



21世纪高等学校新理念教材建设工程

大学物理实验

辽宁工学院物理实验室 编



NEUPRESS
东北大学出版社



21 世纪高等学校新理念教材建设工程

大学物理实验

辽宁工学院物理实验室 编

出版：辽宁工学院物理实验室
地址：沈阳市沈河区
邮编：110004
电话：024-83687331（编辑部）
024-83687332（办公室）
传真：024-83687330（编辑部）
E-mail: hequn@neupress.com
http://www.neupress.com

田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系
田 颖：沈阳理工大学物理系

东北大学出版社
• 沈 阳 •

© 辽宁工学院物理实验室 2005

图书在版编目 (CIP) 数据

大学物理实验 / 辽宁工学院物理实验室编. — 沈阳: 东北大学出版社, 2005.1
(2006.1 重印)

(21 世纪高等学校新理念教材建设工程)

ISBN 7-81102-114-5

I. 大… II. 辽… III. 物理学—实验—高等学校—教材 IV. O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 006427 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 184mm × 260mm

印 张: 12

字 数: 315 千字

出版时间: 2005 年 1 月第 1 版

印刷时间: 2006 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑: 孙 锋

责任校对: 张淑萍

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 17.00 元

《大学物理实验》编委会

主 编 邱忠媛

副 主 编 王文新 徐翠艳

参编人员 高春英 敬晓丹

李 义 袁 泉

麻博远

前 言

本书是按照原国家教委颁发的《高等工业学校物理实验基本要求》，以辽宁工学院多年使用的物理实验教材及部分补充讲义为基础，结合学校专业设置特点和物理实验室仪器设备的实际情况，组织具有多年实验教学经验的任课教师精心编写而成。

全书共分 5 章。第一章为绪论，主要介绍了大学物理实验这门课的地位、作用以及物理实验课教学的三个重要环节；第二章为测量误差和实验数据处理；第三章至第五章编入了有关基础测量型、验证研究型 and 综合设计型实验 42 个，每个实验后面配有相应的思考题。在原有实验题目的基础上，新增了“霍尔效应研究”、“塞曼效应”等近代物理实验，以及“热电偶的定标”、“万用表的组装”、“电子温度计的组装”和“显微镜和望远镜的组装”等综合设计型实验。本书根据实验教学改革发展的要求，又编入了近年来部分教师的实验教学论文，其中有怎样写好实验报告、计算机技术在物理实验数据处理方面的应用等内容。

本书由邱忠媛任主编，王文新、徐翠艳任副主编。

参加编写的人员有：高春英，敬晓丹，李义，袁泉，麻博远。

邱忠媛负责编写：前言，内容提要，实验 10，实验 21，实验 30，实验 31，实验 34，实验 35，实验 37，附录 A，并统稿。

王文新负责编写：第二章，实验 2，实验 3，实验 5，实验 8，实验 9，实验 22，实验 26，并统稿。

高春英负责编写：第一章，实验 1，实验 6，实验 7，实验 23，实验 27，实验 29，实验 32。

徐翠艳负责编写：实验 14，实验 16，实验 17，实验 18，实

验 28。

敬晓丹负责编写：实验 11，实验 13，实验 15，实验 25。

李义负责编写：实验 4，实验 19，实验 20，实验 33，实验 38，实验 39。

麻博远负责编写：实验 40，实验 41，实验 42，附录 B 和附录 C。

袁泉负责编写：实验 12，实验 24，实验 36。

本书由李春明教授和赵星副教授主审。

由于编者的水平所限，书中难免有不足之处，敬请使用本教材的教师、同学和广大读者批评指正。

编 者

2004 年 10 月

目 录

第一章 绪 论	1
第二章 测量误差和实验数据处理	4
一、测量及其分类	4
二、测量误差	4
三、误差的种类	5
四、偶然误差的估算	6
五、有效数字及其运算规则	11
六、数据处理	13
第三章 基础测量性实验	21
实验 1 物体长度的测量	21
实验 2 物体密度的测定	25
实验 3 用单摆测定重力加速度	29
实验 4 测量瞬时速度、加速度	34
实验 5 弹性模量的测定	38
实验 6 金属线胀系数的测定	42
实验 7 测定冰的溶解热	46
实验 8 金属比热容的测定	49
实验 9 电子束综合实验仪的使用	52
实验 10 伏安法测电阻	58
实验 11 用惠斯登电桥测电阻	61
实验 12 电子示波器的使用	64
实验 13 用双臂电桥测低电阻	67
实验 14 薄透镜焦距的测定	71
实验 15 衍射法测量微小长度	75
实验 16 分光计的调节及棱镜折射率的测定	78
实验 17 用衍射光栅测光波波长	83
第四章 验证研究性实验	86
实验 18 刚体转动定律的研究	86

