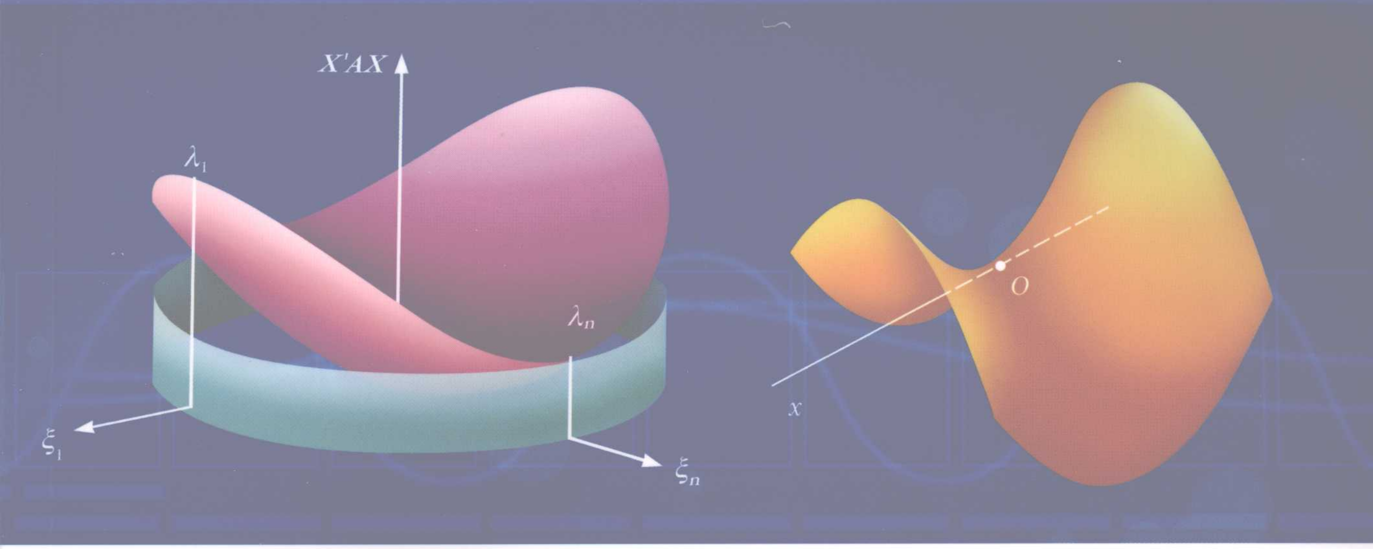

21世纪高职高专数学系列规划教材

高等数学

张锦麟　时晓文　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高职高专数学系列规划教材

高等数学

主　编　张锦麟　时晓文
副主编(按姓氏笔画为序)
王　娟　刘永香　孙健美
高丽新　谢向玲　宫　健

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本书针对高职高专教学需要编写，编写时注意贯彻如下思想：①以应用为目的，必需够用为度；②重视数学建模思想的应用，强化了将实际问题转化为数学问题的过程；③加强数学思想的培养。

全书分上下两篇。上篇内容包括：函数、极限、连续、导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分。上篇是各专业必修部分。下篇内容包括：多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数等内容。

本书适合高职高专各专业教学使用，也可作为成人高校数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张锦麟，时晓文主编. —北京：中国铁道出版社，2007.6
高等职业教育教材
ISBN 978-7-113-07958-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张…②时… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第099363号

书　　名：高等数学
作　　者：张锦麟　时晓文
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街8号)
策划编辑：严晓舟　王　彬
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：路　瑶
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787×1092　**印张**：17.75　**字数**：492千
版　　本：2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷
印　　数：1～8000册
书　　号：ISBN 978-7-113-07958-1/O・162
定　　价：29.00元

编 委 会

序

马少军

高等数学课程一直是高等院校最重要的公共基础，除了作为学习大多数专业课程所必要的知识基础，它在大学素质教育中的重要性也越来越显示出来，因此，几乎高校所有的专业(包括文科)均开设这门课程.

我国高校高等数学课程的课程体系和教学内容由于历史原因受原苏联影响较大，原苏联数学教育有其优点：体系完整，逻辑性强，论述严密；但也有缺点：过于抽象，描述枯燥，缺乏生动实例.

