普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

总主编　俞瑞钊

矩阵方法

JUZHEN FANGFA

葛红军　阳　军　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

总主编 俞瑞钊

矩阵方法

JUZHEN FANGFA

◆ 葛红军 阳 军 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

矩阵方法 / 俞瑞钊主编. —杭州:浙江大学出版社，2007.6

（高等数学模块化系列教材）

ISBN 978-7-308-05384-6

Ⅰ.矩… Ⅱ.俞… Ⅲ.矩阵—高等学校—教材 Ⅳ.0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 088206 号

矩阵方法

葛红军　阳　军　编

责任编辑　严少洁

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）

（网址：http://www.zjupress.com）

（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）

排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷　浙江省临安市曙光印务有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　6.75

字　　数　116 千

版 印 次　2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-05384-6

定　　价　10.00 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

JUZHEN FANGFA

内容简介

本书是“高等数学模块化系列教材”之一，是适合于经济管理、理工类各专业的公共课教材。本书只讲解矩阵的概念、矩阵的运算和矩阵的简单应用，计划 18 课时，1 学分。

本书分为两章和两个附录。第一章从实例中给出矩阵的概念，接着介绍矩阵的运算、矩阵变换和矩阵的一些相关属性；第二章为矩阵的应用，前两节介绍如何运用矩阵去解线性方程组，后三节介绍了三个要利用矩阵来分析问题的数学模型：线形规划、投入产出分析、价格弹性矩阵。书中打“*”号的内容供学生自学，每节后面都有练习题，每章后面有复习题，以便帮助读者复习巩固所学知识。附录 1 为数学实验，介绍 Matlab 数学软件在矩阵输入、矩阵运算以及在解方程中的命令实现，以便简化繁重的数值计算。附录 2 为各章节的习题参考答案。第一章由葛红军编写，第二章和附录由阳军编写。

高等数学模块化系列教材编委会

前　言

中国高等教育在“十一五”期间的一个主题是走向内涵发展的道路。对每个高等职业技术学院来讲，最重要的任务除了要建设一支具有相当水平的师资队伍，要构建一个对人才培养必须具备的高效的产学研结合体系之外，就是要有一个与高职定位相吻合的高等职业技术课程技术。这其中，基础课，特别是数学课是我们不可能回避、又是极为重要的课程。

在高等教育的精英阶段发展起来的高等专科学校，数学课遵循的是“必需、够用”的原则。当时，数学基本上就是“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课，学时也都在150～200学时之间，内容基本上是本科生内容的简化。当高等教育进入大众化阶段后，高等职业技术学院的定位和学生生源发生了很大的变化。我们培养的人才是社会上各类岗位的技能型、应用型人才，而学生的数学基础明显薄弱，单凭主观想象和判断来对数学内容进行取舍遇到许多矛盾。因此，数学课的改革便成为高职教育的重要课题。

“必需、够用”在这种新形势下如何赋予新的内涵，并在此方针下进行数学课的改革是非常重要的。我们以为“必需、够用”不能以数学自身的学科系统来衡量，不能由数学教师的爱好来决定，也不能由学校统一规定课程的学时和内容。“必需、够用”要由每个专业的职业岗位需求来决定，要由每个专业的专业要求来决定，要由学生的实际基础来决定。为此，近几年来，我们进行了数学课的实用化、小型化、模块化的改革探索。这套系列教材便是这种改革的阶段性成果。

本系列教材将高等数学分为5个小型化模块，分别为：《微积分》、《矩阵方法》、《概率与统计方法》、《集合初步》和《图的方法》，除了《微积分》为36学时外，其他课程均为18学时，前三门课程提供给任一专业选择，后两门课主要是为大量的信息类专业选择。为了满足有兴趣并需要提高的学生的要求，我们又

组织编写了《应用数学基础》，内容包括多元微积分、微分方程、矩阵特征值与特征向量、矢量代数和空间解析几何、无穷级数等。

本系列教材具有以下鲜明特点：

1. 注重实用性

系列教材力求从实际问题出发，从学生容易理解的角度自然地、直观地引入数学概念和定义，淡化数学严密的理论体系，突出培养学生的知识应用能力；并借助于常用数学软件训练学生的实际动手操作能力，注重数学作为工具的实用性。

2. 小型化、模块化，兼顾包容性和可选择性

我们根据高职院校对数学知识的要求，对数学课内容进行重组，总共设立了5个模块。各专业可根据自己的专业特点和相应职业岗位的需求选择不同的模块进行教学，把"必需、够用"的尺度掌握在各专业自己手中，更好地发挥数学知识为专业服务的功能。同时，每本教材都精选了大量例题，涵盖几何学、经济学、力学、工程学和电学等方面，任课教师可根据专业需要和学生基础选讲其中的合适例题，真正做到因材施教。

3. 注重学生逻辑思维能力的培养

通过数学课如何培养学生的逻辑思维能力仍是一项重要任务。根据高职教育的特点，我们着重直观地讲解推理过程，尽量少用抽象的严格的逻辑，同时通过对学生学习过程中常见错误的纠正，培养学生正确的逻辑思维方法。

如何选择数学课的内容，如何让学生对数学产生兴趣，并让学生掌握今后工作和学习需要的数学知识和抽象思维能力，都需要我们通过实践不断改进和提高。由于改革和探索的时间较短，加上水平的限制，定有许多不足甚至错误之处，敬请老师和同学们不吝赐教。

编　者

2007年5月

目　录

第 1 章　矩　　阵

矩阵是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个极其重要的数学概念，它被广泛地应用到现代管理科学、自然科学、工程技术等各个领域. 矩阵是线性代数的一个主要研究对象. 本章将介绍矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换及逆矩阵.

