



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等代数

张禾瑞  
郝炳新 编

第五版

18世纪，高斯在他的博士论文中公布了代数基本定理的第一个严格性证明。这个定理断言， $n$ 次代数方程恰有  $n$  个根。它最早由荷兰数学家吉拉德提出，欧拉、拉格朗日等都先后论述，均未给出证明。高斯的证明另辟蹊径，他将多项式方程的根与复平面上的点对应起来……



高等教育出版社

015/6=5

2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等代数

第五版

张禾瑞 郝炳新 编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是在第四版的基础上作了一些修订,主要在第九章增加了双线性函数一节。第一章介绍代数中最基本的概念;第二章至第九章是多项式理论初步和线性代数基础这两部分,这是高等代数的中心内容;第十章对群、环、域作了简单的介绍;作为附录,从向量空间的分解的角度讲述矩阵的若尔当标准形式。

本书可作为高等学校数学院系本科生教材,也可供理工科教师和学生参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等代数/张禾瑞,郝炳新编.—5版.—北京:高等教育出版社,2007.6

ISBN 978-7-04-021465-9

I. 高… II. ①张…②郝… III. 高等代数-高等学校-教材 IV. O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第056181号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张长虹	封面设计	张申申
责任绘图	郝林	版式设计	王艳红	责任校对	金辉
责任印制	韩刚				

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印刷	廊坊市科通印业有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开本	850×1168 1/32	版次	1957年12月第1版
印张	14.125		2007年6月第5版
印字	数 360 000	印次	2007年6月第1次印刷
		定价	19.50元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。  
版权所有 侵权必究  
物料号 21465-00

## 第三版序

本书第二版是作为师范学院试用教材编写的。1983年教育部颁发了师范专科学校《高等代数教学大纲》。为了使师范专科学校也能采用本书，我们又作了这次修订。

与第二版比较，主要作了以下修改：

1. 第一章去掉了复数的内容，增加了整数的一些整除性质一节。
2. 第二章增加了多元多项式和对称多项式两节。
3. 第四章增加了结式和判别式一节。
4. 增加了群、环和域简介一章。

此外，对于第二版的某些章节也作了改写。对某些难度较大的习题补充了一些提示，并且增加了一些较简单的习题。

由于师范学院和师范专科学校的教学大纲不尽相同，在采用本书作为教材时，根据大纲的要求，对于其中某些内容可以不讲。另外，如果认为先讲某些章节是适宜的话（例如，先讲行列式和线性方程组，后讲多项式），也可以重新安排讲授次序。习题可针对学生情况，酌量选留。

参加本书审稿会的同志们认真地审阅了本书的原稿，并且提出了宝贵的意见，谨向他们表示谢意。我们也深深地感谢对本书第二版提出意见的读者，有些意见已在这次修订中被采纳。

这次的修订版一定还有错误和不足之处，希望读者继续提出批评指正。

编者

1983年7月于北京师范大学

## 第四版序

本书的第一编者，我的业师张禾瑞先生已于1995年作古，因此修订工作不得不由我来承担。在此谨对先师表示深切的怀念。

第四版改写了第三版中一些章节，主要是7.6，8.4，9.1，9.2和9.3，使之更易被接受。在第八章后面增加了两节，介绍酉空间。另外，对某些章节作了一些文字上的修改；对个别名词根据全国自然科学名词审定委员会公布的数学名词做了订正。

第三版问世已十多年了。在此期间，很多读者曾对本书提出过不少意见和建议，这些意见和建议对本书的修订工作是有帮助的，谨向他们表示感谢。特别要感谢四川师范学院的薛育海教授。他在多次讲授本书的过程中，结合教学实践提出不少中肯的意见，这些意见在此次修订中很多已被采纳。例如，7.6就是根据他的建议改写的。

希望读者指正。

郝钊新

1997年9月

于北京师范大学

## 第五版序

第五版是在第四版的基础上，作了不太大的修订。主要是在第九章增加了双线性函数一节(9.5)；对个别章节和个别符号作了一些修改。

本书第一版于1957年问世，距今已近半个世纪了。新中国成立之前，我国没有自己编写的高等代数教材。1954年，教育部颁布了师范学院高等代数教学大纲，并且委托本书第一编者负责编写高等代数教材。根据教学大纲，在教学实践的基础上，由本书编者编写出本书的第一版。这是我国第一本由国人编写的高等代数教材。