我国高等数学课程在20世纪90年代以前改革不大，教材内容和教学方法变化甚微.其后，数学教育界开始重视谨言慎行课程建设与改革，尤其在教育部启动面向21世纪教学改革项目等一系列举措以来，高等数学课程改革已经广泛开展并且取得了一系列的成绩.

本教材淡化了传统教材中抽象、枯燥的叙述，改为用生动实例引进，用通俗语言描述；淡化了烦琐的定理证明，强化了应用环节，是一本通俗易懂的教材.本教材适合于高职高专各专业(包括文科).学习本课程，能够培养学生的科学素养，使学生养成良好的思维习惯，提高学生整体素质，使学生获得有关连续变量的数学基本概念、基本理论和基本运算方法；能够使学生对数学的抽象性、逻辑性与严密性有一定的了解并受到一定的训练，对他们理解逻辑关系、领会抽象事物、认识数形规律等能力形成有一定的帮助；同时也能够掌握后续课程中所必需的数学知识和技能.

编写说明

为了适应高职高专教育的需要，培养和造就更多的实用型和技能型人才，根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学的基本要求》，我们在认真总结高职高专数学教学改革的基础上，结合对国际国内同类教材发展趋势的分析编写了本书.

本教材力求贯彻“以应用为目的，必需、够用为度”的原则，力求体现基础性、实用性和发展性三个方面的和谐统一. 具体反映在：第一，尊重科学，但不恪守学科性，注重教材自身系统性、逻辑性. 对难度较大的基础理论部分，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生分析问题、解决问题能力的培养. 第二，重视理论联系实际，加强与实际应用联系较多的基础知识的讲解. 第三，着重加强数学思想的培养，即学习怎样用数学思想去解决客观世界的实际问题.

本教材着重强化了微积分的教学，在教材内容的取舍上注意了“文理兼容”，充分体现了高等数学在职业教育教学中为专业教学服务这一根本宗旨. 教学内容与教学体系实施了模块化编写，涉及到了微积分学、线性代数等知识，在教学中可根据专业教学的实际需要进行选择. 同时也兼顾了各专业专升本教学的需要.

本教材在编写时注意了数学建模思想的应用，强化了将实际问题转化成数学问题的过程. 这也是高职高专数学基础课教学中的一个创新，其中许多章节都引用了不少实际问题，注意到了理论联系实际.

本书是高职高专理工类、经济类专业的通用教材，分为上下两篇. 上篇是各类专业教学的必修部分，下篇可根据专业教学的需要及专升本的需要选择教学内容. 本书也可作为成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院各专业高等数学教材.

本教材是青岛求实学院数学教研室在几年的教学探索中集体智慧的结晶，由张锦麟、时晓文担任主编. 其中第一、七章由张锦麟编写；第四、八章由时晓文编写；第二章由谢向玲编写；第三章由刘永香编写；第五章由孙健美编写；第六章由高丽新编写；第九章由王娟编写. 在编写过程中，编者得到了院领导的热诚支持、关心和指导；在审阅过程中，编者得到青岛农业大学马少军教授的指导，并为之作序. 在此向他们表示衷心的感谢. 本书在编写过程中，参考了一些国内普通高等学校高等数学优秀教材和高职高专国家规划教材，从这些教材中编者得到了有益的启发，并选用了其中一些习题. 在此谨向有关作

者表示感谢.

尽管为本教材的编写，我们已付出了很大的努力，但一本适用的教材，不仅需要学术水平和教学经验，还需要多年的磨砺. 编者衷心欢迎各位专家和读者指出本书的错误和缺点，以便今后再版时改进和改正.

高等职业教育教材《高等数学》编写组

2007 年 5 月

目　录

上　篇

下　篇

上　　篇

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

——普洛克拉斯[①](Proclus，410—485)

第一章 函数、极限和连续

函数是最重要的数学概念之一，也是高等数学这门课程研究的主要对象.

§1-1 函数

一、函数的概念

人们在观察、研究某一现象或某一运动过程中，经常会遇到各种不同的量，如时间、速度、温度、成本和利润等. 这些量的变化不是孤立的，而是相互存在着某种对应关系.

