普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理类

# 线性代数

邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材



经济管理类

# 线性代数

邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

## 内 容 简 介

本书内容包括行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换等六章，附录为MATLAB使用简介等。本书由浅入深，叙述详尽，思路清晰，注重应用，可作为高等院校经济与管理、工科等类各专业线性代数课程的教材，也可供经管类考研学生或自学学生参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数．经济管理类/邱森编著．—武汉：武汉大学出版社，2007.7
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-307-05455-4

Ⅰ.线… Ⅱ.邱… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第025741号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:王　建　　版式设计:杜　枚

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北恒泰印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:26.375　字数:471千字　插页:1
版次：2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷
ISBN 978-7-307-05455-4/O·357　定价:31.00元

# 序　言

线性代数是经济管理学类专业的重要数学基础课程之一，它与微积分、常微分方程、概率统计等其他数学课程都有密切的联系. 随着科学技术、生产的迅速发展，越来越多的学科及实际问题都要用到线性代数的知识. 同样，在经济学中，许多重要问题的数学模型都是线性的，线性代数也成为研究和解释经济现象得心应手的工具和语言.

本书前五章（除带 * 号部分外）的内容涵盖了本课程所要求的全部教学内容，其中矩阵是线性代数最基本的工具，它将贯串于线性代数的各个方面，是线性代数的一条主线. 第六章（带 * 号）讲线性空间与线性变换，也属于线性代数的最基本的概念，它们将帮助我们从较高的观点来理解前五章的内容，从而得到深一层的认识.

编写本书的基本指导思想是：

1. 降低知识起点，加大教材使用弹性.

在引入一些抽象概念时，我们利用直观“模型”作载体，降低知识起点，化难为易，使学生易于理解，也易于利用这些载体进行理性思维，学会以简御难，我们也返璞归真，努力揭示其中原创性的数学思想，因为它们往往是简单而精彩，学生又易于接受的.

在内容设计上，我们关注了学生数学发展的不同需求，注意弹性. 在保证基础的前提下，为学生学习不同层次的内容提供了学习台阶，使学生在有限的时间内能学得更好，学到更多有用的本质性的知识. 本书中打有“*”号的章节是为对数学基础要求较高的专业或学生编写的，可以作为选学内容或学生自学用. 各章复习题也将适合于学生考研复习之用.

2. 展现知识的发生发展过程以及知识间的内在联系，揭示其数学本质.

我们采用围绕中心问题逐层展开的叙述方式，用非常具体的问题引出概念，在解决问题的过程中，又力求使学生知其所以然，了解每一步讨论的目的，定理、公式等的推导思路，以及每个概念和每个定理所处的地位和作用，了解知识的来龙去脉以及知识间的内在联系，通过理解，逐步领会代数学的

一些重要思想方法，逐步掌握本门课程的数学本质，从而提高数学素养.

3. 更加强调数学知识的背景与应用.

本书十分注意突出线性代数的应用背景，不仅在新的数学概念或方法引进时这样做，而且在各章末都编写了一节相关的“应用”，介绍经济学中一些典型的经济数学模型，较详细地讨论了把实际问题转化为数学模型的过程，指出转化工作的要点和解决方向，培养学生在经济现象中运用数学的直觉思维能力，这也为学生将来能正确理解当前经济文献作一定的数学铺垫.

在本书中，我们也注意了与信息技术的整合. 在附录中，介绍了“MATLAB”，以了解计算机在解决线性代数计算问题中的应用.

在教材编写和出版过程中，我们得到了武汉大学出版社的协助，在此深表谢意. 最后，对书中的不妥之处，我们也企盼同行、读者批评指正.

编　者

2007 年 5 月

# 目　录

# 第一章 行 列 式

在中学代数中，曾学习过用代入(或加减)消元法求二元线性方程组和三元线性方程组的解. 是否能用公式直接利用方程组的全部系数来求解呢? 为此，我们引入了行列式的概念. 它不仅能用于解决 $n$ 元线性方程组公式解问题，而且在线性代数的其他内容和数学的其他分支中都有广泛的应用.

这一章主要讨论下面三个问题：

1) 行列式概念的形成.

2) 行列式的基本性质和计算方法.

3) 利用行列式来解线性方程组.