高等代数作为教学科目，按照现时的理解，主要包括以下两部分内容：多项式理论初步和线性代数基础。多项式和方程一直是代数学发展中的主旋律；线性代数则是应用极为广泛的一门基础学科。

20世纪70年代后期，对本书进行了重大的改写。充实了线性代数的内容，使之更适应现代化的要求，于1979年出版了本书的第二版。

1982年，在云南昆明召开了全国师范专科学校几何及代数教学大纲讨论会。制定了师范专科学校高等代数教学大纲，并且委托编者参照这份大纲，对第二版作出修订，使之能适合师专的教学要求。1983年出版了第三版。

关于矩阵的标准形式问题，教学大纲中并没有要求。一些同类书籍多是通过 $\lambda$ -矩阵来建立矩阵的若尔当标准形式。在本书中，作为附录，试图从向量空间分解的角度来建立矩阵的若尔当

标准形式。可供读者参考。

第四版和这一次的修订都是在第三版的基础上进行的。基本框架和内容并没有多大改变。

在本书的编写过程中，先师张禾瑞教授付出了极大心血。他的高深的见解，丰富的学识和严谨的学风，是本书质量的根本保证。

谨对曾经使用过本书的同行和对本书提出过宝贵意见的读者表示衷心的感谢。

郝钊新

2007年3月

于北京师范大学

# 目 录

<b>第一章 基本概念</b> .....	1
1.1 集合 .....	1
1.2 映射 .....	7
1.3 数学归纳法 .....	15
1.4 整数的一些整除性质 .....	18
1.5 数环和数域 .....	23
<b>第二章 多项式</b> .....	26
2.1 一元多项式的定义和运算 .....	26
2.2 多项式的整除性 .....	31
2.3 多项式的最大公因式 .....	38
2.4 多项式的分解 .....	49
2.5 重因式 .....	56
2.6 多项式函数 多项式的根 .....	59
2.7 复数和实数域上多项式 .....	66
2.8 有理数域上多项式 .....	71
2.9 多元多项式 .....	80
2.10 对称多项式 .....	91
<b>第三章 行列式</b> .....	100
3.1 线性方程组和行列式 .....	100
3.2 排列 .....	103
3.3 $n$ 阶行列式 .....	107
3.4 子式和代数余子式 行列式的依行依列展开 .....	120
3.5 克拉默规则 .....	133
<b>第四章 线性方程组</b> .....	138
4.1 消元法 .....	138



4.2	矩阵的秩 线性方程组可解的判别法	150
4.3	线性方程组的公式解	157
4.4	结式和判别式	165
<b>第五章</b>	<b>矩阵</b>	<b>177</b>
5.1	矩阵的运算	177
5.2	可逆矩阵 矩阵乘积的行列式	187
5.3	矩阵的分块	200
<b>第六章</b>	<b>向量空间</b>	<b>211</b>
6.1	定义和例子	211
6.2	子空间	216
6.3	向量的线性相关性	219
6.4	基和维数	228
6.5	坐标	236
6.6	向量空间的同构	244
6.7	矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间	247
<b>第七章</b>	<b>线性变换</b>	<b>255</b>
7.1	线性映射	255
7.2	线性变换的运算	261
7.3	线性变换和矩阵	266
7.4	不变子空间	275
7.5	本征值和本征向量	278
7.6	可以对角化的矩阵	287
<b>第八章</b>	<b>欧氏空间和酉空间</b>	<b>298</b>
8.1	向量的内积	298
8.2	正交基	307
8.3	正交变换	323
8.4	对称变换和对称矩阵	332
8.5	酉空间	340
8.6	酉变换和对称变换	343
<b>第九章</b>	<b>二次型</b>	<b>346</b>
9.1	二次型和对称矩阵	346

9.2	复数域和实数域上的二次型 .....	356
9.3	正定二次型 .....	364
9.4	主轴问题 .....	371
9.5	双线性函数 .....	373
<b>第十章</b>	<b>群, 环和域简介 .....</b>	<b>380</b>
10.1	群 .....	380
10.2	剩余类加群 .....	392
10.3	环和域 .....	396
<b>附录</b>	<b>向量空间的分解和矩阵的若尔当标准形式 .....</b>	<b>407</b>
§ 1	向量空间的准素分解 凯莱 - 哈密顿定理 .....	407
§ 2	线性变换的若尔当分解 .....	416
§ 3	幂零矩阵的标准形式 .....	420
§ 4	若尔当标准形式 .....	428
<b>索引</b>	<b>.....</b>	<b>434</b>