我们分析几个例子.

例 1 在自由落体过程中，物体垂直下落的距离与时间的关系为：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \,(g = 9.8\ \mathrm{m/s})$$

当 $t = 0\ \mathrm{s}$ 时，$s = 0\ \mathrm{m}$；当 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时，$s = 4.9\ \mathrm{m}$.

例 2 在货轮的船头下部漆着一列数字，这些数字指明吃水的深度. 下表给出了某货轮在不同吃水深度时的排水量.

吃水深度 h/m	3	4	5	6	7	8	9
排水量 W/t	5 020	7 225	9 275	11 475	13 750	16 125	18 525

上表反映了变量 W 与变量 h 的对应关系，对于表中每一个给出的吃水深度 h，都有一个确定的排水量 W 与之对应.

例 3 气象站用自动温度记录仪记录了某地某一天气温 T(℃) 随时间 t(h) 的变化曲线，如图 1-1 所示. 时间 t 的变化范围是 $0 \leqslant t \leqslant 24$，对于这个范围内的每一时刻 t，都可以在图形上查到对应的温度 T 的值.

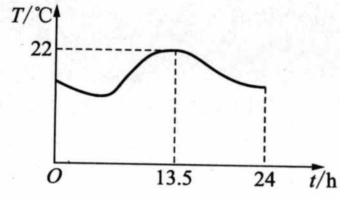

图 1-1

① 普洛克拉斯，古希腊柏拉图派的领头人物，哲学家和大评论家，喜欢数学，并爱写诗.

概括以上例子，我们看到，尽管这些问题的具体意义不一样，但从数量关系的角度来看，两个变量在变化过程中存在着某种对应关系，当一个变量取定某值时，另一变量就有确定的值与之对应. 对于一个自变量的函数（即一元函数），我们给出下述定义：

定义 1 设 D 是非空实数集，若按照某种确定的法则（或关系）f，对于每个实数 $x \in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**. 并且将与 x 对应的 y 记作

$$y = f(x),$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，$f(x)$ 是当自变量为 x 时这个函数的**函数值**①.

定义 2 自变量 x 的取值范围 D 称为函数 f 的**定义域**，函数的定义域用 $D(f)$ 表示. 当自变量 x 在定义域 $D(f)$ 上任意变动时，函数值 $y = f(x)$ 的变化范围称为函数 f 的**值域**，f 的值域记作 $R(f)$.

由定义可知，函数完全**由对应法则和定义域所确定**. 在描述任何一个函数时，必须同时说明这两个要素.

例 4 如果 $x_0(x_0 \in D)$ 是一个确定的点，则 $f(x_0)$ 表示当自变量 x 等于 x_0 时的函数值，即 $y = f(x_0)$. 也可用 $y|_{x=x_0}$ 表示，即 $y|_{x=x_0} = f(x_0)$.

例 5 指数函数 $y = a^x(x \in (-\infty, +\infty))$，$a > 0$ 且 $a \neq 1$，这里 $y = a^x$ 表示了自变量与因变量的对应法则，即 $f(x) = a^x$. 这个函数的定义域是 $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

例 6 对数函数 $y = \log_a x(x > 0)$. 这里 $y = \log_a x$ 表示对应法则，$x > 0$ 表示这个函数的定义域是 $(0, +\infty)$. 为什么对数函数的定义域是 $(0, +\infty)$？因为只有当 $x > 0$ 时，对数运算才有意义.

至于自变量和因变量本身的具体意义，以及用什么记号来表示，那是无关紧要的.

例 7 $f(x) = x^2$ 和 $g(t) = t^2$ 是同一个函数.

如果同时考察几个不同的函数，就需用不同的记号以示区别. 常用的函数记号除 $f(x)$ 外，还有 $\varphi(x)$，$\phi(x)$，$y(x)$，$F(x)$，$G(x)$，等等.

在数学上作一般性讨论时，函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围. 但在实际问题中，函数的定义域由所考虑的问题的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，垂直下落的距离 s 是时间 t 的函数，这个函数的定义域 D 是 $(0, +\infty)$.

