+2ax-2a=0$

至少有一个方程有实根,求实数a的取值范围.

1.4 充要条件

知识要点梳理

1. 如果已知$p\Rightarrow q$,那么p是q的________条件,q是p的________条件.

2. 如果既有$p\Rightarrow q$,又有$q\Rightarrow p$,记作$p\Leftrightarrow q$,那么p是q的________条件,简称充要条件.

3. 如果$p\Rightarrow q$,$q\not\Rightarrow p$,那么p是q的________条件,q是p的________条件.

4. 从集合观点看,建立命题p,q相应的集合,p:$A=$