



高等学校**应用型本科**规划教材

结构力学

主 编 万德臣

副主编 庞传琴 于克萍



人民交通出版社

China Communications Press

高等学校应用型本科规划教材

Jiegou Lixue

结 构 力 学

主 编 万德臣

副主编 庞传琴 于克萍



人民交通出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部审定的“结构力学课程教学基本要求”及土木工程专业、道路桥梁与渡河工程专业及其相关专业的教学要求编写的,取材适宜,内容精炼,由浅入深,联系实际。每章有知识要点提示、思考题及习题以及部分答案,便于自学。

全书共十三章,包括绪论、平面体系的几何构造分析、静定梁、静定平面刚架、静定拱、静定平面桁架、影响线及其应用、结构位移计算、力法、位移法、渐近法、矩阵位移法、结构的动力计算等内容。

本书是高等学校应用型本科规划教材,适合于应用型本科院校学生、继续教育学院本专科学生、高职高专院校专升本学生使用,也可作为自学考试教材,同时也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/万德臣主编. —北京:人民交通出版社,
2007.6
高等学校应用型本科规划教材
ISBN 978-7-114-06472-2

I. 结… II. 万… III. 结构力学—高等学校—教材
IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 041588 号

高等学校应用型本科规划教材

书 名: 结构力学

著 作 者: 万德臣

责任编辑: 毛 鹏

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010) 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市吉祥印务有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 17

字 数: 424 千

版 次: 2007 年 6 月 第 1 版

印 次: 2007 年 6 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-06472-2

印 数: 0001~4000 册

定 价: 30.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

21 世纪交通版

高等学校应用型本科规划教材

编 委 会

主 任 委 员：张起森

副主任委员：(按姓氏笔画序)

万德臣	马鹤龄	王 彤	刘培文
伍必庆	李香菊	张维全	杨少伟
杨渡军	赵丕友	赵永平	倪宏革
章剑青			

编 写 委 员：(按姓氏笔画序)

于吉太	于少春	王丽荣	王保群
朱 霞	张永清	陈道军	赵志蒙
查旭东	高清莹	曹晓岩	葛建民
韩雪峰	蔡 瑛		

主要参编院校：

长沙理工大学	长安大学
重庆交通大学	东南大学
华中科技大学	山东交通学院
黑龙江工程学院	内蒙古大学
北京交通管理干部学院	辽宁交通高等专科学校
鲁东大学	

秘 书 组：毛 鹏 岑 瑜 (人民交通出版社)

前 言

本教材是 21 世纪交通版·高等学校应用型本科规划教材之一,根据教育部颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中规定的土木工程专业培养目标和教育部审定的“结构力学课程教学基本要求”而编写。本书主要适用于应用型本科院校学生、继续教育学院本专科学生,以及高职高专院校专升本学生。本书主要针对土木工程专业、道路桥梁与渡河工程专业以及其他相关专业。

本书编写中参考了许多高校教材,吸取了多年来的教学经验,力求做到取材适宜,内容精炼,由浅入深,联系实际,并注重培养学生的分析能力、解题能力和自学能力。每章有知识要点提示、思考题及习题以及部分习题答案,便于自学。

全书由山东交通学院万德臣教授担任主编,由山东交通学院庞传琴、长安大学于克萍担任副主编。全书第一、二、三章由崔喜东编写;第四、五章由朱文心编写;第六、八、十二章由万德臣编写;第七章由彭霞编写;第九、十、十一章由庞传琴编写;第十三章由于克萍编写。