实验 19	验证动量守恒和机械能守恒	90
实验 20	气垫导轨上的简谐振动	94
实验 21	用电位差计测电源电动势	98
实验 22	用模拟法测绘静电场	100
实验 23	灵敏电流计的研究	102
实验 24	用冲击电流计测磁场	106
实验 25	电子在电场中加速和偏转	109
实验 26	光的干涉——平凸透镜曲率半径的测定	114
实验 27	光的偏振现象研究	117
实验 28	照相技术	121
实验 29	迈克耳孙干涉仪	124
实验 30	霍尔效应测磁场	128
实验 31	测定普朗克常量	133
实验 32	电子荷质比的测定	137
实验 33	用油滴仪测量电子电荷	142
第五章	综合设计性实验	145
第一部分	综合性实验	145
实验 34	电表的改装及校正	145
实验 35	原子光谱的拍摄与测量	148
实验 36	热电偶的定标	150
实验 37	塞曼效应研究	153
实验 38	全息照相的记录与再现	157
实验 39	用激光照相制备光栅	160
第二部分	设计性实验	162
一、设计性实验的基本知识		162
二、设计性实验选题		165
实验 40	万用表的组装	165
实验 41	电子温度计的组装	167
实验 42	显微镜和望远镜的组装	168
附录 A		169
1. 怎样写实验报告		169
2. 用 Excel 软件处理大学物理实验数据		172
附录 B		176
附录 C		178
参考文献		184

第一章 绪 论

一、物理实验课的地位与作用

物理学是既包含物理理论又包含物理实验的一门科学。从本质上说,物理学是以实验为基础的。物理学中,每个概念的确立、每个规律的发现和每个原理的确定都必须以坚实的实验为基础,而且不断地经过实验的检验才能得到公认。所以说,物理实验在物理学创立和发展中占有十分重要的地位。

在物理学的发展中有许多物理学的规律是直接从大量的实验事实中总结概括出来的。牛顿是在伽利略、开普勒、胡克和惠斯登等人的实验及工作的基础上,总结归纳出万有引力定律,并完成了经典的力学体系。电磁学中的库仑定律、安培定律、毕奥-萨戈尔定律以及法拉第电磁感应定律等,都是在总结大量实验事实的基础上建立起来的。所以说,物理实验在物理学中起到了极其重要的作用。

物理学具有基础性和普遍性,而物理实验也如此。因此,物理课被确立为高等院校工科各专业必修的一门重要基础课。它是学生进入大学后受到系统实验技能训练的良好开端。可以培养学生通过实验手段去发现问题、分析问题和解决问题的能力;可以培养学生掌握用理论知识与实验技能相结合的方法。从而使学生既能动手又能动脑。也为今后的专业课程打下了实验基础。因此,对于工科专业的大学生,物理实验的技能在其应具备的知识、能力结构中占有非常重要的地位与作用。

二、物理实验课的主要任务和基本程序

1. 物理实验课的主要任务

(1) 学习和掌握进行物理实验的基础知识、基本方法和基本技能,了解进行物理实验的主要过程,使学生具有一定的科学实验能力。

(2) 培养和提高学生观察和分析物理现象的本领,训练学生从实验中归纳总结物理规律的能力,并使学生会利用所掌握的物理理论进行实验和设计实验。

(3) 培养学生具有严肃认真的工作作风,实事求是的科学态度,勇于探索的钻研精神,克服困难的坚强意志,遵守实验制度和纪律的优良品德。

2. 物理实验课的基本程序

物理实验包括的内容很多,对同一内容,测量方法不尽相同,但实验程序大都相同。一般可以分为三个环节,即:实验课前的预习、课上进行实验操作和撰写实验报告。

(1) 实验课前的预习

课堂上实验时间有限,每次实验从理解内容、熟悉仪器到准确测量,任务是很重的,需要一定的时间。为了有效地利用课上的时间,高质量地完成实验课的任务,要求在课前对所要进行的实验内容进行预习,并对预习的实验内容写成简略的书面预习报告,任课老师可在课前检查。