## 1.1 二阶与三阶行列式

本节的目的是阐述行列式的来源. 它是从二元和三元线性方程组的公式解中引出来的. 故首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此线性方程组：以 $a_{22}$ 乘第 1 式各项，得

$$a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1; \tag{1.2}$$

再用 $a_{12}$ 乘第 2 式各项，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2; \tag{1.3}$$

然后由(1.2)减(1.3)并消去 $x_2$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得出

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理，在(1.1)中用 $a_{21}$ 乘第 1 式各项，再用 $a_{11}$ 乘第 2 式各项，然后相减，若

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则得出

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

故方程组(1.1)只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，其解就可以立即求得：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.4}$$

这就是二元线性方程组(1.1)的公式解.

但(1.4)式不易记忆，为此，我们引入二阶行列式的概念. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **叫做一个二阶行列式.**

利用二阶行列式，方程组(1.1)的解可以很有规律地写成

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}. \end{cases} \tag{1.6}$$

我们可以看出，(1.6)式中居分母位置的行列式都是 $D$，而且 $D$ 是由(1.1)式中未知量的系数按照原来的相对位置排成的，这样看，(1.6)式的分母一下子就记住了. 下面再来看分子. 我们可以看出 $x_1$ 解的分子就是把行列式 $D$ 中第1列的元素换成方程组(1.1)中的两个常数项 $b_1,b_2$；而 $x_2$ 解的分子则是用(1.1)式中常数项去换行列式 $D$ 中第2列元素而成的.

总之，当(1.1)式中未知量的系数所排成的行列式 $D\neq 0$ 时，(1.1)式的解立即可由(1.6)式算出.

**例 1.1** 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=13, \\ 5x_1-4x_2=-2. \end{cases}$$

**解** 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-3\times 5=-23\neq 0,$$

所以

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}13 & 3\\ -2 & -4\end{vmatrix}}{D}=\frac{13\times(-4)-3\times(-2)}{-23}=2,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 13\\ 5 & -2\end{vmatrix}}{D}=\frac{2\times(-2)-13\times 5}{-23}=3.$$

现在来看三元线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases} \tag{1.7}$$

同样,由消元法可得,当

$$\begin{aligned}D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0\end{aligned}$$

时,(1.7) 的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\ \qquad -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}),\\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3\\ \qquad -a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3),\\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}\\ \qquad -b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}).\end{cases} \tag{1.8}$$

同前面一样,为了方便记忆,我们引进三阶行列式的概念. 令

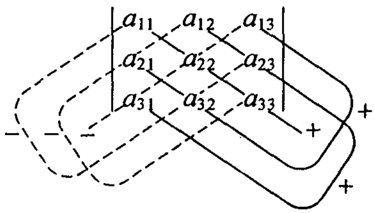
$$\begin{aligned}D=&\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},\end{aligned} \tag{1.9}$$

并称

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

为一个三阶行列式.

这个行列式含有三行、三列，是 6 个项的代数和. 这 6 个项，我们可用一个简单的规律来记忆，就是所谓三阶行列式的**对角线规则**：




即实线上三个元的乘积构成的三项都取正号，虚线上三个元的乘积构成的三项都取负号.

**例 1.2**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 -2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1$$
$$= 30+2-24-12+20-6 = 10.$$

**例 1.3** 展开行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**解** 按对角线规则展开，得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

有了三阶行列式后，(1.8) 式可以很有规律地表示为

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}. \end{aligned}\right. \tag{1.10}$$

上面三式右边居分母位置的三个行列式都是 $D$，它是线性方程组(1.7) 中的系数按原有相对位置而排成的三阶行列式，而在 $x_1,x_2,x_3$ 的表达式中的分子分别是把行列式 $D$ 中第 1,2,3 列换成常数项 $b_1,b_2,b_3$ 而得到的三阶行列式. 这与二元线性方程组的解有相同的规律. 不仅如此，以后我们还将看到：$n$ 元线性方程组的解也同样可以用"$n$ 阶行列式"来表达，其情况与二元、三元线性方程组解的表达式完全类似.

**例 1.4** 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1. \end{cases}$$

**解** 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

故有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{11}{8},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{9}{8},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{3}{4}.$$

我们的目的，是要把二阶和三阶行列式推广到 $n$ 阶行列式，然后利用 $n$ 阶行列式解 $n$ 元线性方程组. 为此，我们必须弄清二阶、三阶行列式的结构规律，才能推广得 $n$ 阶行列式.

无论二阶或三阶行列式，我们都可以看到，其行列式的展开式中，有的项取正号，有的项取负号. 那么，每一个项前面的符号按什么规则来确定呢？为了精确地叙述这一规则，必须引入排列的概念，它是下一节讨论的内容.