读者在使用本教材过程中,如发现不妥或错误之处,敬请批评指正。有关意见可寄山东交通学院土木工程系(济南市交校路 5 号,邮编 250023),以便进一步完善。

编 者

2007 年 1 月

目 录

第一章 绪论	1
第一节 结构力学的研究对象和任务	1
第二节 结构的计算简图	1
第三节 杆件结构的分类	4
第四节 荷载的分类	6
思考题	6
第二章 平面体系的几何构造分析	7
第一节 概述	7
第二节 平面体系的计算自由度	7
第三节 几何不变体系的基本组成规则	9
第四节 瞬变体系	11
第五节 几何构造分析示例	13
思考题	15
习题	15
第三章 静定梁	17
第一节 单跨静定梁	17
第二节 多跨静定梁	21
第三节 简支斜梁的计算	24
思考题	26
习题	26
第四章 静定平面刚架	28
第一节 静定平面刚架的几何组成及特点	28
第二节 静定平面刚架的内力图	29
第三节 静定结构的特性	33
思考题	35
习题	35
第五章 静定拱	38
第一节 概述	38
第二节 三铰拱的数解法	39
第三节 三铰拱的内力图解法	43
第四节 三铰拱的合理拱轴线	44
思考题	47
习题	47
第六章 静定平面桁架	49

第一节	平面桁架的计算简图	49
第二节	结点法	51
第三节	截面法	53
第四节	截面法和结点法的联合应用	56
第五节	组合结构的计算	58
思考题		60
习题		60
第七章	影响线及其应用	63
第一节	影响线的概念	63
第二节	用静力法作单跨静定梁的影响线	64
第三节	间接荷载作用下的影响线	67
第四节	多跨静定梁的影响线	68
第五节	桁架的影响线	69
第六节	机动法绘静定梁的影响线	74
第七节	影响线的应用	76
第八节	公路和铁路的标准荷载及换算荷载	79
第九节	简支梁的包络图	87
第十节	简支梁的绝对最大弯矩	89
思考题		90
习题		91
第八章	静定结构的位移计算	95
第一节	概述	95
第二节	变形体系的虚功原理	96
第三节	结构位移计算的一般公式——单位荷载法	99
第四节	静定结构在荷载作用下的位移计算	100
第五节	图乘法	105
第六节	温度变化时的位移计算	110
第七节	支座移动时的位移计算	112
第八节	线弹性变形体的互等定理	113
思考题		115
习题		116
第九章	力法	120
第一节	超静定结构和超静定次数	120
第二节	力法的基本概念	122
第三节	力法的典型方程	124
第四节	力法的计算步骤和示例	125
第五节	对称结构的简化计算	132
第六节	温度变化时超静定结构的计算	138
第七节	支座移动时超静定结构的计算	140
第八节	超静定结构的位移计算	142

第九节 超静定结构内力图的校核	143
第十节 超静定拱的计算	145
第十一节 超静定结构的特性	154
思考题	155
习题	155
第十章 位移法	160
第一节 概述	160
第二节 位移法的基本未知量和基本体系	163
第三节 位移法的典型方程及计算步骤	164
第四节 对称性的利用	169
第五节 直接由平衡条件建立位移法基本方程	171
第六节 支座移动和温度变化时的计算	172
思考题	175
习题	175
第十一章 渐近法	178
第一节 概述	178
第二节 力矩分配法的基本原理	178
第三节 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架	181
第四节 无剪力分配法	186
思考题	191
习题	191
第十二章 矩阵位移法	194
第一节 概述	194
第二节 单元坐标系中的单元刚度矩阵	194
第三节 结构坐标系中的单元刚度矩阵	198
第四节 结构的刚度矩阵	202
第五节 综合结点荷载列矩阵	206
第六节 矩阵位移法的解算步骤与示例	208
思考题	215
习题	215
第十三章 结构的动力计算	219
第一节 概述	219
第二节 单自由度体系的自由振动	221
第三节 单自由度体系的强迫振动	229
第四节 多自由度体系的自由振动	235
第五节 多自由度体系的在简谐荷载作用下的强迫振动	245
第六节 振型分解法	248
第七节 计算频率的近似方法	252
思考题	257
习题	257

第一章 绪 论

本章要点

- 结构力学的任务与方法;
- 结构的计算简图;
- 结构和杆件的分类, 荷载的分类。

第一节 结构力学的研究对象和任务

工程中的桥梁、隧道、房屋、塔架、挡土墙、基础等用以担负预定任务、支承荷载的建筑物, 都可称为结构。

按照几何特征, 结构可分为杆件结构、薄壁结构和实体结构。杆件结构是由长度远大于其他两个尺度(截面的高度和宽度)的杆件组成的结构。薄壁结构是指其厚度远小于其他两个尺度(长度和宽度)的结构, 如板(图 1-1)和壳(图 1-2)。实体结构则三个方向的尺度相近, 例如水坝(图 1-3)、地基、钢球等。