预习的要求是:认真阅读实验教材中所做实验的章节,了解本实验的内容、目的、基本

原理、使用仪器及实验方法和步骤。

预习书面实验报告的内容有：

① 实验名称；

② 实验目的；

③ 实验依据的简要原理，这是预习实验的核心内容，需写出推导公式的主要步骤、画出必要的线路图和光路图并用语言叙述清楚；

④ 实验的主要步骤；

⑤ 记录数据需用的表格，表格中要标明已知物理量和待测物理量的文字符号及单位、测量次数等；

⑥ 预习中遇到的问题和实验中的注意事项。

总之，在课前对所要进行的实验，要做到心中有数，以便在课堂上能够抓住实验的关键，及时、准确、迅速地获得待测量的数据。

(2) 课上进行实验操作

① 学生进入实验室后必须遵守实验室的制度，在未了解仪器设备性能和使用方法之前不可擅自自动用。经老师检查允许后方能进行调试、安装和操作。

② 实验前要对照教材和仪器了解仪器的工作原理及方法。

③ 在实验中，要仔细观察和测量，如实把数据记录在老师规定的记录本和纸上，要根据仪器的最小刻度，决定实验数据有效数字的位数。各个数据之间，数据图表之间要留有空地，以供必要时补充或更正。但所测的数据不能随便涂改，更不允许按实验室的“标准数据”修改自己的数据，要培养实事求是的学风。数据确实有错的，可将其划掉，说明理由将正确的写在旁边。经老师检查，数据有错或误差大的应耐心重测。

④ 做完实验，实验数据要经过老师检查，测量结果真实准确的经老师签字有效，以此数据处理结果，并作为依据同撰写的实验报告一起上交。

⑤ 实验结束后，老师检查仪器是否完好，如有问题，按实验室规定制度进行处理。

⑥ 最后要整理仪器和实验台，搞好周围的环境卫生，离开实验室。

(3) 撰写实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来。对实验原理的阐述要简明扼要，方法步骤叙述得有条理，语言通顺，文字、符号要端正，图表规范，结果正确。

通常物理实验报告的内容包括以下各项：

① 实验的年、月、日、天气、温度、气压和共同实验者。

② 实验题目。

③ 实验目的，即在实验中要解决什么问题。

④ 实验原理，要经过认真阅读、研究、归纳和整理，简明扼要地写出实验所依据的科学道理，而不是简单地抄写实验讲义或教科书。

⑤ 仪器设备，写明本实验中所用的仪器、材料和工具的名称，对于主要仪器设备还应详写类别、型号和性能指标。

⑥ 实验的主要步骤，将实验内容、过程归纳得有条有理。

⑦ 数据处理，不同实验有不同处理数据的方法，根据要求处理数据，首先将课上测量记录的数据整理好，填写在表格内，在处理数据时，写清所用公式和计算过程，需要画图的

要用坐标纸画出实验曲线。

⑧ 实验结果, 对处理的数据结果进行误差分析, 找出影响实验结果的主要因素, 进行讨论, 并给予修正。误差分析包括: 算术平均值、绝对误差和相对误差, 最后以规范的形式表达出计算结果。

⑨ 回答老师指定的思考题, 可以提出改进实验方法的建议。对印象很深的实验, 可以写出收获和体会。

□ 第二章 测量误差和实验数据处理

科学实验的任务不仅要定性地观察各种自然现象,而且要定量测量有关物理量以及它们之间的数量关系。通过对测量数据的误差分析与数据处理,科学地评价测得的物理量或物理量之间的关系接近于客观真实的程度,以求得对自然本质的认识,达到利用自然、改造自然、造福于人类社会的目的。

一、测量及其分类

1. 测量及计量单位

测量是一种“比较”过程,就是把待测物理量同选作计量单位的同类标准量进行比较,得出它们之间的倍数关系,称这个倍数为该物理量的测量数值,或称为测量数据。因而,一个物理量的测量值等于测量数值和单位的乘积。物理量的大小是客观存在的,选择不同的单位,相应的测量数值就有所不同,单位越大,测量数值越小,反之亦然。因此,一个物理量测量数据不同于一个数值,它是由数值和单位两部分组成的。一个数值有了单位,便有了特定的物理意义。