# 第一章

## 基本概念

作为大学数学基础课程的代数，是中学代数的继续和提高。

在学习这门课程时将会发现，它与中学代数有很大的不同。这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上。

在这个课程里将体现由具体事物抽象出一般概念，再从一般概念回到具体事物去的这种辩证观点和严格的逻辑推理方法。这一点在学习过程中将逐渐体会。

作为开始，我们先介绍一些最基本的概念和方法。这些概念和方法对于今后的学习是必要的。

### 1.1 集 合

我们先从一个最简单的概念开始。

在日常生活中，常常谈论一组事物。例如，一班同学，一队士兵，一组正整数，一筐苹果等等。这里，“一班”，“一队”，“一组”，“一筐”等都表示一定事物的集体。我们称它们为集合或集。组成集合的东西叫作这个集合的元素。

我们常用大写拉丁字母  $A, B, C, \dots$  表示集合，用小写拉丁字母  $a, b, c, \dots$  表示元素。

如果  $a$  是集合  $A$  的元素，就说  $a$  属于  $A$ ，记作  $a \in A$ ；或者

说  $A$  包含  $a$ , 记作  $A \ni a$ .

如果  $a$  不是集合  $A$  的元素, 就说  $a$  不属于  $A$ , 记作  $a \notin A$ , 或者说  $A$  不包含  $a$ , 记作  $A \not\ni a$ .

例如, 设  $A$  是一切偶数所成的集合. 那么  $4 \in A$ , 而  $3 \notin A$ .

一个集合可能只含有有限多个元素, 这样的集合叫作有限集合. 例如, 前十个正整数的集合; 一个学校里全体学生的集合; 一本书里所有汉字的集合等等都是有限集合. 如果一个集合是由无限多个元素组成的, 就叫作无限集合. 例如, 全体正整数的集合; 全体实数的集合; 小于 1 的全体正有理数的集合等等都是无限集合.

我们把一个含有  $n$  个元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的有限集合记作  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

例如, 前五个正整数的集合就记作  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

一个集合当然可以只含有一个元素. 例如, 一切偶素数的集合就只含有一个元素 2. 只含有一个元素  $a$  的集合, 用上面的记法, 就记作  $\{a\}$ .

设  $A, B$  是两个集合. 如果  $A$  的每一元素都是  $B$  的元素, 那么就记作  $A \subseteq B$  (读作  $A$  属于  $B$ ), 或记作  $B \supseteq A$  (读作  $B$  包含  $A$ ). 根据这个定义,  $A$  是  $B$  的子集当且仅当对于每一元素  $x$ , 如果  $x \in A$ , 就有  $x \in B$ .

例如, 一切整数的集合是一切有理数的集合的子集, 而后者又是一切实数的集合的子集.

我们现在引入几个记号.

用  $(\dots) \implies (\dots)$  表示“如果  $(\dots)$ , 则  $(\dots)$ ”. 例如, “如果  $x \in A$ , 则  $x \in B$ ”就记作  $x \in A \implies x \in B$ .

用符号  $(\dots) \iff (\dots)$  表示“ $(\dots)$ 当且仅当  $(\dots)$ ”.

因此, “ $A$  是  $B$  的子集”就可以表示为

$$(A \subseteq B) \iff (\text{对一切 } x; x \in A \implies x \in B).$$

如果  $A$  不是  $B$  的子集, 就记作  $A \not\subseteq B$  或  $B \not\supseteq A$ . 因此,  $A$  不是

$B$  的子集当且仅当  $A$  中至少有一个元素不属于  $B$ . 即

$$(A \not\subseteq B) \iff (\text{存在一个元素 } x, x \in A \text{ 但 } x \notin B).$$

例如, 一切可以被 3 整除的整数所成的集合, 不是一切偶数所成的集合的子集, 因为 3 属于前者但不属于后者. 集合  $\{1, 2, 3\}$  不是  $\{2, 3, 4, 5\}$  的子集.