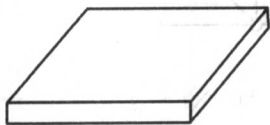


图 1-1 板

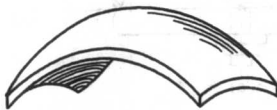


图 1-2 壳

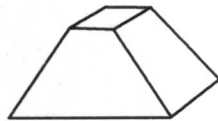


图 1-3 水坝

结构力学的研究对象主要是杆件结构, 其具体任务是:

- (1) 研究结构的组成规则和合理形式。
- (2) 研究结构在荷载等因素作用下的内力和位移的计算。
- (3) 研究结构的稳定性, 以及动力荷载作用下结构的反应。

结构力学是一门技术基础课, 它一方面要用到理论力学和材料力学等课程的知识, 另一方面又为学习桥梁、隧道、建筑结构等课程提供必要的基本理论和计算方法。

第二节 结构的计算简图

实际结构总是比较复杂的, 要完全按照结构的实际情况进行力学分析, 将是很繁难的, 也是不必要的。因此, 在计算之前, 往往对实际结构加以简化, 反映其主要受力和变形性能, 略去次要因素, 用一个简化图形来代替实际结构。这种图形就称为结构的计算简图。简化工作通常包括以下五个方面。

1. 结构体系的简化

实际结构都是空间结构，这样才能抵御来自各个方面的荷载。但在多数情况下空间结构可以忽略一些次要的空间约束的作用，或是将这种空间约束作用转化到平面内，从而将实际结构分解为平面结构，使计算得以简化。

2. 杆件的简化

杆系结构中的杆件，在计算简图中均用杆件的轴线来表示，杆件的长度一般可用轴线交点间的距离表示。

3. 结点的简化

杆件间相互联结处称为结点。木结构、钢结构和混凝土结构的结点，具体构造形式虽不尽相同，但其结点的计算简图常可归纳为以下两种类型。

(1) 铰结点

铰结点的特征是所联结各杆可以绕结点作自由转动，因此可用一理想光滑的铰来表示。例如，图 1-4a) 所示为木屋架的下弦中间结点构造图，由于杆件间的联结对于相对转动的约束不强，受力时杆件可能发生微小的相对转动，因此，这种结点可近似的作为铰结点处理（图 1-4b)）。图 1-5a) 所示为一钢桁架的结点，该处虽然把各杆件焊接在结点板上使各杆端不能相对转动，但在桁架中各杆主要是承受轴力，因此计算时仍常将这种结点简化为铰结点（图 1-5b)）。由此引起的误差在多数情况下是允许的。

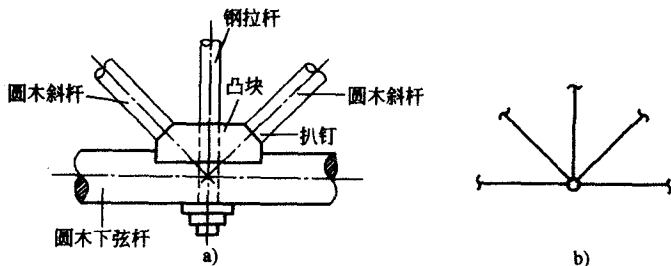


图 1-4 铰结点的简化

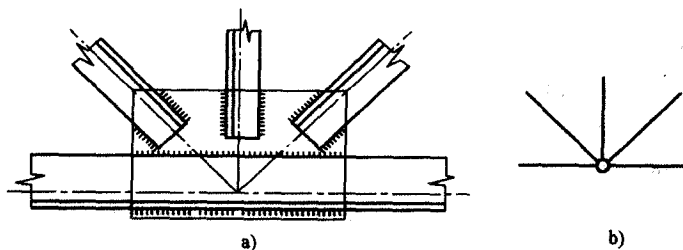


图 1-5 铰结点的简化

(2) 刚结点

刚结点的特征是所联结杆件之间不能在结点处产生相对转动，即在刚结点处各杆之间的夹角在变形前后保持不变，可以传递力也能传递力矩。图 1-6a) 所示为混凝土多层刚架边柱与横梁的结点构造图。由于边柱与横梁间为整体浇筑，同时横梁的受力钢筋伸入柱内并满足锚固长度的要求，因而就保证了横梁与边柱能相互牢固地联结在一起，构成了刚结点。其计算简图如图 1-6b) 所示。