目前,物理学上各种物理量单位,都采用中华人民共和国法定的计量单位,它以国际单位制(SI)为基础单位。国际单位制是在 1971 年第十四届国际计量大会上确定的,它们是:长度单位——米(m),质量单位——千克(kg),时间单位——秒(s),电流单位——安[培](A),热力学温度单位——开[尔文](K),物质的量单位——摩[尔](mol),发光强度单位——坎[德拉](cd)。这 7 种单位称为国际单位制的基本单位。此外,国际单位制还有两个辅助单位:平面角单位——弧度(rad)和立体角单位——球面度(sr)。其他物理量单位均可由这些基本单位导出,称为国际单位制的导出单位。

2. 测量的分类

测量又可分为直接测量和间接测量。用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量称为直接测量,相应的物理量称为直接测得量。例如,用秒表测量时间,用米尺测量长度等。而更多的物理量没有直接读数的量具或仪表,只能由一些直接测得量,通过一定的关系式计算出来,这样的测量就称为间接测量,相应的物理量称为间接测得量。例如,测量圆铜柱的密度时,可以用游标卡尺测出它的高 h 和直径 d ,计算出体积 $V = \pi d^2 h / 4$,然后用物理天平称出它的质量 m ,则圆铜柱的密度 $\rho = m / V = 4m / (\pi d^2 h)$ 。体积和密度在这里都是间接测得量。值得指出的是,同一物理量由于选用的测量方法不同,它可以是直接测得量,也可以是间接测得量。如上述对圆铜柱密度测量的例子中,如果利用手册中查得的圆铜柱密度,通过测量体积再来计算圆铜柱的质量,则质量就是间接测得量。

二、测量误差

每一个实验者都希望尽可能地把待测量测准。一般说来,测量过程都是通过某人在一定的环境条件下,使用一定的测量仪器、仪表和量具进行的。由于仪器、仪表或量具不可能十分精确,故测试人的操作、调整和读数不可能完全准确。此外,环境的变化诸如温度的波

动、振动、电磁辐射随机变化等,也将不可避免地造成各种干扰。因此,测量都无法做到绝对准确。用什么方法来定量表达测量结果的准确程度呢?最容易想到的是:测量值与被测对象的客观真值差多少,差得多准确程度就低,差得少准确程度就高。我们以 X 表示被测量的客观真值,以 x 表示实际测量得到的测得值,则其误差值 Δx 定义为测得量的绝对误差

$$\Delta x = x - X \quad (1)$$

把 E 定义为测得量的相对误差,则

$$E = \frac{\Delta x}{X} \times 100\% \quad (2)$$

显然,绝对误差和相对误差的大小,反映了测量结果的精确程度。

事实上,所谓被测得量的客观真值是不知道的,能知道的是靠测量得到的测量值,因而以上关于误差的定义还无法用于实际中去。于是,人们就建立起各种误差理论,用来科学地估算测得量的误差。这就要求每一位科学工作者掌握有关测量误差的一些基本知识。

三、误差的种类

从研究误差的需要出发,按照误差产生的原因和基本性质的不同,可将误差分为两大类:系统误差和偶然误差。

1. 系统误差

系统误差的特征是,在同一条件下多次测量同一物理量时,测量结果出现固定的偏差,即误差的大小和符号始终保持恒定,或者按照某种特定的规律变化,它来源于以下几个方面:

① 仪器误差。由于测量所用量具、仪器本身的缺陷造成的误差。例如,仪器零点未对准,天平砝码有缺损又未经核准等。

② 方法误差。由于实验原理和实验方法不完善带来的误差。例如,计算公式是近似的或忽略了一些因素的影响等。

③ 环境误差。由于外界环境因素发生变化所引起的误差。例如,室温的变化、气压的变化等。

④ 个人误差。由于观测者感觉器官的不完善,或者个人不正确的习惯所造成的误差。例如,有人估计读数时总是偏小或偏大,按秒表总是提前或总是落后等,这种误差又往往因人而异,并与测量者当时的心理、生理状况有关。

由于系统误差在实验条件不变时有确定的大小和符号,因此在同一实验条件下多次测量,求取平均值又不能减小或消除它时,应该对测量中可能产生的系统误差加以充分的分析和估计,对测量结果进行修正。

2. 偶然误差(随机误差)