定义 3 在平面直角坐标系 xOy 中，凡坐标满足方程 $y - f(x) = 0$，$x \in D$ 的点 (x, y) 的集合：

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**，也称为**图像**，如图 1-2 所示.

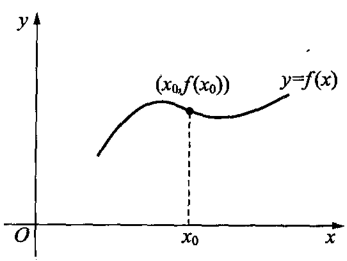

图 1-2

例 8 研究 $y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数.

解 $y = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$y = \dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

由于它们的定义域不相同，因而不是同一函数.

---

① 出于叙述的方便，有时也将 $f(x)$ 说成是函数. 在一个问题中，$f(x)$ 是指一个函数，还是一个函数值，需结合上下文理解.

例 9 研究 $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否为同一函数.

解 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$,所以,

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,

有 $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$;

当 $(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,

有 $\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$.

因此,只有当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,两个函数才相等.也就是说,虽然它们的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$,但由于它们的对应法则不相同,因而不是同一函数.

函数的表示方法一般有三种:解析法(公式法)、表格法和图形法.例 2 和例 3 中的函数分别是用表格法和图形法给出的,而例 1 中的函数是用解析式给出的.用解析式表示的函数是通过指明运算的数学式(解析式)把因变量和自变量之间的对应关系表示出来的,依照数学式,由自变量的值可以求出对应的因变量的值.其优点是精确、完整,便于理论上作分析研究.

练习

1. 用区间或集合的形式来表示下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\lg\frac{x}{x-1}$.

2. 设 $f(x)=2x^3-x+3$,求 $f(0),f(-1),f\left(\frac{1}{2}\right),\frac{1}{f(2)},f(a)+1,f(a+1)$.

下面我们举几个例子认识分段函数.

例 10 函数 $y=|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x\geqslant 0\\ -x & \text{当 } x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-3 所示.这个函数称为**绝对值函数**.

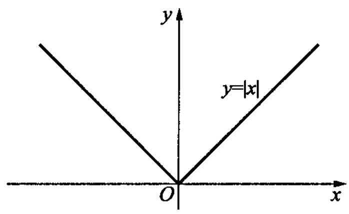

图 1-3

例 11 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=\{1,0,-1\}$,它的图形如图 1-4 所示.

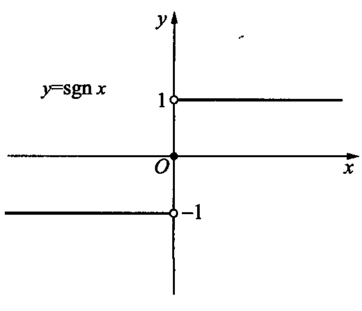

图 1-4

例 12 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作 $[x]$.例如,$\left[\frac{1}{2}\right]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$[-1.1]=-2$,$[-3.6]=-4$.把 x 看作变量,则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R=\mathbf{Z}$.它的图形如图 1-5 所示,是阶梯曲线.在 x 取整数时,图形发生跳跃,这个

函数称为**取整函数**.

在以上三个例题中,我们看到,有时一个函数要用几个数学式表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同数学式表示的函数,称为**分段函数**.

例 13　$f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{当 } x<1\\ x^2 & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 4\\ \lg x & \text{当 } x>4\end{cases}$,求 $f(-3)$,$f(0)$,$f(1)$,$f(5)$.

解　函数 $f(x)$ 是一个分段函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

当 $x<1$ 时,对应的函数值为 $f(x)=x-2$.因为 $x=-3\in(-\infty,1)$,所以 $f(-3)=-3-2=-5$;$x=0\in(-\infty,1)$,所以 $f(0)=0-2=-2$.

同理,$f(1)=1$,$f(5)=\lg 5$.

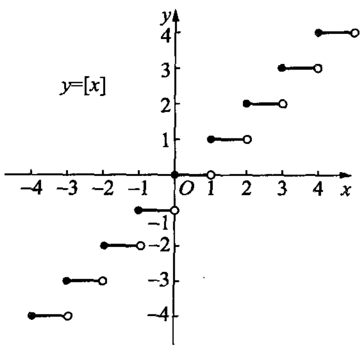

图 1-5

二、函数的几种特性

(一) 函数的单调性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$;则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**;

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**;

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例 14　函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加;函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调减少,在区间 $(-\pi,0)$ 上单调增加.