根据定义, 一个集合  $A$  总是它自己的子集. 即

$$A \subseteq A.$$

如果集合  $A$  与  $B$  是由完全相同的元素组成的, 就说  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ . 我们有

$$(A = B) \iff (\text{对一切 } x: x \in A \iff x \in B).$$

例如, 设  $A = \{1, 2\}$ ,  $B$  是二次方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的根的集合, 则  $A = B$ .

下列事实是明显的:

$$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq C) \implies (A \subseteq C).$$

$$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A) \iff (A = B).$$

现在设  $A, B$  是两个集合. 由  $A$  的一切元素和  $B$  的一切元素所成的集合叫作  $A$  与  $B$  的并集(简称并), 记作  $A \cup B$ .

例如,  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ , 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

又例如,  $A$  是一切有理数的集合,  $B$  是一切无理数的集合, 则  $A \cup B$  是一切实数的集合. 显然  $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ .

根据定义, 我们有

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ 或 } x \in B).$$

$$(x \notin A \cup B) \iff (x \notin A \text{ 且 } x \notin B).$$

由集合  $A$  与  $B$  的公共元素所组成的集合叫作  $A$  与  $B$  的交集(简称交), 记作  $A \cap B$ . 显然,  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ .

例如  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ , 则

$$A \cap B = \{2, 3, 4\}.$$

我们有

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ 且 } x \in B).$$

$$(x \notin A \cap B) \iff (x \notin A \text{ 或 } x \notin B).$$

$A$  与  $B$  的并和交可以由下面的图来示意, 图 1.1 的阴影部分表示  $A \cup B$ , 图 1.2 的阴影部分表示  $A \cap B$ .

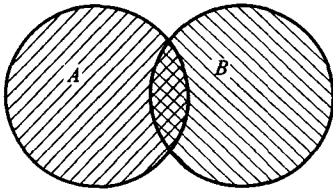


图 1.1

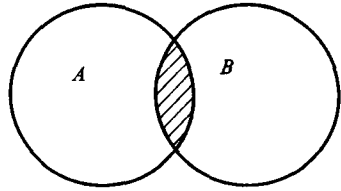


图 1.2

两个集合  $A$  与  $B$  自然不一定有公共元素. 为了叙述方便, 这时就说它们的交是空集. 不含任何元素的集合叫作空集.

例如, 设  $A$  是一切有理数的集合,  $B$  是一切无理数的集合. 那么  $A \cap B$  是空集. 又如, 方程  $x^2 + 1 = 0$  的实根的集合是一个空集.

我们用符号  $\emptyset$  表示空集, 并且约定空集是任意集合的子集.

**例 1** 我们证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

设  $x \in A \cap (B \cup C)$ . 那么  $x \in A$  且  $x \in B \cup C$ , 于是  $x \in A$  且  $x$  至少属于  $B$  与  $C$  中之一. 若  $x \in B$ , 那么因为  $x \in A$ , 所以  $x \in A \cap B$ ; 同样若  $x \in C$ , 则  $x \in A \cap C$ . 不论哪一种情形都有  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . 所以

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之, 若  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , 那么  $x \in A \cap B$  或者  $x \in A \cap C$ . 但  $B \subseteq B \cup C, C \subseteq B \cup C$ , 所以不论哪一种情形都有  $x \in A \cap (B \cup C)$ , 所以

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

这就证明了上述等式.

两个集的并与交的概念可以推广到任意  $n$  个集合上去. 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是给定的集合. 由  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的一切元素所成的集合叫作  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并; 由  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的一切公共元素所成的集合叫作  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并和交分别记作  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  和  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ . 我们有

$$(x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \iff (x \text{ 至少属于某一 } A_i, i=1, 2, \dots, n).$$

$$(x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \iff (x \text{ 属于每一 } A_i, i=1, 2, \dots, n).$$

由于以下几种数集经常被用到, 所以习惯上用一些特定的字母来表示. 我们约定:

**Z** 表示全体整数的集合.

**Q** 表示全体有理数的集合.

**R** 表示全体实数的集合.

**C** 表示全体复数的集合.

如果一个集  $A$  是由一切具有某一性质的元素所组成的, 那么就用记号

$$A = \{x \mid x \text{ 具有某一性质}\}$$

来表示. 例如,

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 < x < 1\}$$

就表示一切大于  $-1$  且小于  $1$  的实数所组成的集合.

给了两个集合  $A$  和  $B$ , 除了上面所定义的交集和并集以外, 我们有时还要用到两个概念.