偶然误差的特征是在同一条件下多次测量同一物理量时,在排除了系统误差产生的因素后仍发现每次测量结果都不一样,测量误差的大小不同,正负也不同,完全是随机的,初看没有确定的规律,但当测量次数足够多时,从总体来看服从某种统计规律,就称这种误差为偶然误差。

由于偶然误差具有时正时负、时大时小的特征,因而多次测量取平均可以抵消部分的影响。偶然误差主要是由于测量过程中一些偶然或不确定的因素引起的,这些因素一般无法预知,难以控制。所以测量过程中偶然误差的出现将带有某种必然性和不可避免性。

把测量误差分为系统误差与偶然误差,是研究误差的需要。系统误差与偶然误差性质不同,来源不同,处理方法也不同。原则上讲,系统误差可以消除,而偶然误差不能消除。一个具体测量过程中出现的误差往往既含有偶然误差,又含有系统误差。它们对测量结果的影响也各有不同的特点。通常用“准确度”这一术语来表征偶然误差的大小。如果以射击打靶的结果与某次测量的结果进行类比,图 1 (a) 的弹着点明显偏离靶心,存在着系统误差,因此准确度不高。但是弹着点比较集中,弥散程度小,可以说其精密度还是较高的。图 1 (b) 则相反,弹着点比较分散,因此精密度不高。但是从弹着点分布的情况来看,并没有明显的固定偏向,可以认为它的准确度还是较高的。图 1 (c) 则不仅精密度较高,而且准确度也较高。这样的结果“精确度”较高。影响测量结果的精确度,有时主要因素是偶然误差,有时主要因素是系统误差,对于每项具体测量工作需要进行分析。测量结果的总误差是系统误差和偶然误差的综合。

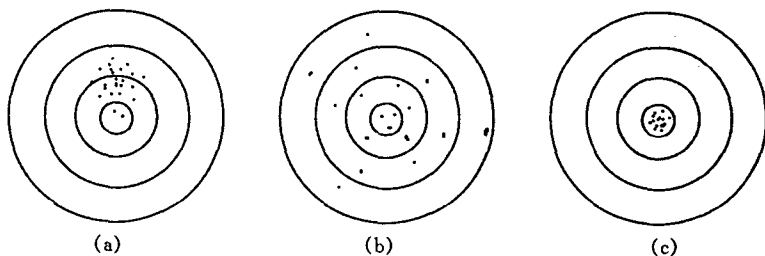


图 1 测量结果精确程度与射击打靶的类比

因仪器损坏、设计错误和操作不当等造成的测量错误,不属于测量误差。

四、偶然误差的估算

1. 偶然误差的统计规律

假设系统误差已经消除,在同样条件下,对某一物理量 x 进行多次重复测量。由于偶然误差存在,测量各次结果为 $x_1, x_2, \dots$, 一般都有差异。如果该物理量的真值为 X , 则根据误差的定义,各次测量的误差为

$$\Delta x_i = x_i - X \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

大量实践证明,偶然误差的出现服从正态分布(高斯分布)的规律。这种统计规律表现在以下四点:

- ① 有界性,绝对值很大的误差出现的概率为零,即误差的绝对值不会超过一定的界限;
- ② 单峰性,绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大;
- ③ 对称性,绝对值相等的正误差和负误差出现的概率接近相等;
- ④ 抵偿性,当测量次数非常多时,由于绝对值相等的正负误差出现的概率接近相等,则偶然误差的算术平均值将趋于零。

根据以上的统计规律,可以从数学上推导出偶然误差出现的概率密度函数。其函数表达式为

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

函数的图形如图 2 所示。

式中 $\Delta x = x - X$ 表示测量的偶然误差, 函数 $f(\Delta x)$ 表示在误差值 Δx 附近单位误差间隔内, 误差值 Δx 的出现的概率, σ 是该函数式中唯一的参量, 可以作为测量精密度的量度, σ 的数学表达式是

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X)^2}{n}} \quad (5)$$

这个关系式称为方均根误差, 又称标准误差。

从函数的图形上看, 坐标原点对应 $\Delta x = 0$, 即相当于真值的位置。曲线下的总面积表示各种大小、正负误差出现的总概率, 当然它是 100%。由 $\Delta x = -\sigma$ 到 $\Delta x = +\sigma$ 之间的曲线下的面积, 表示偶然误差落在区间 $(-\sigma, \sigma)$ 内的概率, 可以计算出其概率为 68.3%, 区间 $(-\sigma, \sigma)$ 称为置信区间, 概率 $P = 68.3\%$ 为置信概率, 在区间 $(-2\sigma, 2\sigma)$ 内, 概率为 95.4%, 在区间 $(-3\sigma, 3\sigma)$ 内, 概率为 99.7%。