例 15　当 $\mu>0$ 时,幂函数 $y=x^\mu$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $\mu<0$ 时,$y=x^\mu$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 单调减少.

例 16　证明 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证　在 $(0,+\infty)$ 上任意取两点 x_1,x_2,并设 $x_1<x_2$.则有

$$f(x_2)-f(x_1)={x_2}^2-{x_1}^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

因为 $x_1>0$,$x_2>0$,$x_1<x_2$,所以 $(x_2-x_1)>0$,$(x_2+x_1)>0$.因而

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$$

于是 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加得证.

关于函数的单调性,用单调性的定义去检验函数是否单调增加或者单调减少一般比较困难.今后我们将在第三章中详细介绍如何用函数的导数去判定某个函数在某个区间上的单调性.

(二) 函数的奇偶性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意的 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任意的 $x \in D$,都有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例 17 $f(x)=x^2$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,$y=\cos x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(如果点 (x,y) 在函数的图形上,那么,点 $(-x,y)$ 也在函数的图形上,如图 1-6 所示).

例 18 $f(x)=x^3$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数,$y=\sin x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点是对称的(如果点 (x,y) 在函数的图形上,那么,点 $(-x,-y)$ 也在函数的图形上,如图 1-7 所示).

例 19 判定 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数;又因为 $g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-g(x)$,所以 $g(x)$ 是奇函数.

偶函数和奇函数仅仅是一种特殊类型的函数.

每一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和. 例如,令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

容易验证,$f_1(x)$ 是偶函数,$f_2(x)$ 是奇函数,并且 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

(三) 函数的有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对于所有的 $x \in D$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数在 D 上**有界**,或者称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**.

例 20 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数;

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数. 如图 1-8 所示,当点 x 从原点的右侧无限趋于零时,函数趋向于无穷大.

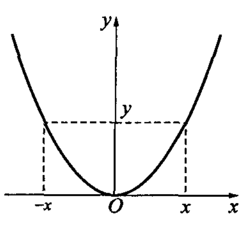

图 1-6

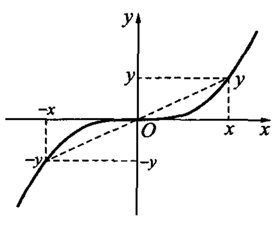

图 1-7

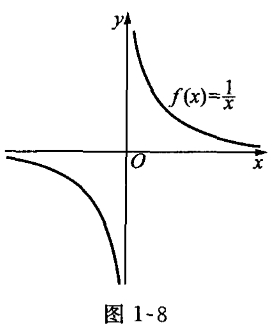

图 1-8

(四) 函数的周期性

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 T,使得对于任意的 $x \in D$ 有 $x+T$

$\in D$，且总有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期是指最小正周期(如果存在).

例 21 $y=\sin x$ 的周期是 2π；$y=\tan x$ 的周期是 π；$f(x)=c$ 是以任意正数为周期的函数，但不存在最小正周期.

三、反函数

在自由落体过程中，物体垂直下落的距离 s 表示为时间的函数：$s=\frac{1}{2}gt^2$. 在时间的变化范围中任意确定一个时刻 t，由上式可以得到相应的距离 s. 如果将问题反过来，即已知下落的距离 s，求时间 t，则有 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$. 在这里，原来的因变量 s 变成了自变量，原来的自变量 t 变成了因变量. 这样交换自变量和因变量的位置而得到的新函数，称为原有函数的反函数.

定义 8 设函数 $f(x)$，它的定义域为 D，值域为 R. 如果能由这个函数将 x 解出为 y 的函数 $x=\varphi(y)$，即每取定 y 的一个值，都能够唯一确定 x 的一个值，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**. $f(x)$ 的反函数用 $f^{-1}(x)$ 表示，记作：

$$x=f^{-1}(y).$$

这个函数的定义域为 R，值域为 D.

