教育科学“十五”国家规划课题研究成果

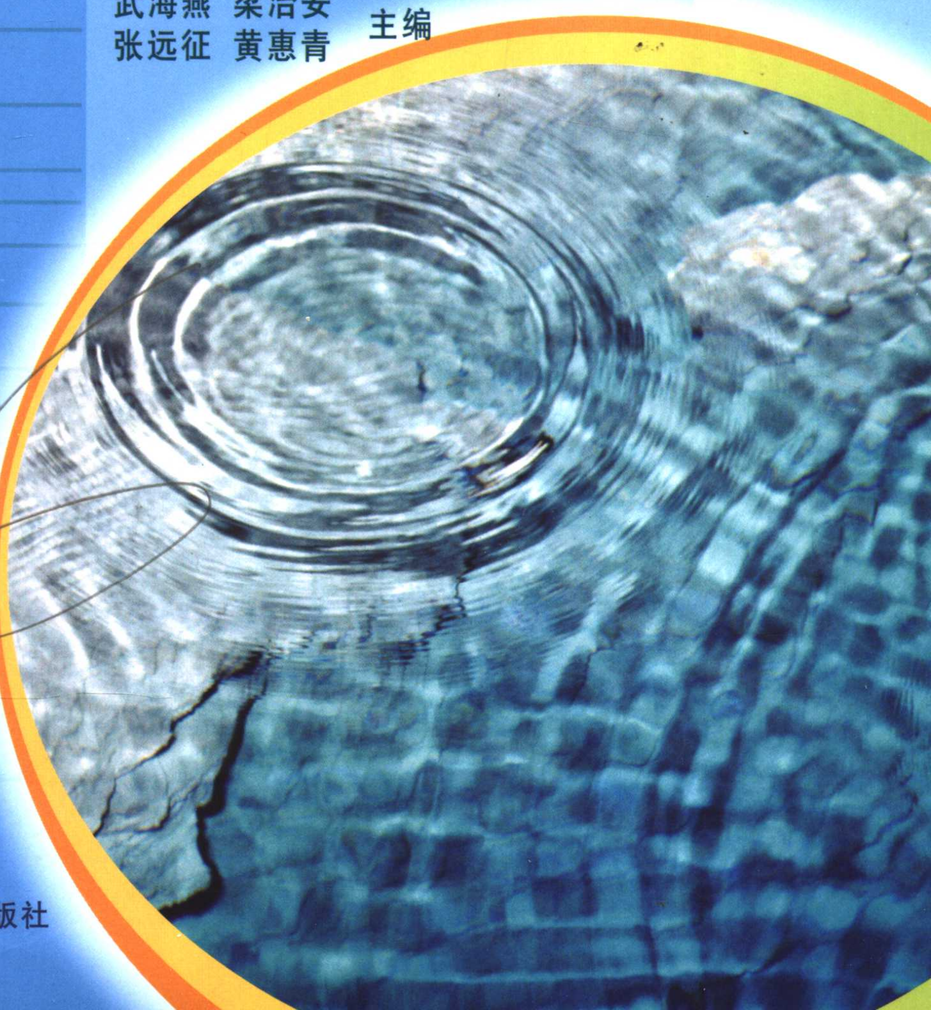
高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

●总主编 陈文灯 杜之韩

# 线性代数

## 同步辅导

武海燕 梁治安
张远征 黄惠青 主编



高等教育出版社

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

总主编　陈文灯　杜之韩

# 线性代数同步辅导

武海燕　梁治安　张远征　黄惠青　主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是与陈文灯、杜之韩总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《线性代数》（教育科学“十五”国家规划课题研究成果）相配套的教学参考书。本书共有五章内容：矩阵、线性方程组、向量空间、特征值和特征向量、二次型。每章内容包括基本概念、定理与公式，典型题型讲解与训练和考研试题精选三部分，紧扣考研大纲，使学生在掌握基础知识的同时，提高应用能力。

本书可作为高等学校经济管理类专业教学辅导书，也是有志考研学生的一本有价值的参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数同步辅导/武海燕等主编. —北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022592-1

Ⅰ.线… Ⅱ.武… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190114 号

**策划编辑** 马 丽 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 张申申
**版式设计** 王艳红 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 毛斯璐

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 印　　刷 | 唐山市润丰印务有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| | | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2008年1月第1版 |
| 印　　张 | 11.25 | 印　　次 | 2008年1月第1次印刷 |
| 字　　数 | 200 000 | 定　　价 | 13.00元 |



