21 世纪高等院校教材

线性代数

贾　鹂　王爱茹 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21

线性代数

21世纪高等院校教材

线性代数

贾　鹂　王爱茹　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以“应用”为指导思想，系统地介绍关于行列式、矩阵、向量组与线性方程组、矩阵特征值问题、二次型、线性空间等基本问题、基本概念、基本结构、基本思想方法和它们之间的相互关系. 每章配有例题与习题，习题附有解答或提示，例题习题中加强应用基本概念、结论方面的比例.

本书可作为高等院校非数学专业理科类、工科类、文管类、农林类各专业本、专科生学习“线性代数”课程的教材或参考书，也可作为报考非数学专业研究生的读者的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/贾鹂，王爱茹主编. —北京：科学出版社. 2007
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-019626-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①贾…②王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125578 号

责任编辑：姚莉丽　杨　然 / 责任校对：赵燕珍
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 8 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷　印张：11 1/2
印数：1—3 500　字数：213 000

定价：18.00 元

《线性代数》编委会

主　编　贾　鹏　王爱茹

副主编　董　磊　刘淑俊　汪　雷

参　编　李　滢　李雪非　周　静　左吉峰

朱　莹　范彦方　刘瑞英　李红智

前　　言

大部分线性代数教材的内容主要是介绍行列式、矩阵、线性方程组、矩阵特征值问题、二次型、线性空间等基本概念和相关基本问题. 这些基本概念在数学理论中起着基本工具的作用,它们用于方便地叙述问题和解决问题,特别是对那些涉及因素众多的复杂问题,作用就更为明显. 因此,线性代数是高等学校普遍开设的大学数学基础课程之一.

随着计算机技术的发展,特别是数学软件的广泛应用和各领域科学的研究发展,数学的作用也显得越来越必不可少. 这也体现在非数学专业研究生众多数学课程的设置上,同时也说明对非数学专业学生的数学要求也越来越多,越来越高,要求他们熟悉、掌握数学知识的基本概念,正确熟练使用数学基本工具.

数学知识的高度抽象概括性使得学习者学习时会感到较难以理解、接受和掌握. 本书以"提出问题、解决问题"的思维方式作指导,从大学生熟悉的、在中学学过但没有系统解决的线性方程组求解问题出发,介绍从特殊线性方程组到一般线性方程组的求解方法,引出行列式、矩阵、向量相关性、线性空间等基本概念及其性质,明确强调它们在求解线性方程组中的作用(显然,这些概念的作用不止于此),从这一角度体现"应用"的编写指导思想,以期帮助学生清楚把握这门课程的知识结构,认识课程各部分知识之间的相互关系和各自的应用,从而达到提高学生学习兴趣的目的. 在本书的最后两章的内容安排上,在介绍新问题、新概念的同时,突出了对行列式、矩阵、向量组应用的考虑.

以数学教学需要为依据,本书编写的目的是使学习者掌握线性代数基本概念、基本思想、基本问题及其解决方法,因此书中只对使用在解决基本问题中用到的方法进行证明的定理、性质给出了证明,在例题习题的安排上,注意选择应用基本概念、结论和方法较多的题目.

结合编者的教学经验,考虑使教材与大学教学过程相适应,本书在内容的设计安排上作了一些尝试,如考虑适当安排书中的一节内容能在两学时内讲授完等.

本书是在考虑我校各专业研究的实际需要、借鉴我校前辈教师编写的教材和总结我校数学教师多年教学经验的基础上编写的. 感谢河北农业大学教务处、理学院和数学系的支持和帮助. 对科学出版社有关同志的大力支持和工作,我们表示诚挚的谢意.

限于编者水平,书中不妥之处在所难免,敬请读者、同仁批评指教.

编　者

2006 年 12 月

目　　录

第 1 章 行列式与线性方程组

线性方程组理论是数学中非常重要的基础知识.

利用方程组解决问题是人们用数学知识解决问题时经常要用到的一种方法.用这种方法解决问题时主要有两件事情要做:根据给定的条件列出方程组;研究方程组解的情况.本章从最简单的一类方程组——线性方程组的解的情况开始讨论.

本章主要介绍行列式的概念、性质和计算方法,并介绍利用行列式求解特殊类型方程组的理论和方法——克拉默法则.

1.1 二、三元线性方程组与二、三阶行列式

人们称如下一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的关系式为含有 m 个方程、n 个未知数的线性方程组,也称 n 元线性方程组.其中 a_{ij}、$b_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是可由已知条件确定的常数,$x_i(i=1,2,\cdots,n)$为未知数.

在中学学习中,方程组的求解方法主要是消元法,求解的多是方程个数与未知数个数相等($m=n$)而且未知数个数较少的特殊线性方程组.