4. 支座的简化

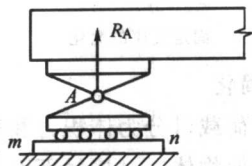
把结构与基础联系起来的装置称为支座。结构所受的荷载通过支座传递给基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式主要有以下五种类型。

(1) 活动铰支座

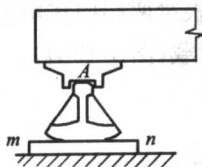
图 1-7a) 为一桥梁活动铰支座的照片, 图 1-7b)、c) 是桥梁中用的辊轴支座及摇轴支座的简化图形。它容许结构在支承处绕圆柱铰 A 转动和沿平行于支承平面 $m-n$ 的方向移动, 但 A 点不能沿垂直于支承面的方向移动。当不考虑摩擦力时, 这种支座的反力 R_A 将通过铰 A 中心并与支承平面 $m-n$ 垂直, 即反力的作用点和方向都是确定的, 只有它的大小是一个未知量。根据这种支座的位移和受力的特点, 在计算简图中, 可以用一根垂直于支承面的链杆 AB 来表示 (图 1-7d))。此时结构可绕铰 A 转动, 链杆又可绕铰 B 转动, 当转动很微小时, A 点的移动方向可看成是平行于支承面的。



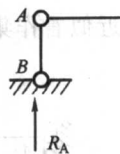
a)



b)



c)

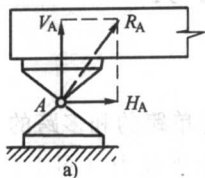


d)

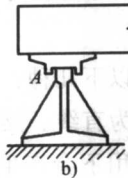
图 1-7 活动铰支座的简化

(2) 固定铰支座

图 1-8a)、b) 所示的铰支座, 容许结构在支承处绕圆柱铰 A 转动, 但 A 点不能作水平和竖向移动。支座反力 R_A 将通过铰 A 中心, 但大小和方向都是未知的。通常可用沿两个确定方向的分反力, 如水平和竖向反力 H_A 和 V_A 来表示。这种支座的计算简图可用交于 A 点的两根支承链杆来表示, 如图 1-8c) 或 1-8d)。



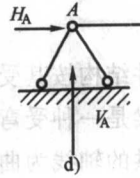
a)



b)



c)



d)

图 1-8 固定铰支座的简化

(3) 固定支座

图 1-9a) 所示支座不容许结构在支承处发生任何移动和转动, 它的反力大小、方向和作用点位置都是未知的, 通常用水平反力 H_A 、竖向反力 V_A 和反力偶 M_A 来表示, 计算简图如图 1-9b)。

(4) 滑动支座 (定向支座)

结构在支承处不能转动, 不能沿垂直于支承面的方向移动, 但可沿支承面方向滑动。计算简图可用垂直于支承面的两根平行链杆表示, 其反力为一个垂直于支承面 (通过支承中心点) 的力和一个力偶。图 1-10) 为一水平滑动支座, 图 1-11) 为一竖向滑动支座 (这种支座在实际结构中并不常见, 但在对称结构取一半的计算简图中, 以及用机动法研究影响线等情况时将会用到)。