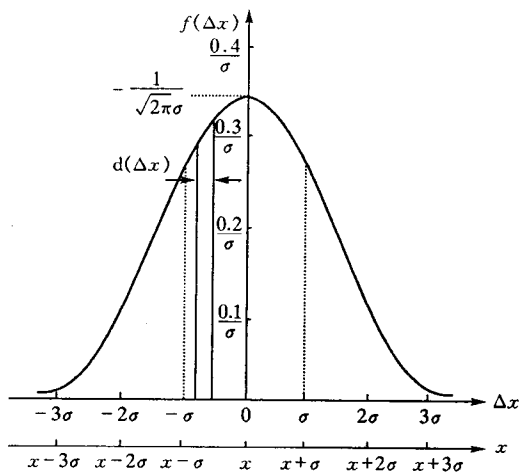


图 2 正态分布

1981 年 10 月召开的第七届国际计量委员会会议上通过了“实验不确定度的说明建议书”, 建议用“不确定度(Uncertainty)”一词取代“误差(Error)”来评定测量结果的质量, 这一决议已在世界范围内推广。我国国家计量总局给出的不确定度的定义是: 由于测量误差的存在而对被测量的量不能肯定的程度。实际上, 不确定度的定量表示就是以所需要的置信概率给出的以标准误差估数表示的置信区间。目前国内外的科学论文已经普遍采用标准误差, 而不确定度的定量描述与标准误差密切相关, 现在使用的函数计算器均有计算标准误差的功能, 运算也十分方便。

2. 有限次测量的平均值及标准误差

实验中不可能进行无限多次测量, 只能进行有限次测量。如果把无限多次测量结果称为总体, 有限次测量(无论是仅测一次或几次)得到的测量值, 都是从无限多次这个总体中抽出的一个或几个样本。概率统计理论就是专门研究样本和总体间的关系的。

(1) 算术平均值

在测量条件不变的条件下, 如果对待测量测了 n 次, 得到的 n 个测得值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 这 n 个测得值都带有偶然误差。由于真值 X 未知, 标准误差 σ 也无法计算。首先要解决的问题是从这 n 个测得值的数值中, 取怎样的值作为真值 X 的最佳估计值。

解决这个问题可用高斯提出的最小二乘法。这个准则是: 一个等精度测量列的最佳值就是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设 x_0 为这个值, 则上述准则的数学表达式为

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \text{最小值}$$

为了求 x_0 , 对 $f(x_0)$ 求导, 并令其等于零, 则有

$$\frac{df(x_0)}{dx_0} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) = 0$$

从而可以得到

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i) = \bar{x} \quad (6)$$

即, 一组数据的算术平均值的最佳估计值。所以用算术平均值来表示测量结果。

对于有限次测量, 会因算术平均值的不同而有所不同, 也会因不同测量组数据而略有差别。因而, 有限多次测量的算术平均值, 只能称为近似值或最佳值。当测量次数无限增加时, 算术平均值将无限地接近于真值。

(2) 标准偏差

无限多次测量的算术平均值最接近于真值, 因而样本总体的标准误差用标准偏差来表示。在实际估算时用偏差 $\Delta x = x - \bar{x}$ 计算每次测量误差, 与测量误差相区别。可以证明, 当有限次测量时, 其测量值的标准偏差为

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (7)$$

一般来说, 利用标准偏差来代替标准误差表示每一次测量值 x_i 的置信区间, 只要测量次数不是很少(如不少于 10 次), 其置信概率在 68.3% 左右。

根据误差理论可以证明, 样本平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差是单次测量值标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 倍, 即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

即, 如果以算术平均值表示测量结果, 其不确定度比单次测量的不确定度小 $\sqrt{n}$ 倍。

利用函数计算器的统计运算模式(STAT 功能), 只要把各测量值输入计算器, 直接就可以得到平均值 $\bar{x}$, 标准偏差 σ_{n-1} 和标准误差 σ 。