例如解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ x_1-x_2=3, \end{cases}$很容易利用消元法解得 $x_1=4,x_2=1$.

但线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 3x_1+6x_2=3 \end{cases}$经消元后化为$\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 0=-12, \end{cases}$知此线性方程组无解.

线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 3x_1+6x_2=15 \end{cases}$经消元后化为$\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 0=0, \end{cases}$知此线性方程组有无穷多个解.

那么,任意给定一个线性方程组,它一定有解吗?如何判断它是否有解?只有消元到一定程度后,才知道它是否有解吗?又如果它有解,它有多少个解?一个、多个,还是无穷多个解?如果有无穷多个解,如何把它们表示出来?这些都是我们

在本书中要解决的问题.

人们在求解的过程中，总结发现了这些问题的内在规律.

下面我们从求解方程个数与未知数个数相等的特殊线性方程组的求解过程开始，学习有关线性方程组的一般理论.

1.1.1　二阶行列式与二元线性方程组

先看最简单的线性方程组——二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，利用消元法：第一个方程乘以 a_{22} 减去第二个方程乘以 a_{12}，可解得 x_1，再将 x_1 带入第一个方程或第二个方程，可解得 x_2. 方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

在上面的计算结果中有什么样的规律呢?

一般地，人们给出二阶行列式值的定义，并画出实线和虚线帮助记忆

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

其中横排称为行，竖排称为列，则 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 四个数分两行、两列排列，a_{ij} 为行列式中第 i 行、第 j 列位置上的数. 注意行列式中行数、列数相等. 因有两行、两列，故称为二阶行列式. 其中 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 为这个二阶行列式的元素(元)；i 是行列式的行标，表示元素在行列式的第 i 行；j 是行列式的列标，表示元素在行列式的第 j 列.

有了上述定义，我们可以计算任意二阶行列式的值.

例 1.1.1　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 1\times(-7)-2\times4=-15.$$

若称由二元线性方程组未知数的系数组成的行列式为方程组的系数行列式 D，则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

并记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组的解可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.2}$$

1.1.2 三阶行列式与三元线性方程组

再看三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

利用二阶行列式，用 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，$-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}$ 分别乘以第一、第二、第三个方程，然后再相加，可以得到

$$\left[a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\right]x_1$$

$$=b_1\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}.$$

一般地，人们总结定义三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

注意其中 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 是在三阶行列式中划去 a_{11} 所在的行和列后剩余的元保持原来的次序所构成的二阶行列式，称为元 a_{11} 的**余子式**，记为 M_{11}. 类似地，a_{21}，a_{31} 的余子式分别为

$$M_{21}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{31}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix},$$

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$，$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}$ 分别称为 a_{11}，a_{21}，a_{31} 的代数余子式.

有了代数余子式及二阶行列式的概念，三阶行列式的值可以表述为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\sum_{i=1}^{3}a_{i1}A_{i1}, \tag{1.4}$$

即三阶行列式的值等于第一列的每个元与其代数余子式乘积的和. 于是，三阶行列式的值就完全确定了.

对于三元线性方程组，系数行列式的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

并且记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

则有 $Dx_1=D_1$. 类似地，记

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则有 $Dx_2=D_2$，$Dx_3=D_3$. 于是，当 $D\neq 0$ 时，方程组有解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.5}$$

上述的二、三元方程组的求解公式在计算上是复杂的，但在形式上却有着明显的规律性，容易记忆. 求解公式的分母都是系数行列式 D，它由方程组中未知数的系数组成，且保持它们在方程组中的位置不变；而分子则是将系数行列式 D 中对应未知数的列替换为方程组右端同一行的常数而得到的行列式，即 D_1，D_2，D_3 是用常数项 b_1，b_2，b_3 分别换去行列式 D 的第一、二、三列元所得到的行列式.

例 1.1.2　用(1.5)式求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=1, \\ x_1-3x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

解　$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 7-2\times 4+1\times(-1)=-2,$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组可用(1.5)式求解. 由

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0$$

及(1.5)式得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=0.$$

注意,例 1.1.2 中,三阶行列式是按(1.4)式计算的,由二、三阶行列式的定义,展开后为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.6}$$

为方便记忆,三阶行列式也可利用图 1.1 展开.

图 1.1 中三条实线,每条实线连接的三个数的乘积前面取正号,三条虚线,每条虚线连接的三个数的乘积前面取负号. 这种计算三阶行列式的方法称为**对角线法则**.