**物料号　22592-00**

# 前　　言

本书是与陈文灯、杜之韩总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《线性代数》(教育科学“十五”国家规划课题研究成果)相配套的教学参考书。由于线性代数的概念、定理、性质繁多，再现率低，且受教学学时和教材篇幅限制，教材不能详尽展开讲解，例题也偏少，这就更增加了学生学习的困难，尤其做习题往往感到无从下手。为此，我们在归纳十多年教学经验和考研培训的基础上编写了这本书，相信会对学生的学习有所帮助。

本书紧扣《线性代数》教材，按教材章节顺序编排，共分五章。本书有如下特点：

一、对基本概念、基本理论进行剖析，并通过例题对重要概念、定理和公式加以强化讲解，使学生吃透其中的精髓。

二、列举了很多比较新颖的例子来说明解题的方法和技巧，以打开学生的思路和眼界。

三、在每个章节之后，编排了具有启发意义的综合题，帮助学生把各个知识点串联起来，使知识学得更活、更扎实。

四、在练习题中选录了与考研相关的试题，可以使学生在刚接触线性代数时，就对考研数学有所了解，一方面培养他们对数学的兴趣，另一方面又可以激发他们的创造性。

本书适用于本科阶段同步学习和考研备考学生的复习。

本书成书仓促，错误和疏漏之处在所难免，恳请数学界同仁和读者予以指正。

编者

2007 年 6 月

# 目　　录

# 第一章

# 矩　　阵

## §1.1　基本概念、定理与公式

### 一、矩阵的概念和运算

**1. 定义**

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}$.

特别地，当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}_{n \times n}$ 为 $n$ 阶矩阵(或方阵).

**2. 几类特殊矩阵**

(1) **单位矩阵**　主对角线元素均为 1，其余元素为零的方阵，记为 $\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{I}$).

(2) **对角矩阵**　主对角线上的元素为任意常数，而主对角线外的元素都是零的方阵，记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$；若主对角线上的元素相等，则称为数量矩阵，记为 $k\boldsymbol{E}$.

(3) **三角形矩阵**　主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角形矩阵；主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角形矩阵；上、下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

(4) **矩阵的转置** 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列的元素位置交换后所得的矩阵称为矩阵 $A$ 的转置，记为 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$.

(5) **对称矩阵** 如果 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A^{\mathrm{T}}=A$，则称 $A$ 为对称矩阵；如果 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称 $A$ 为反称矩阵.

【注】 任意矩阵 $A$，有 $A=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}+\dfrac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$(为一对称矩阵和反称矩阵之和).

(6) **正交矩阵** 设 $A$ 为方阵，如果有 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=E$，则称 $A$ 为正交矩阵.

(7) **可交换矩阵** 设 $A$，$B$ 是同阶方阵，若 $AB=BA$，则称 $A$，$B$ 为可交换矩阵.

**3. 矩阵的运算**

(1) **矩阵的相等** 相等的矩阵必须是同型矩阵，即具有相同的行数和列数，设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(2) **矩阵的和与差** 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$，即两个同型矩阵相加(减)，为其所有对应元素相加(减).

(3) **数乘矩阵** $kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的加法和数乘运算满足下列运算规律：

① 交换律 $A+B=B+A$；

② 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$，$k(lA)=(kl)A$；

③ 分配律 $k(A+B)=kA+kB$，$(k+l)A=kA+lA$.

以上 $A$，$B$，$C$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，$k$，$l$ 为数.

(4) **矩阵的乘法** 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则矩阵 $A$，$B$ 的乘积为 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$.

矩阵乘法满足下列运算规律：

① 结合律 $(AB)C=A(BC)$；

② 分配律 $(A+B)C=AC+BC$，$C(A+B)=CA+CB$;.

③ 数与矩阵乘积的结合律 $(kA)B=A(kB)=k(AB)$.

【注】 ① $AB\neq BA$；

② $AB=O\nRightarrow A=O$ 或 $B=O$.

(5) **方阵的幂** 对方阵 $A$，定义 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$($k$ 个 $A$ 相乘)为 $A$ 的 $k$ 次幂.特别地，若存在整数 $m$，使得 $A^m=O$，则称 $A$ 为幂零矩阵.

方阵的幂满足下列运算规律：

$$A^kA^m=A^{k+m},\ (A^k)^m=A^{km},\quad \text{其中 } k,\ m \text{ 为正整数}.$$

## 二、方阵的行列式

**1. 排列与逆序**

(1) ***n* 级排列** 由 $n$ 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 $n$ 级排列. $n$ 级排列共有 $n!$ 个.

