高等学校教材

Advanced Algebra

高等代数 第二版

杨子胥 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 代 数

第二版

杨子胥　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书注重基础，强调基本的概念、知识、理论和方法之间的内在联系，突出高等代数的思想方法。较同类教材有所不同，主要体现于：在内容安排上按照先易后难、由浅入深的思路，先讲授行列式后讲多项式；关于消元法的介绍，采取先强化方法后总结理论的做法。全书内容翔实易懂，易教易学。

本次修订，删去了原第一章"基本概念"和第十二章"群、环、域初步"，将原附录一作为正文归入"欧氏空间"一章，将原附录二"λ－矩阵"作为正文单独成章。

本书可作为普通高等学校数学类各专业的高等代数课程教材，也可供相关教师和学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数／杨子胥编著．—2版．—北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978－7－04－021943－2

Ⅰ．高…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．高等代数－高等学校－教材　Ⅳ．O15

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第075978号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京奥鑫印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1990年4月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2007年7月第2版
印　　张	13	印　　次	2007年7月第1次印刷
字　　数	330 000	定　　价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　21943－00

前　　言

任何一门课程的内容都不是固定不变的。但是，在一般情况下，任何一门课程的内容又都是相对稳定的。高等代数是高等院校数学系的重要基础课之一，它的内容也是这样，既不是固定不变的，又是相对稳定的。就目前来说，高等代数的内容大体包括以下三个方面：

一、以讨论线性方程组的解为主线的行列式、矩阵和一般线性方程组的理论；

二、多项式理论，其中包括以多项式的因式分解为中心的任意数域和特殊数域上一元多项式的理论、多元多项式中对称多项式的理论以及二次型的理论。所谓二次型，就是各项都是二次的一种特殊的多元多项式。但其内容实质上是讨论对称方阵合同的理论，属于线性代数。因此，把它放在行列式、矩阵、线性方程组和多项式之后来讲是恰当的；

三、线性空间和线性变换的理论，其中包括欧氏空间和 λ - 矩阵的理论。其中心内容是，以线性空间为媒介讨论线性变换特别是矩阵相似的理论。

上述前两部分先讲哪一部分并无原则差异。但从教学实践看多项式部分并不比行列式等部分容易，又考虑到高等代数的主要内容是线性代数，因此先讲线性代数初步中的行列式、矩阵和线性方程组是适宜的。

线性方程组、二次型和线性变换的核心是矩阵，因此，以上三方面内容又可粗略地进一步归纳为多项式和矩阵的理论。而且这些理论都直接或间接地涉及多项式和矩阵的基本运算，即多项式、矩阵的加、减、乘以及在一定意义下的除法运算。因此，学习高等代数应掌握好这些基本运算及其性质。

学习高等代数还应十分注意基本概念、基本知识、基本理论和基本方法，而且要注意它们之间的内在联系。例如，矩阵的秩、向量组的秩以及矩阵的行秩和列秩之间的联系，n 元向量的线性相关性与线性方程组的解、基础解系和线性空间的联系以及线性空间、线性变换和矩阵之间的联系，等等。通过对这些内容和它们之间相互联系的真正掌握，必将使我们感到这些内容、理论和方法是浑然一体、协调自然的。

高等代数有一个非常重要的思想方法，那就是等价分类并从每个等价类中确定和寻找恰当代表元的方法。例如求矩阵的秩、解线性方程组、求二次型以及矩阵和 λ - 矩阵在各种不同分类中的标准形问题，等等，都属于这种情况。当然，从根本上说这种思想方法不仅在代数，而且在别的数学甚至在任何科学领域都是常常涉及的方法。但是，它在高等代数中的这一特点尤为突出，而且从总体上说，基本上贯彻整个内容的始终，占主导地位，是非常重要的。因此，只要我们认真注意这些特点和方法，我们就能很好地学好高等代数。

另外，本书中的习题解答除后面有“习题提示与答案”外，都包括在作者即将出版的高等代数精选题解中。

杨子胥

2007.1

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 行 列 式

在初等代数里，曾经介绍过二阶、三阶和四阶行列式，并利用它们讨论了二元、三元和四元一次方程组，即线性方程组. 在高等代数里，我们要把这些讨论推广到一般情形，就是说，要把这些特殊的二、三、四阶行列式推广到一般的 n 阶行列式，然后利用 n 阶行列式，如像初等代数那样，来讨论一般的 n 元线性方程组.

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算以及它在线性方程组求解中的应用.

§1 n 元排列

为了介绍什么是 n 阶行列式，我们需要 n 元排列的概念和简单性质.

以 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 为元素的无重复的全排列，简称为 n 元排列.

n 元排列共有 $n!$ 个. 例如，三元排列共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

定义 1 在一个 n 元排列中，如果有一个较大的数码排在一

个较小的数码的前面，则称这两个数码在这个排列中构成一个反序.