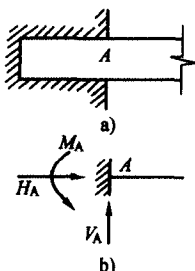


图 1-9 固定支座的简化

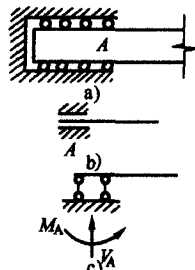


图 1-10 水平滑动支座的简化

5. 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的重力和惯性力等; 表面力则是由其他物体通过接触面而传给结构的作用力, 如土压力、车辆的轮压力等。在杆件结构中把杆件简化为轴线, 因此不管是体积力还是表面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。如图 1-12a) 所示一根梁两端搁在墙上, 简化时, 梁的自重视为沿梁轴线均匀分布的荷载, 重物近似看作集中荷载 (图 1-12b))。

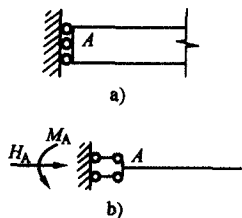


图 1-11 竖向滑动支座的简化

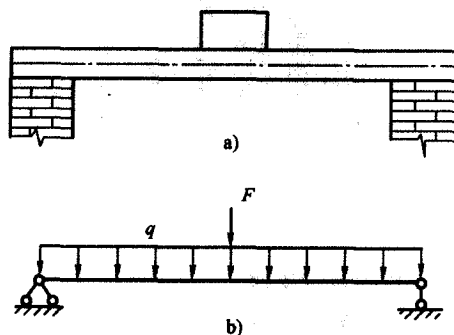


图 1-12 荷载的简化

第三节 杆件结构的分类

常用的杆件结构按其受力特性不同可分为以下几种:

(1) 梁。梁是一种受弯杆件, 其轴线通常为直线。梁有单跨的和多跨的 (图 1-13)。

(2) 拱。拱的轴线为曲线且在竖向荷载作用下会产生水平反力 (图 1-14), 这使得拱内弯矩比跨度、荷载相同的梁的弯矩为小。

(3) 刚架。由直杆组成并具有刚结点 (图 1-15)。

(4) 桁架。由直杆组成, 但所有结点均为铰结点 (图 1-16), 当只是结点受集中荷载作用时, 各杆只产生轴力。

(5) 组合结构。这是由桁架与梁或桁架与刚架组合在一起的结构, 其中桁架杆件只承受轴力, 其余杆件则同时还承受弯矩和剪力 (图 1-17)。

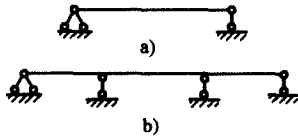


图 1-13



图 1-14

按照杆轴线和外力的空间位置, 结构可分为平面结构和空间结构。

如果结构的各杆轴线及外力 (包括荷载和反力) 都在同一平面内, 则称为平面结构, 否

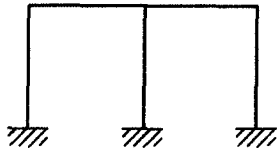


图 1-15

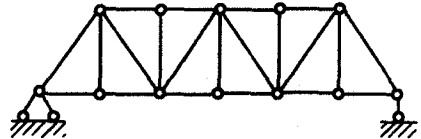


图 1-16

则便是空间结构。实际上工程中的结构都是空间结构, 不过在很多情况下可以简化为平面结构或近似分解为几个平面结构来计算。当然, 不是所有情况都能这样处理, 有些必须作为空间结构来计算, 如图 1-18 所示塔架。