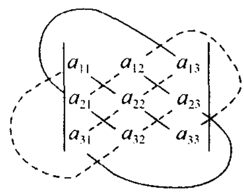

图 1.1

例 1.1.3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则,得

$$\begin{aligned} D&=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 \\ &\quad-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &=30+2-24-12+20-6=10. \end{aligned}$$

现在的问题是,上面求解方程组的方法是否可以推广到未知数更多的方程组的情形? 回答是肯定的. 这要借助于 n 阶行列式的概念.

请注意,计算四阶及四阶以上的行列式一般没有类似的对角线法则.

习 题 1.1

1. 计算行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 9 & 16 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$；　　(8) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式求线性方程组的解：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ 3x_1-x_2=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x_1+4x_2=3, \\ 3x_1-7x_2=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=1, \\ 4x_1+9x_2+x_3=15. \end{cases}$

3. 求二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$，使 $f(1)=4, f(2)=9, f(-1)=0$.

1.2　行列式及其性质

为方便地讨论含有 n 个方程、n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的解的情况，引入一般 n 阶行列式的概念.

1.2.1　行列式的定义

一般地，如果定义了 $n-1$ 阶行列式的值，那么在

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列，剩余元按照原来的顺序所构成的 $n-1$阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}. $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**，相应地 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元**（**对角元**），另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

用递推的方法，可以得到 n 阶行列式值的定义：n **阶行列式**(determinant)的值等于**第一列的每个元与其代数余子式乘积的和**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}, \quad (1.7)$$

又称上式为 n 阶行列式按第一列的展开式. 它给出了计算 n 阶行列式的值的方法. 对于只有一个数的行列式, 它的值人们规定为这个数本身. 易见, 二、三阶行列式的定义也是与上述 n 阶行列式的一般定义相符的.

例 1.2.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按定义, 有

$$D=4A_{11}+1A_{21}+0A_{31}+0A_{41}=4\times(-1)^{1+1}M_{11}+1\times(-1)^{2+1}M_{21}$$

$$=4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2.$$

上面按第一列的展开式定义了 n 阶行列式的值, 可以想见, 在行列式的阶数较高时, 按定义计算行列式的值很不方便. 为简化行列式的计算, 我们有必要讨论行列式的性质.

1.2.2 行列式的性质

以行列式的定义为基础, 可以证明行列式按第一行展开有相同的结果.

定理 1.2.1 n 阶行列式的值等于它的第一行每个元与其相应的代数余子式乘积的和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

(证明从略)

如果将行列式 D 的行列互换, 得到新的行列式, 称为行列式 D 的**转置行列式**, 记为 D^{T} 或者 D', 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.1　行列式转置后，其值不变. 即

$$D^{\mathrm{T}} = D.$$

（证明从略）

由性质 1.2.1 可知，行列式的"行"所具有的性质，对列也一定成立；反之，对列成立的性质，对行也一定成立. 因此，在下面的行列式性质中我们只对行证明就够了.

性质 1.2.2　互换行列式的两行(列)，行列式的值只改变符号.

例如，交换四阶行列式的第一、三行，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

由 $\begin{vmatrix} a & a & a_{13} & a_{14} \\ b & b & a_{23} & a_{24} \\ c & c & a_{33} & a_{34} \\ d & d & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a & a_{13} & a_{14} \\ b & b & a_{23} & a_{24} \\ c & c & a_{33} & a_{34} \\ d & d & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，即 $D=-D$，可知 $D=0$.

推论 1.2.1　行列式有两行(列)的对应元完全相同，则这个行列式的值为零.

性质 1.2.3　行列式中某一行(列)所有元的公因子，可以提到行列式符号外边来. 即，若 D 的第 i 行每个元有公因子 λ，则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\Delta.$$

上式中，我们将第二个行列式记为 Δ.

证　首先设 D 的第一行有公因子 λ，则

$$D = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{（按第一行展开）}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{1j} A_{1j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \lambda\Delta,$$

即本性质对于第一行成立.

一般地,若第 i 行有公因子 λ,互换第一行和第 i 行,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\Delta.$$

由 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$,可得如下推论.

推论 1.2.2 如果行列式有一行(列)的元全为零,则行列式的值为零.

由

$$\begin{vmatrix} a & \lambda a & a_{13} & a_{14} \\ b & \lambda b & a_{23} & a_{24} \\ c & \lambda c & a_{33} & a_{34} \\ d & \lambda d & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & a & a_{13} & a_{14} \\ b & b & a_{23} & a_{24} \\ c & c & a_{33} & a_{34} \\ d & d & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0,$$

可得如下推论.

推论 1.2.3 如果行列式有两行(列)的元对应成比例,则行列式的值为零.

性质 1.2.4 如果行列式的某一行(列)的元都是两项的和,则可以把这个行列式化为两个行列式的和.这两个行列式的这一行(列)的元分别是原行列式中相应位置的两项的第一项、第二项,而其他位置的元不变.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$