一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有反序的总和，称为这个排列的反序数，记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如，在排列 231 中，2 与 1 以及 3 与 1 都构成反序，但 2 与 3 不构成反序，故其反序数是 2；在排列 321 中任意两个数码都构成反序，故其反序数是 3；又排列 123 没有反序，即其反序数是零. 因此

$$\tau(231)=2,\ \tau(321)=3,\ \tau(123)=0.$$

为了不重不漏地计算一个排列的反序数，可以采用以下的方法：

先数一下所给排列中 1 前面的数码个数（显然，这些数码都与 1 构成反序，而 1 后面的任何数码与 1 都不能构成反序），设为 m_1；划去 1 后，再数一下 2 前面的数码个数，设为 m_2；划去 2 后，再数一下 3 前面的数码个数，设为 m_3；如此下去. 则这个排列的反序数便是

$$m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

例如在排列 341625 中，$m_1=2$，$m_2=3$，$m_3=m_4=0$，$m_5=1$，$m_6=0$，因此

$$\tau(341625)=2+3+0+0+1+0=6.$$

显然，一个 n 元排列的反序数不是一个奇数，便是一个偶数.

定义 2 如果一个 n 元排列的反序数是一个奇数，则称该排列为奇排列；否则称该排列为偶排列.

例如在所有三元排列中，132，213，321 是奇排列，而 123，231，312 是偶排列，即它的奇、偶排列各占一半. 我们将很快看到，这种现象并非偶然.

在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果交换某两个数码的位置，而别的数码不动，则称对这个排列施行了一个对换. 如果交换的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

两个数码是 i 与 j，就把这个对换记成(i,j). 例如

$$341625 \xrightarrow{(1,5)} 345621,$$

即对排列 341625 施行一个对换$(1,5)$后，得到了一个新排列 345621. 经计算可知这两个排列的奇偶性相反. 对此，下面有更一般的结论.

定理 1 每经过一次对换，都改变排列的奇偶性.

证 1）特殊情形. 设要对换的两个数码 i 与 j 相邻，即

$$\overbrace{\cdots}^{A} ij \overbrace{\cdots}^{B} \xrightarrow{(i,j)} \overbrace{\cdots}^{A} ji \overbrace{\cdots}^{B}$$

易知，A 中数码、B 中数码、A 中数码与 B 中数码以及 i，j 与 A 或 B 中的数码，在新旧两个排列中的反序不变，即原来构成反序的，在新排列中仍构成反序；原来不构成反序的，在新排列中仍不构成反序. 但是，当 $i<j$ 时，i 与 j 在原排列中不构成反序，而在新排列中却构成一个反序，即在新排列中增加了一个反序. 同理，当 $i>j$ 时，新排列比原排列又少了一个反序.

不管哪种情形，此时新旧二排列的奇偶性相反.

2）一般情形. 设

$$\overbrace{\cdots}^{A} ik_1k_2\cdots k_sj \overbrace{\cdots}^{B} \xrightarrow{(i,j)} \overbrace{\cdots}^{A} jk_1k_2\cdots k_si \overbrace{\cdots}^{B}$$

现在将原排列中的 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 交换，接着将 j 依次与 $k_3,\cdots,k_2,k_1$ 交换，这样共对原排列施行了 $2s+1$ 次相邻数码的对换，便得到了右边的新排列. 由 1)知，对相邻数码每施行一次对换都改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 是一个奇数，故上面所说的两个新旧排列的奇偶性相反.

〈证毕〉

由定理 1 立即可得

定理 2 当 $n\geqslant 2$ 时，在 $n!$ 个 n 元排列中，奇偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个.

证 由于 $n \geqslant 2$，故由定理1知，在 n 元排列中总有奇排列和偶排列，设有 s 个奇排列和 t 个偶排列.

现在对 s 个奇排列中的每一个，将前两个数码对换，由定理1，这 s 个互不相同的奇排列一定会变成 s 个互不相同的偶排列. 但是共有 t 个偶排列，因此，$s \leqslant t$.

同理，$t \leqslant s$，故 $s = t$.

又由于 $s + t = n!$，故 $s = t = \dfrac{n!}{2}$.

〈证毕〉

习 题 1.1

1. 计算下面各排列的反序数：

1）3714265；　　2）81726354；

3）$n, n-1, \cdots, 2, 1$；　　4）$2k, 1, 2k-1, 2, \cdots, k+1, k$.

2. 选择 i 与 j，使九元排列 $27i619j54$ 是一个偶排列.

3. 首位是 3 的五元排列中有多少个奇排列和偶排列？为什么？

4. 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 元排列，且 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = k$，求

$$\tau(j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1) = ?$$

5. 将排列 31524 施行一些对换，使之变成 12345.

§2 n 阶行列式定义

先来考察二、三阶行列式的共同规律.