(2) **逆序** 在一个 $n$ 级排列中，如果一个较大数排在一个较小数之前，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列的逆序数.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为偶排列；如果排列的逆序数为奇数，则称它为奇排列.

(3) **对换** 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，交换任意两数 $i_t$ 与 $i_s$ 的位置，称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性. 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

**2. 行列式定义**

由 $n^2$ 个元素排成 $n$ 行 $n$ 列的式子称为行列式，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}.$$

【注】 第一个下标按自然顺序排列，第二个下标为一个 $n$ 级排列，即由不同行不同列的 $n$ 个元素的排列，逆序数 $\tau(j_1\cdots j_n)$ 确定符号.

**3. 行列式性质**

(1) $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$，行列式转置，值不变.

(2) 交换两行(列)，行列式变号.

(3) $k\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & * & \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ & * & \end{vmatrix}$，即一个常数乘以行列式等于这个常数乘以该行列式某行元素后所组成的新行列式.

【注】 $|kA|\neq k|A|$，$|kA|=k^n|A|$，$A$ 是 $n$ 阶方阵.

(4) $\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1}\pm b_{i1} & \cdots & a_{in}\pm b_{in} \\ & * & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} & * & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & * & \end{vmatrix}.$

【注】 $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$.

(5) 将行列式某行(列)的 $k$(常数)倍加到另一行(列)上去，其值不变.

【注】 利用该性质将行列式变为三角形行列式.

**4. 行列式按行(列)展开定理**

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j,\\ 0, & i\neq j;\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}|A|, & j=k,\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

其中 $A_{ij}$ 为代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}$ 为余子式，是将 $a_{ij}$ 所在行列元素划掉后剩余元素按原来的位置排列组成的行列式.

【例 1.1】 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{pmatrix}$，则 $A_{13}+A_{23}+2A_{43}=($ $)$.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) $-8$ (E) $-4$

【解】 $A_{13}+A_{23}+2A_{43}=A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+2A_{43}$ 是将

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{vmatrix}$$

的第 3 列换为 $(1,1,0,2)^{T}$ 所得. 而

$$A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+2A_{43}=\begin{vmatrix}2&1&1&4\\1&0&1&3\\1&5&0&1\\-1&1&2&2\end{vmatrix}=4,$$

故应选(C).

**5. 范德蒙德行列式**

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\text{（所有可能差项相乘）}.$$

【注】 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互不相等，则该行列式不等于零.

## 三、逆矩阵

**1. 定义**

对于一个 $n$ 阶方阵 $A$，如果存在一个 $n$ 阶方阵 $B$，使得 $AB=BA=E$，则

称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

**2. 性质**

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$唯一；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$均可逆，且有$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且有$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $k\neq0$，则$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$；

(6) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

【注】 ① $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

② $\boldsymbol{B}$ 可逆，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

**3. 伴随矩阵**

设 $A_{ij}$为元素 $a_{ij}$的代数余子式，定义 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$；

【注】 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$是代数余子式，符号$(-1)^{i+j}$不能忘记.

## 四、分块矩阵

**1. 定义**

用水平和铅直虚线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素分割成若干个小块，每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵，则原矩阵是以这些子块为元素的分块矩阵.

**2. 运算**

与普通矩阵有类似的四则运算，可将子块或子矩阵当成通常的矩阵元素看待. 不过，在进行分块矩阵乘法运算时，应当注意左分块矩阵的列的分块必须与右分块矩阵的行的分法一致.

**3. 分块矩阵求逆**

(1) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$;

【注】 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = |AB|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

**4. 分块矩阵的行列式**

$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$，$A$，$B$ 皆为方阵.

【注】 ① $\begin{vmatrix} O & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$（方法为多次作行交换）；

② $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |AD - BC|$（等号成立当且仅当 $AC = CA$）.

## 五、初等变换

**1. 定义**

三种初等行(列)变换：

(1) 交换两行(列)；

(2) 某行(列)乘以某常数 $k$ 倍；

(3) 某行(列)的 $k$ 倍加到另一行(列).

**2. 初等矩阵**

单位矩阵 $E$ 通过上面三种初等变换所得的矩阵，分别记为

$E(i,j)$， $E(i(k))(k\neq 0)$， $E(i,j(k))$(或 $E(i,j+i(k))$).