下面讨论什么样的函数有反函数. 我们来考察函数 $y=\sin x$，在这个函数中，角度 x(弧度) 是自变量，正弦 y 是因变量. 能否将角度 x 表示成正弦 y 的函数，即能否由角度 x 的正弦 y 确定角度 x？

假设某个角度 x 的正弦 $y=\sin x=0$，则可以得到 $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$，即有许多不同的角度 x 满足 $\sin x=0$. 这样一来，我们无法根据 y 的值唯一确定 x. 也就是说，如果不对 x 的取值范围加以限制，$y=\sin x$ 的反函数是不存在的.

如果将 x 的取值范围限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，由于 $y=\sin x$ 在这个区间是单调增加的，所以，自变量 x 和函数值是一一对应的，并且 y 的取值范围是 $[-1,1]$. 于是，如果在 $[-1,1]$ 中任意给定一个 y，则只有一个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 满足 $y=\sin x$. 也就是说，由 y 可以唯一确定 x. 这样，$y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 上就存在反函数，这个反函数称为反正弦函数 $x=\arcsin y$ $(-1\leqslant y\leqslant 1)$.

反函数存在条件：一般情况下，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调，并且它的值域是区间 J，则这个函数存在反函数 $x=f^{-1}(y)$.

在上例中，函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性对于反函数 $x=\arcsin y$ 的存在性起了关键作用.

在初等数学教科书中，习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数记作：$y=f^{-1}(x)$. 反正弦函数 $x=\arcsin y$ 记作：

$$y=\arcsin x,$$

定义域是$[-1,1]$.

例 22 $y=x^{\mu}$ 的反函数是 $y=x^{\frac{1}{\mu}}(x>0)$；$y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1,-\infty<x<+\infty)$ 的反函数是 $y=\log_{a}^{x}(0<x<+\infty)$.

如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么两者的图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1-9 所示.

例 23 由图 1-10 和图 1-11 可以看出，函数 $y=x^{2}(x>0)$ 和它的反函数 $y=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的；函数 $y=x^{3}(-\infty<x<+\infty)$ 和它的反函数 $y=x^{\frac{1}{3}}(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

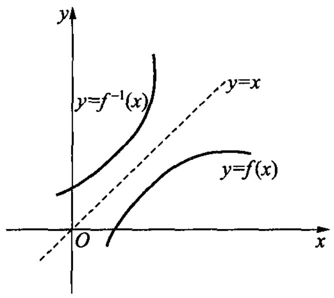

图 1-9

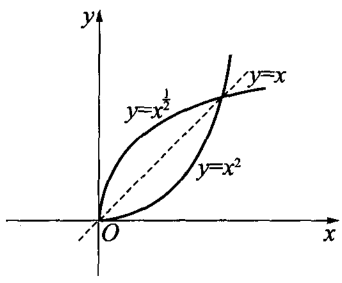

图 1-10

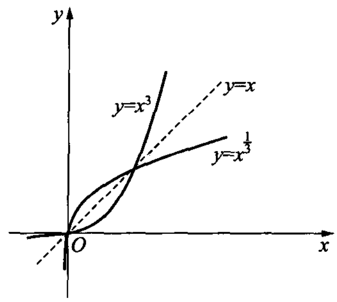

图 1-11

例 24 求函数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 的反函数(不用求出反函数的定义域).

解 由上式解出 x，得 $y(x-3)=2x-5$，则

$$x=\frac{3y-5}{y-2},$$

将 x 与 y 互换得反函数为$y=\dfrac{3x-5}{x-2}$.

练习

1. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数？

(1) $x+\sin x$； (2) $x\cos x$； (3) $\dfrac{|x|}{x}$； (4) $\sin x^{2}$； (5) $\dfrac{\sin x}{x}$； (6) $\dfrac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$.

2. 判断下列函数在指定区间的单调性：

(1) $y=x^{2},(-1,0)$； (2) $y=\sin x,\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$； (3) $y=\ln x,(0,+\infty)$.

3. 求下列函数的反函数(不用求出反函数的定义域)：

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$； (2) $y=x^{2}(x\geqslant 0)$； (3) $y=1+\lg(x+2)$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$.

四、基本初等函数及其图形

函数是各种各样的，有简单的，也有复杂的. 根据人们长期的科学活动与社会实践总结