我们知道，二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

它具有以下两个性质：

1）共有 $2! = 2$ 项；每项都是两个元素相乘，这两个元素既

位于不同的行又位于不同的列；

2）每项中两个元素按所在行的自然顺序排列后，其所在列的序数构成的排列分别为 12 和 21，即

$$a_{11}a_{22}\to 12, \quad a_{12}a_{21}\to 21.$$

而 12 和 21 正是全体二元排列.

称 12 和 21 分别为项 $a_{11}a_{22}$ 和项 $a_{12}a_{21}$ 的列排列. 12 是偶排列，项 $a_{11}a_{22}$ 在二阶行列式中取正号；21 是奇排列，项 $a_{12}a_{21}$ 在二阶行列式中取负号.

于是二阶行列式可表示成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对全体二元排列求和.

下面再看三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它类似于二阶行列式，具有以下两个性质：

1）共有 $3! = 6$ 项；每项都是三个元素相乘，这三个元素既位于不同的行又位于不同的列；

2）每项中三个元素按所在行的自然顺序排定后，其所对应的列排列为偶排列时该项取正号，为奇排列时该项取负号.

于是三阶行列式可表示成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 是对所有三元排列求和.

以上所归纳的两条性质，正是二、三阶行列式的本质所在.据此，我们来定义一般的 n 阶行列式.

定义 称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为一个n 阶行列式，它表示：

1) $n!$项的代数和；每项中都有 n 个元素相乘，这 n 个元素既位于 D 中不同的行又位于不同的列(横的称行竖的称列)；

2) 每项中的 n 个元素按所在行的自然顺序排定后，其列排列为偶排列时该项取正号，为奇排列时该项取负号.

n 阶行列式用式子表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有的 n 元排列求和.

上面所说的 n 阶行列式中的 n，是任意的正整数. 当 $n=2$, 3, 4 时，就是中学已经学过的二、三、四阶行列式；当 $n=1$ 时，即一阶行列式：$|a_{11}|=a_{11}$. 这正与绝对值的符号相混淆. 不过这种极特殊的情况，今后很少考虑.

例 1 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

问：$a_{13}a_{21}a_{42}$，$a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$是不是四阶行列式 D_1 的项？如果是，应取何符号？

解　$a_{13}a_{21}a_{42}$与 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$都不是 D_1 的项，因为前者只有三个元素相乘，后者虽是四个元素相乘，但 a_{12} 与 a_{32} 却位于 D_1 中同一列；

$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$是 D_1 的一项，它的列排列 4123 是一个奇排列，因此，该项应取负号；

$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$也是 D_1 的一项．由于

$$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}=a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},$$

而 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$的列排列 2341 是奇排列，故该项应取负号．

例 2　设

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ g & h & p & q \\ s & t & u & v \\ w & x & y & z \end{vmatrix}.$$

问：1）$dhsy$ 与 $ptaz$ 是否为 D_2 的项？应取何符号？

2）在 D_2 中包含 t 的项有多少？

解　1）易知 $dhsy$ 与 $ptaz$ 都是 D_2 的项，前者的四个因子所在的行已是自然顺序，而其列排列为 4213，又$\tau(4213)=4$，故该项取正号．

又因为 $ptaz=aptz$，而 $aptz$ 的列排列是 1324，$\tau(1324)=1$，故项 $aptz$ 即项 $ptaz$ 应取负号．

2）由于在 D_2 的 $4!$项中，每项的行排列固定为自然顺序后，将含 t 的第二列也固定，而其余三个元素只能在第一、三、四列中任意取元素，故共有$3!=6$ 种取法，因此，D_2 中含 t 的项共有 6 项．

应该注意，在一个行列式中，通常所写的元素本身不一定有下标，即使有下标，其下标也不一定与这个元素本身所在的行与列的序数完全一致．因此，要确定某一项的符号，

一定要按照各元素所在行列式中实际所在的行与列的序数来计算.

但是在一般情况下，未加声明时，都把 n 阶行列式第 i 行与第 j 列交叉位置上的元素认为是 a_{ij}.

定理 1 以下两个行列式分别称为上、下三角行列式，它们都等于对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 只证左边的行列式，对于右边的行列式是类似的.

根据行列式的定义，n 阶行列式的每一项中都是 n 个元素相乘，这 n 个元素必须位于不同的行与不同的列，即每行及每列中能而且只能取一个元素，因此，为使该项不为零，第 1 列中只能取 a_{11}，于是第 2 列中只能取 a_{22}，…，在第 n 列中只能取 a_{nn}，即得 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 这个乘积为该行列式的非零项，且显然取正号，别的项全是零. 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

〈证毕〉

定理 2 在 n 阶行列式 D 中，项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 应取符号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

证 首先说明，当交换项

$$a_{i_1j_1}\cdots a_{i_sj_s}\cdots a_{i_tj_t}\cdots a_{i_nj_n} \qquad (1)$$

中任意两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$ 的位置得

$$a_{i_1j_1}\cdots a_{i_tj_t}\cdots a_{i_sj_s}\cdots a_{i_nj_n} \qquad (2)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com