性质：(1) $E^{T}(i,j) = E(i,j)$，$E^{T}(i(k)) = E(i(k))$，$E^{T}(i,j(k)) = E(i,j(k))$；

(2) $E^{-1}(i,j) = E(i,j)$，$E^{-1}(i(k)) = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$，$E^{-1}(i,j(k)) = E(i,j(-k))$；

(3) $E^*(i,j) = |E(i,j)|E^{-1}(i,j) = -E(i,j)$；

$E^*(i(k)) = |E(i(k))|E^{-1}(i(k)) = kE(i(k))$；

$E^*(i,j(k)) = |E(i,j(k))|E^{-1}(i,j(k)) = E(i,j(-k))$.

**3. 初等变换与初等矩阵的关系**

对矩阵 $A$ 施行一次初等行(列)变换，相当于左(右)乘同类型的初等矩阵.

则 $P_t\cdots P_1AQ_1\cdots Q_s=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$为 $A$ 的等价标准形.

**4. 等价矩阵**

若存在可逆矩阵 $P$，$Q$，使 $PAQ=B$，则称 $A$，$B$ 为等价矩阵，记为 $A\cong B$，则 $A\to B$(通过初等变换)$\cong A$

【注】 同型矩阵 $A$，$B$ 等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

**5. 通过初等变换求逆矩阵**

$$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1}).$$

【注】 ① $(A\,\vdots\,B)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1}B)$；

② $\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}E\\ \cdots\\ A^{-1}\end{pmatrix}$.

## 六、重要公式与结论

**1. 三种运算：取转置、取逆、取伴随**

(1) $(A^{\mathrm T})^{\mathrm T}=A$，$(AB)^{\mathrm T}=B^{\mathrm T}A^{\mathrm T}$，$(kA)^{\mathrm T}=kA^{\mathrm T}$，$(A\pm B)^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}\pm B^{\mathrm T}$；

(2) $(A^{-1})^{-1}=A$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，$(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$；

(3) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，$(AB)^*=B^*A^*$，$(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(A\pm B)^*\neq A^*\pm B^*$；

(4) $(A^{\mathrm T})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm T}$，$(A^{\mathrm T})^*=(A^*)^{\mathrm T}$，$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

**2. $n$ 阶方阵 $A$ 可逆$\Leftrightarrow|A|\neq0\Leftrightarrow r(A)=n$.**

**3. 有关 $A^*$的结论($A$ 为 $n$ 阶方阵)**

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$；

(2) 若 $A$ 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$；

(3) $|A^*|=|A|^{n-1}$，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，$(kA^*)=k^{n-1}A^*$；

(4) $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$

**4. 有关方阵行列式的重要公式与结论**

(1) 设 $A$，$B$ 为 $n$ 阶方阵，则$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$；

【注】 ① 一般 $AB\neq BA$，但$|AB|=|BA|$；

② 若 $A$，$B$ 非方阵，则 $|AB|\neq|BA|$.

(2) $AA^*=A^*A=|A|E$；

(3) $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，$|A^*|=|A|^{n-1}$.

**5. 有关矩阵秩的重要公式和结论**

(1) $r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)$；

(2) 若 $A\neq O$，则 $r(A)\geqslant 1$；

(3) $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$；

(4) $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$；

(5) 若 $A$ 可逆，则 $r(AB)=r(B)$；若 $B$ 可逆，则 $r(AB)=r(A)$；

(6) 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，若 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\leqslant s$.

# §1.2 典型题型讲解与训练

## 一、矩阵的运算

(1) 有关矩阵运算的命题；

(2) 矩阵幂的计算.

### 题型 1 有关矩阵运算的命题

**思路点拨：** 利用定义和相关的运算律.

**【例 1.2】** 填空题

(1) 设 $A=\dfrac{1}{2}(B+E)$，则当且仅当 $B^2=$________时，$A^2=A$.

(2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$的充要条件是________.

**【解】** (1) $A^2=A\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{2}(B+E)\right]^2=\dfrac{1}{2}(B+E)\Leftrightarrow B^2=E$，故应填 $E$.

(2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)\Leftrightarrow O=AB-BA\Leftrightarrow AB=BA$，故应填 $AB=BA$.

**【例 1.3】** 单项选择题

(1) 设 $A$，$B$ 为 $n$ 阶对称矩阵，则下面四个结论中不正确的是(　　).

(A) $A+B$ 也是对称矩阵　　(B) $AB$ 也是对称矩阵

(C) $A^m+B^m$($m$ 为正整数)也是对称矩阵　　(D) $BA^{\mathrm{T}}+AB^{\mathrm{T}}$ 也是对称矩阵

(2) 设 $A$，$B$，$C$ 为 $n$ 阶方阵，若 $AB=BA$，$AC=CA$，则 $ABC=$(　　).