3. 间接测量结果的误差估算

由于间接测量值都是通过一定函数式代入各直接测量值计算得到的, 而直接测量值都存在误差, 所以计算出来的间接测量值也必然出现误差, 这就是误差传递。由直接测量误差计算间接测量误差的数学公式为误差传递公式。

(1) 从一个直接测量结果(即测量值和误差)计算间接结果的误差

设直接测量结果为 $x \pm \sigma_x$, 间接测得量为 y , 由函数关系 $y = f(x)$ 计算结果, x 量有误差 σ_x , 必然引起 y 量有误差 σ_y 。由于 σ_x 和 σ_y 相对于 x 和 y 都是很小的量, 故 σ_x 和 σ_y 之间关系可用求函数 $f(x)$ 的导数联系起来, 即

$$\sigma_y \approx f'(x) \sigma_x \quad (9)$$

式(9)就是误差传递公式。

例 1 一个钢球的体积 V 可以通过测量钢球直径 d 求得, 若测得钢球的直径结果为 $d = 5.89\text{mm} \pm 0.04\text{mm}$, 求钢球的体积 V 及误差 σ_V 。

解: 钢球的体积

$$V = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{(5.89)^3 \pi}{6} = 107.0\text{mm}^3$$

体积 V 的导数为 $V' = \pi d^2/2$, 则体积的误差为

$$\sigma_V = \frac{\pi}{2} d^2 \sigma_d = \frac{\pi}{2} \times (5.89)^2 \times 0.04 = 2.2 \approx 3 \text{ mm}^3$$

所以, 体积的测量结果

$$V = (107 \pm 3) \text{ mm}^3 (\text{置信概率 } P = 68.3\%)$$

体积的相对误差 $E_V = \sigma_V / V = 3\sigma_d / d = 2.04\% \approx 2.1\%$, 这种关系可推广到一个间接测量结果是由一个直接测量结果的幂函数关系。即间接测量结果的相对误差是直接测量结果的相对误差的 n 倍。

(2) 由两个以上直接测量结果算出间接测量结果误差的估算

设某个量 N 是由几个独立的直接测量结果 $(x \pm \sigma_x)$, $(y \pm \sigma_y)$, $(z \pm \sigma_z)$, ... 计算出来的, 即

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

可以分别计算由直接测量结果的误差引起的间接测量结果的误差。

单考虑 x 的误差 σ_x 的影响有

$$(\sigma_N)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \sigma_x$$

符号 $\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)$ 代表函数 $f(x, y, z, \dots)$ 对 x 求的偏导数。其他量 $y, z, \dots$ 都暂时看作常量, 再求函数 x 的导数。

单考虑 y 的误差 σ_y 的影响, 有一些因素, 如

$$(\sigma_N)_y = \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \sigma_y$$

对于函数的标准误差, 从误差理论上可以证明, 把它们综合起来用几何合成办法求函数的标准误差(置信概率仍保持 68.3%), 则函数的标准差为

$$(\sigma_N) = \sqrt{(\sigma_N)_x^2 + (\sigma_N)_y^2 + (\sigma_N)_z^2 + \dots} \quad (10)$$

函数的相对误差

$$E_N = \frac{(\sigma_N)}{N} = \sqrt{\left(\frac{(\sigma_N)_x}{N} \right)^2 + \left(\frac{(\sigma_N)_y}{N} \right)^2 + \left(\frac{(\sigma_N)_z}{N} \right)^2 + \dots} \quad (11)$$

简单常用函数的标准误差传递公式如表 1。

表 1

常用的函数的标准误差的传递公式

函数表达式	标准误差传递公式
$N = x \pm y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = x \cdot y, N = \frac{x}{y}$	$E_N = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
$N = Kx$	$\sigma_N = K\sigma_x, E_N = E_x$
$N = x^K$	$E_N = KE_x$
$N = \sin x$	$\sigma_N = \cos x \sigma_x$
$N = \ln x$	$\sigma_N = \frac{\sigma_x}{x}$

例 2 用流体静力法测固体密度公式 $\rho = \frac{m}{m - m_1} \rho_0$ 。直接测得 $m = (27.06 \pm 0.02) \text{ g}$, $m_1 = (17.03 \pm 0.02) \text{ g}$, $\rho_0 = (0.9997 \pm 0.0003) \text{ g/cm}^3$, 都是以标准误差表示置信区间。试求