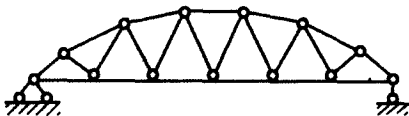


图 1-17

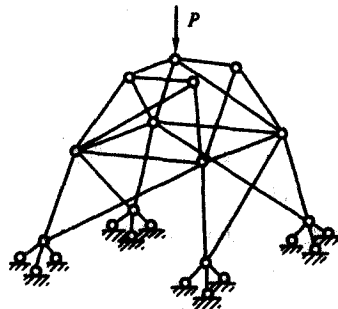


图 1-18

(6) 悬索结构。主要承重构件为悬挂于塔、柱上的缆索, 索只受轴向拉力, 可充分发挥钢材的强度, 且自重轻, 跨度大, 如悬索桥、斜拉桥 (图 1-19) 等。

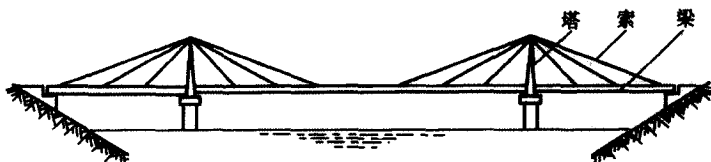


图 1-19

按照内力是否静定，结构可分为静定结构和超静定结构。若在任意荷载作用下，结构的全部反力和内力都可以由静力平衡条件确定，这样的结构便称为静定结构（如图 1-13a）；若只靠平衡条件还不能确定全部反力和内力，还必须考虑变形条件才能确定，这样的结构便称为超静定结构（如图 1-13b）。

第四节 荷载的分类

荷载是主动作用在结构上的外力，按不同分类方法，荷载可进行如下分类。

（1）按作用时间的久暂，荷载可分为恒载和活载。

①恒载是长期作用在结构上的不变荷载，如结构的自重、土压力等。

②活载是暂时作用于结构上的可变荷载，如列车、人群、风、雪荷载等。

（2）按作用位置是否变化，荷载可分为固定荷载和移动荷载。

①固定荷载。恒载及某些活载（如风、雪等）在结构上的作用位置可以认为是不变动的，称为固定荷载。

②移动荷载。有些活载如列车、汽车、吊车等是可以在结构上移动的，称为移动荷载。

（3）根据荷载对结构所产生的动力效应大小，可分为静力荷载和动力荷载。

①静力荷载是指其大小、方向和位置不随时间变化或变化很缓慢的荷载，它不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力的影响。结构的自重及其他恒载即属于静力荷载。

②动力荷载是指随时间迅速变化的荷载，它将引起结构振动，使结构产生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响。打桩机产生的冲击荷载、动力机械产生的振动荷载、风及地震产生的随机荷载等，都属于动力荷载。

除荷载外，还有其他一些因素也可以使结构产生内力或位移，例如温度变化、支座沉降、制造误差、材料收缩以及松弛、徐变等。

思考题

1. 什么是结构的计算简图？它与实际结构有什么关系与区别？为什么要将实际结构简化为计算简图？

2. 平面杆件结构的结点通常简化为哪两种情形？它们的构造、限制结构运动和受力的特征各是什么？

3. 平面杆件结构的支座常简化为哪几种情形？它们的构造、限制结构运动和受力的特征各是什么？

4. 常用的杆件结构有哪几类？

5. 怎样区别静力荷载与动力荷载？

第二章 平面体系的几何构造分析

本章重点

- 自由度和约束的概念;
- 几何不变、几何可变、瞬变的概念;
- 无多余约束几何不变体系组成的三个基本规则。

第一节 概 述

杆件结构通常是由若干杆件相互联结而组成的体系,但并不是无论怎样组成都能作为工程结构使用的。例如图 2-1a) 所示由两根杆件与地基组成的铰结三角形,在平面内受到任意荷载作用时,若不考虑材料的变形,则其几何形状与位置均能保持不变,这样的体系称为几何不变体系;而图 2-1b) 所示铰结四边形,即使不考虑材料的变形,在很小的荷载作用下,也会发生机械运动而不能保持原有的几何形状和位置,这样的体系称为几何可变体系。一般工程结构都必须是几何不变体系,而不能采用几何可变体系,

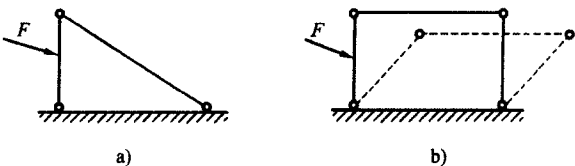


图 2-1

否则将不能承受任意荷载而维持平衡。因此,在设计结构和选取其计算简图时,首先必须判别它是否几何不变,从而决定能否采用。这一工作就称为体系的几何构造分析。

在几何构造分析中,由于不考虑材料的变形,因此可以把一根杆件或已知是几何不变的部分看作是一个刚体。在平面体系中又将刚体称为刚片。

第二节 平面体系的计算自由度

分析一个体系是否几何不变,实际上就是判别该体系是否存在刚体运动的自由度。为此,先来介绍自由度和约束的概念。

1. 自由度

所谓自由度,是指完全确定体系位置所需要的独立的坐标数目。例如一个点在平面内自由运动时,其位置要用两个坐标 x 和 y 来确定(图 2-2a)), 所以一个点的自由度等于 2。又如一个刚片在平面内自由运动时,其位置可由它上面任一点 A 的坐标 x 、 y 和任一直线 AB 的倾角 φ 来确定(图 2-2b)), 因此一个刚片的自由度等于 3。