(A) $ACB$　　(B) $CBA$　　(C) $BCA$　　(D) $CAB$

**【解】** (1) 利用枚举法，逐项计算转置看是否为对称矩阵即可. 因为

$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA$，但一般 $BA\neq AB$，故(B)为正确答案.

(2) $ABC=(BA)C=B(AC)=BCA$，故(C)为正确答案.

★ 活学活用

1.1 单项选择题

(1) 设 $A$，$B$ 都是 $n$ 阶方阵，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 的充要条件是(　　).

(A) $A=E$　(B) $B=O$　(C) $AB=BA$　(D) $A=B$

(2) 设 $A$，$B$，$C$ 均为 $n$ 阶方阵，且 $AB=BC=CA=E$，则 $A^2+B^2+C^2=$(　　).

(A) $3E$　(B) $2E$　(C) $E$　(D) $O$

1.2 设 $A$ 是对称矩阵，$B$ 是反称矩阵，证明：$AB$ 是反称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

★ 参考答案

1.1 (1) C. (2) A.

1.2 提示：利用反称矩阵的定义证明.

## 题型 2　矩阵幂的计算

**思路点拨：** 若求 $A^n$，则一般利用以下方法：

(1) 求出 $A^2,A^3,\cdots$,找出规律，用数学归纳法证；

(2) 若 $r(A)=1$，则 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,\ \cdots,\ b_n)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，

$$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\mu,$$

从而 $A^k=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha\beta^{\mathrm{T}}\cdots\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=\mu^{k-1}A$.

(3) 若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，从而 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

**【例 1.4】** 已知矩阵 $A=PQ$，其中 $P=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$Q=(2,-1,2)$，求矩阵 $A$，$A^2$，$A^{100}$.

【分析】 计算方阵的高次幂是一种常见的题型，除用数学归纳法外，还应注意结合方阵本身的特征进行讨论. 本题的关键是注意 $\boldsymbol{PQ}$ 为矩阵，而 $\boldsymbol{QP}$ 为数，利用矩阵乘法的结合律 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{Q}=2\boldsymbol{PQ}$ 达到简化的目的.

【解】 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(2,-1,2)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{QP}=(2,-1,2)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{PQ})(\boldsymbol{PQ})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{Q}=2\boldsymbol{PQ}=2\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{A}^{k-1}=2^{k-2}\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=2^{k-2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=2^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

根据数学归纳法，有 $\boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}$，于是

$$\boldsymbol{A}^{100}=2^{99}A=2^{99}\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}.$$

【例 1.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】 **方法一**：用数学归纳法. 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**方法二**：利用对角矩阵和主对角线为零的上三角形矩阵幂的特点进行计算. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

其中 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}B^2+\cdots+nEB^{n-1}+B^n,$$

因为

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $B^k=O(k\geqslant2)$. 从而

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B=E+nB=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

【例 1.6】 已知 $AP=PB$，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix},$$

求 $A$ 及 $A^5$.

【分析】 观察此题，$B$ 是对角矩阵，$B^k$ 可以很方便地求出来.

【解】 先求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$，因为 $AP=PB$，所以

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}A^5&=(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})\\&=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

★ 活学活用

2.1 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{pmatrix}$，求 $A^n$.

2.2 计算下列各题：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n$.

★ 参考答案

2.1 $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$.

2.2 (1) 当 $n$ 为偶数时，$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \boldsymbol{E}$；

当 $n$ 为奇数时，$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## 二、行列式

(1) 求排列的逆序数；
(2) $n$ 阶行列式的定义；
(3) 低阶行列式的计算；
(4) $n$ 阶行列式的计算；
(5) 方阵的行列式的计算.

### 题型 3 求排列的逆序数

**思路点拨：** 任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可如下计算：

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后边比 $i_1$ 小的数的个数 $+ i_2$ 后边比 $i_2$ 小的数的个数 $+ \cdots +$ $i_{n-1}$ 后边比 $i_{n-1}$ 小的数的个数.

**【例 1.7】** 求下列排列的逆序数，并确定其奇偶性.

(1) 53214； (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

**【解】** (1) 因为 $\tau(53214) = 4+2+1+0 = 7$，所以 53214 为奇排列；

(2) 该排列中前 $n$ 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 之间不构成逆序，后 $n$ 个数 $2,4,$