1.1　矩阵的概念

我们常常用表格来表示一些数据及其关系，如物资调运表、仓库管理表、学生成绩表、工资表等.

例 1　运输公司要将某种货物从甲、乙、丙三个产地运往 A、B、C、D 四个销售地，调运计划表：

运输计划表	A	B	C	D
甲	315	520	305	830
乙	342	412	231	715
丙	450	357	180	634

可以简单地表示为

$$\begin{bmatrix} 315 & 520 & 305 & 830 \\ 342 & 412 & 231 & 715 \\ 450 & 357 & 180 & 634 \end{bmatrix}$$

例 2 某高校 4 名学生 A、B、C、D 三门功课 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 的期末考试成绩表：

成绩表	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	78	90	85
B	80	95	82
C	68	75	80
D	90	87	93

可以简单地表示为

$$\begin{bmatrix} 78 & 90 & 85 \\ 80 & 95 & 82 \\ 68 & 75 & 80 \\ 90 & 87 & 93 \end{bmatrix}$$

例 3 在许多实际问题中常常需要解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

方程组的系数和常数项可以排成如下的表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

显然，有了表(2)之后，线性方程组(1)也就随之确定了．一般表明，对于不同的实际问题，就有不同的数表．每个位置上的数都具有其固定的含义，不能随意调换，这种数表在数学上被称为矩阵．

定义 1.1　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成一个 m 行 n 列的矩形数表，称为一个 $m \times n$ 的矩阵，记作：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 叫矩阵的第 i 行第 j 列元素．

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$ 等表示矩阵，也可以记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，以标明行数 m 与列数 n.

只有一行的矩阵称为行矩阵，记作：$a_{1\times n}=[a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots \quad a_{1n}]$；

只有一列的矩阵称为列矩阵，记作：

$$\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

当矩阵的行数和列数相等时，即 $m=n$ 时，称该矩阵为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

n 阶方阵从左上角到右下角的对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角线元素．若主对角线以外的元素都为零，则这个方阵被称为对角方阵或对角阵，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

特别地,在对角方阵中,当 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ 时,这个方阵被称为单位矩阵,记作 $\boldsymbol{E}$,即

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

所有元素都为零的矩阵,称为零矩阵,记为 $\mathbf{0}$,即

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵元素仅为 0 或 1 的矩阵,称为 0-1 矩阵,如下:$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为 0-1 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义 1.2 两个 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$,如果它们的对应元素分别相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad (i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

例 1 现有 4 名学生 3 门课程成绩,4 名学生分别用 A、B、C、D 表示;

课程分别用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 表示. 每个学生每门课程有三个成绩分别为平时作业成绩、平时小测验成绩、期末考试成绩. 每项成绩按 10 分记录，分别得到三张成绩表.

平时成绩表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	6	8	9
B	8	5	8
C	8	7	8
D	4	6	6

测验成绩表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	5	9	8
B	6	7	9
C	7	8	8
D	5	6	7

期末考试成绩表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	6	7	9
B	8	6	9
C	8	7	8
D	6	5	6

如果只抽出表格的分数，分别得到三个矩阵，同时每个学生每门功课的总成绩可以看成是三个矩阵相加：

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 24 & 26 \\ 22 & 18 & 26 \\ 23 & 22 & 24 \\ 15 & 17 & 19 \end{bmatrix}$$

因此，我们可以如下定义加法.

定义 1.3 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

规定：
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

应该注意，只有当两个矩阵的行数相同，列数也相同（称为同型矩阵）时，才能相加.

矩阵加法满足下列运算规律，设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵，则

(1)$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$（交换律）；

(2)$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$（结合律）；

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$. $-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，例如，矩阵 $\begin{bmatrix}-2 & -1 & -7\\ -3 & 6 & 4\end{bmatrix}$ 称为矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$ 的负矩阵. 显然有

(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

利用矩阵的加法和负矩阵可以定义矩阵的减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

(4) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

1.2.2 数与矩阵相乘

例 2 从三个产地往四个销售地调运某种货物，某个月的调运方案用矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & 4\\ 3 & 4 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

表示. 假设半年内调运方案不变，那么这半年调运这种货物的总数表示为矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\begin{bmatrix}2\times 6 & 3\times 6 & 5\times 6 & 4\times 6\\ 3\times 6 & 4\times 6 & 6\times 6 & 0\times 6\\ 0\times 6 & 3\times 6 & 2\times 6 & 1\times 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}12 & 18 & 30 & 24\\ 12 & 24 & 36 & 0\\ 0 & 18 & 12 & 6\end{bmatrix}\\ &=6\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

我们把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 6 的乘积，一般地我们定义：

定义 1.4 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{A}$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ,m 为数):

(1)$(\lambda m)\boldsymbol{A}=\lambda(m\boldsymbol{A})$

(2)$(\lambda+m)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{A}$

(3)$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

(4)$1\boldsymbol{A}=A\qquad 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

例 3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&4&7\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&3&2\\5&-1&6\end{bmatrix},\lambda=3$,求 $A+\boldsymbol{B},\lambda\boldsymbol{A}$

解　$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2+1&1+3&0+2\\-3+5&4-1&7+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&2\\2&3&13\end{bmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times2&3\times1&3\times0\\3\times(-3)&3\times4&3\times7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&0\\-9&12&21\end{bmatrix}$$

1.2.3　矩阵的乘法

例 4　现有甲、乙、丙三种产品 2003 年和 2004 年的产量(吨)与成本(万元 / 吨)、销价(万元 / 吨),见表如下:

年份	甲	乙	丙
2003	3	4	5
2004	7	8	9

	成本	销价
甲	2	3
乙	3	6
丙	5	7

为了计算 2003、2004 年三种产品的总成本和销售总额,可以用矩阵计算如下:

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\7&8&9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\3&6\\5&7\end{bmatrix}$$