2. 约束

限制运动的装置称为约束,体系的自由度将因加入约束而减少。凡减少一个自由度的装

置, 称为一个约束。常用的约束有链杆和铰。图 2-3a) 所示为用一根链杆将一个刚片与地基

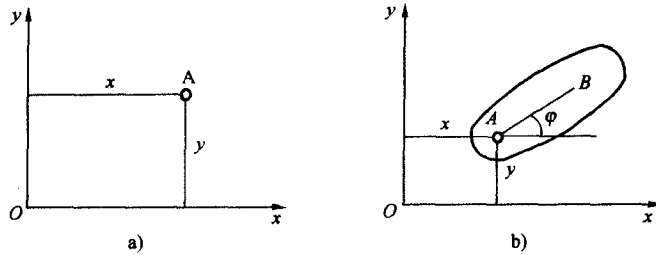


图 2-2

相联, 因 A 点不能沿链杆方向移动, 故刚片将只有两种运动方式: A 点绕 C 点转动; 刚片绕 A 点转动。此时刚片的位置只需用两个参数如链杆的倾角 φ_1 及刚片上任一直线的倾角 φ_2 即可确定, 其自由度由 3 减少为 2。由此可知, 一根链杆为一个约束。图 2-3b), 用一个圆柱铰 A 把两个刚片联结起来, 这种联结两个刚片的铰称为单铰。刚片 I 的位置由 A 点的坐标 x 、 y 和倾角 φ_1 确定后, 刚片 II 只能绕 A 点转动, 其位置只需一个参数倾角 φ_2 即可确定。这样, 两个刚片总的自由度就由 6 减为 4, 可见一个单铰为两个约束, 也就是相当于两根链杆的作用。有时一个铰同时联结两个以上刚片, 这种铰称为复铰。如图 2-3c) 所示, 三个刚片共用一个铰 A 相联。若刚片 I 的位置已确定, 则刚片 II、III 都只能绕 A 点转动, 从而各减少了两个自由度。因此, 联结三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。由此可推知, 联结 n 个刚片的复铰相当于 $(n-1)$ 个单铰。

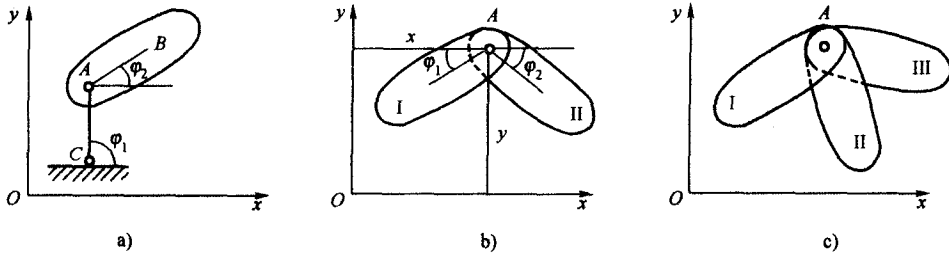


图 2-3

如果在体系中加入一个约束, 而体系的自由度并不因此而减少, 则此约束称为多余约束。

3. 平面体系的计算自由度

一个平面体系, 通常是由若干个刚片彼此用铰相联并用支座链杆与基础相联而组成的。设其刚片数为 m , 单铰数为 h , 支座链杆数为 r , 则当各刚片都是自由时, 它们所具有的自由度总数为 $3m$; 而现在所加入的约束总数为 $(2h+r)$, 设每个约束都使体系减少一个自由度, 则体系的自由度为

$$W = 3m - (2h + r) \quad (2-1)$$

实际上每个约束不一定都能使体系减少一个自由度, 因为这还与约束的具体布置情况有关。因此, W 不一定能反映体系的真实的自由度。为此, 把 W 称为体系的计算自由度。