设  $A, B$  是两个集合. 令

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

也就是说,  $A - B$  是由一切属于  $A$  但不属于  $B$  的元素所组成的. 称为  $A$  与  $B$  的差. 例如,  $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$  就是一切无理数所组成的集合.

应该注意的是, 在  $A - B$  的定义里, 并没有要求  $B$  是  $A$  的子集. 例如  $\mathbf{Q} - \mathbf{C} = \emptyset$ .

**例 2 德·摩根(De Morgan)律** 对于任意集合  $A, B, C$  来

说, 以下等式成立:

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B);$$

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B).$$

我们证明第一个等式. 第二个等式的证明留给读者.

设  $x \in C - (A \cap B)$ , 那么,  $x \in C$  但  $x \notin A \cap B$ .  $x \notin A \cap B$  意味着  $x \notin A$  或者  $x \notin B$ . 在前一情形,  $x \in C - A$ ; 在后一情形,  $x \in C - B$ . 不论哪一种情形, 都有  $x \in (C - A) \cup (C - B)$ . 反之, 设  $x \in (C - A) \cup (C - B)$ , 则  $x \in C - A$  或者  $x \in C - B$ . 在前一情形,  $x \in C$  但  $x \notin A$ ; 在后一情形,  $x \in C$  但  $x \notin B$ . 不论哪一种情形, 都有  $x \in C$  但  $x \notin A \cap B$ . 所以  $x \in C - (A \cap B)$ . 这就证明了第一个等式成立.

从例 1 和例 2 我们可以看到, 要证明两个集合  $A$  与  $B$  相等, 根据定义, 就是要证明  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ . 一般是取  $A$  中任意元素  $x$ , 根据所给的条件, 证明  $x \in B$ ; 反过来再取  $B$  中任意元素  $x$ , 证明它属于  $A$ .

最后介绍两个集合的积的概念.

设  $A, B$  是两个集合. 令

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

称为  $A$  与  $B$  的笛卡儿积(简称积).

$A \times B$  是由一切元素对  $(a, b)$  所成的集合, 其中第一个位置的元素  $a$  取自  $A$ , 第二个位置的元素  $b$  取自  $B$ .

两个集的积对我们来说并不是什么新的东西. 例如, 取定一个坐标系以后, 平面上的点的坐标是一对实数  $(x, y)$ . 平面上所有点的坐标的集合就是  $\mathbf{R}$  与  $\mathbf{R}$  的积:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

## 习 题

1. 设  $\mathbf{Z}$  是一切整数的集合,  $\mathbf{X}$  是一切不等于零的有理数的集合.  $\mathbf{Z}$  是



不是  $X$  的子集?

2. 设  $a$  是集  $A$  的一个元素. 记号  $\{a\}$  表示什么? 写法  $\{a\} \in A$  对不对?

3. 设  $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 \leq x \leq 1\}$ ;

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 < x < 2\}.$$

写出  $A \cap (B \cup C)$  和  $A \cup (B \cap C)$ .

4. 写出含有四个元素的集合  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  的一切子集.

5. 设  $A$  是含有  $n$  个元素的集合.  $A$  中含有  $k$  个元素的子集共有多少个?

6. 下列论断哪些是对的, 哪些是错的? 对于错的论断举出反例, 并且把错误的论断改正过来.

(i)  $x \in A \cup B$  且  $x \notin A \implies x \in B$ ;

(ii)  $x \in A$  或  $x \in B \implies x \in A \cap B$ ;

(iii)  $x \notin A \cap B \implies x \notin A$  且  $x \notin B$ ;

(iv)  $x \notin A \cup B \implies x \notin A$  且  $x \notin B$ .

7. 证明下列等式:

(i)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;

(ii)  $A \cap (A \cup B) = A$ ;

(iii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

8. 证明例 2 的第二个等式.

9. 证明:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C,$$

$$A - B = \Phi \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

## 1.2 映 射

在中学数学里, 已经学习过映射的概念. 映射是数学中最基本的概念之一. 在这一节里, 我们将讨论这个概念和它的一些简单性质.

**定义 1** 设  $A, B$  是两个非空集合.  $A$  到  $B$  的一个映射指的是一个对应法则, 通过这个法则, 对于集合  $A$  中每一元素  $x$ , 有集合  $B$  中一个唯一确定的元素  $y$  与它对应.