下面举例说明 W 的计算。如图 2-4 所示体系, 可将除支座链杆外的各杆件均当作刚片, 其中 CD 与 BD 两杆在结点 D 处为刚结, 因而 CDB 为一连续整体, 故可作为一个刚片。这样总的刚片数 $m=8$ 。在计算单铰数 h 时, 应正确识别各复铰所联结的刚片数。例如在结点

D 处, 折算单铰数应为 2, 其余各结点处的折算单铰数均在图中括号内标出。这样, 体系的单铰数共为 $h=10$ 。注意到固定支座 A 处相当于有三根支座链杆, 故体系总的支座链杆数为 $r=4$ 。于是由式 (2-1) 可算出此体系的自由度为

$$W=3m-(2h+r)=3\times 8-(2\times 10+4)=0$$

又如图 2-5a) 所示桁架, 用式 (2-1) 求其自由度, 为

$$W=3\times 9-(2\times 12+3)=0$$

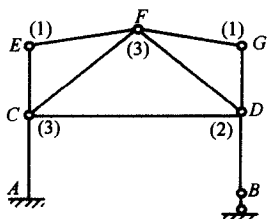


图 2-4

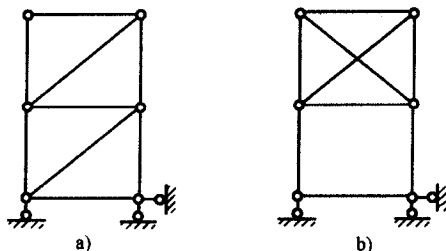


图 2-5

图 2-5a) 所示完全由两端铰结的杆件所组成的体系, 称为铰结链杆体系。这类体系的自由度, 除可用式 (2-1) 计算外, 还可用下面更简便的公式来计算。设 j 代表结点数, b 表示杆件数, r 为支座链杆数。若每个结点均为自由, 则有 $2j$ 个自由度, 但联结结点的每根杆件都起一个约束的作用, 故体系的自由度为

$$W=2j-(b+r) \quad (2-2)$$

例如对于图 2-5a) 的桁架, 按式 (2-2) 计算有

$$W=2\times 6-(9+3)=0$$

与上面结果相同。

任何平面体系的自由度, 按式 (2-1) 或式 (2-2) 计算的结果, 将有以下三种情况:

- (1) $W>0$, 表明体系缺少足够的约束, 因此肯定是几何可变的。
 - (2) $W=0$, 表明体系具有成为几何不变所必需的最少约束数目。如果布置得当, 则是几何不变的 (图 2-5a)); 如果布置不当, 则是几何可变的 (图 2-5b))。
 - (3) $W<0$, 表明体系具有多余约束, 但体系是否几何不变同样要看约束布置是否得当。
- 由上可见, 一个几何不变体系必须满足 $W\leq 0$ 的条件。

有时可以不考虑支座链杆, 而只检查体系本身 (或称体系内部) 的几何不变性。这时, 由于本身为几何不变的体系作为一个刚片在平面内尚有 3 个自由度, 因此体系本身为几何不变时必须满足 $W\leq 3$ 的条件。

必须指出, 一个体系满足了 $W\leq 0$ (或体系本身 $W\leq 3$) 的条件, 不一定就是几何不变的。因为尽管体系总的约束数目足够甚至还有多余, 但若布置不当, 则仍可能是几何可变的。因此自由度 $W\leq 0$ (或体系本身 $W\leq 3$), 只是几何不变的必要条件。为了判别体系是否几何不变, 还须进一步研究其充分条件, 即几何不变体系的几何组成规则。

第三节 几何不变体系的基本组成规则

几何不变的平面体系的几何组成规则, 归结为三条基本组成规则。

1. 三刚片规则

三个刚片用不在同一直线上的三个单铰两两相联, 组成的体系是几何不变的。