## 习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　　2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$；　　4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. 验证下列等式成立：

1) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$；

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$；

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$；

5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3. 利用行列式解下列方程组：

1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = a; \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = b; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-3x_2-4x_3=-10. \end{cases}$

## 1.2 排　列

本节介绍排列的一些基本概念，为定义 $n$ 阶行列式作准备.

在上节(1.9)式的展开式中，每项按第1个下标(称为行标)从小到大的顺序(即自然顺序)排列成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 后，第2个下标 $j_1,j_2,j_3$ 依次写下来为

$$1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2;\ 3,2,1;\ 2,1,3;\ 1,3,2.$$

这是三个数码1,2,3的所有排列. 一般地有下述定义：

**定义 1.1**　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的**有序数组**称为一个 $n$ **阶排列**.

例如：1,2,3;2,3,1 都是三阶排列. 4,1,5,3,6,2 是一个6阶排列.

实际上，这里所说的 $n$ 阶排列就是我们熟知的 $n$ 个不同元素的全排列. 因此 $n$ 阶排列共有

$$n! = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\text{个}.$$

$n!$读作 $n$ 阶乘. 例如：三阶排列共有 $3! = 3\times 2\times 1 = 6$ 个.

**例 1.5**　写出全部4阶排列.

**解**　4阶排列共有 $4! = 24$ 个，它们是

$$\begin{array}{llll}
1,2,3,4; & 2,1,3,4; & 3,1,2,4; & 4,1,2,3;\\
1,2,4,3; & 2,1,4,3; & 3,1,4,2; & 4,1,3,2;\\
1,3,2,4; & 2,3,1,4; & 3,2,1,4; & 4,2,1,3;\\
1,3,4,2; & 2,3,4,1; & 3,2,4,1; & 4,2,3,1;\\
1,4,2,3; & 2,4,1,3; & 3,4,1,2; & 4,3,1,2;\\
1,4,3,2; & 2,4,3,1; & 3,4,2,1; & 4,3,2,1.
\end{array}$$

在所有 $n!$个 $n$ 阶排列中 $1,2,3,\cdots,n$ 是唯一的一个按自然顺序构成的排列，称它为**标准排列**. 例如：1,2,3,4 是一个4阶标准排列. 而在其他的排列中，都可以找到一个较大的数排在较小的数前面. 例如：4阶排列

$$1,4,3,2$$

中，4排在3之前，4也排在2之前. 3排在2之前. 这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序)，一般定义如下：

**定义 1.2**　在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于后面的数，则称它们构成一个**反序**(或**逆序**). 一个排列中全部反序的个数称为这个**排列的反序数**.

反之，在一个排列中，如果一个较小的数排在一个较大数之前，称这两个数构成一个**顺序**.

例如：在排列2,3,1中，2,1和3,1都成反序，2,3为顺序，所以2,3,1的反序数是2. 读者不难算出排列4,1,5,3,6,2的反序数为7.

给定任意一个排列，我们可以按照以下方法来计算它的反序数：

先看有多少个数排在1的前面，设为$m_1$个，那么就有$m_1$个数与1构成反序；然后把1画去，再看有多少个数排在2的前面，设为$m_2$个，那么就有$m_2$个数与2构成反序；再画去2，计算有多少个数排在3的前面；如此继续下去，最后设$n$之前有$m_n$个数(显然$m_n = 0$). 因此这个排列的反序数等于

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

例如：排列4,1,5,3,6,2中，

$$m_1 = 1,\ m_2 = 4,\ m_3 = 2,\ m_4 = 0,\ m_5 = 0,\ m_6 = 0,$$

所以这个排列的反序数为7.

为了使用方便起见，我们把排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$的反序数记为$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$. 例如：

$$\tau(2,3,1) = 2,\quad \tau(4,1,5,3,6,2) = 7,\quad \tau(1,2,3,\cdots,n) = 0.$$

一个排列的反序数可以是偶数，也可以是奇数.

**定义 1.3** 如果$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是偶数(零也是偶数)，则排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$称为**偶排列**；如果$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是奇数，则排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$称为**奇排列**.

例如：2,3,1和1,2,3,…,$n$都是偶排列，而4,1,5,3,6,2是奇排列.

在所有6个三阶排列中，1,2,3;2,3,1;3,1,2是偶排列，而1,3,2;2,1,3;3,2,1是奇排列. 在这里，奇、偶排列各占一半. 这一事实并非偶然现象. 一般来说，在所有$n!$个$n$阶排列中，奇排列与偶排列各占一半. 为了证明这一事实，我们还须进一步研究排列的奇偶性.

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数保持不动，就得到一个新排列，这样的一个变换称为**对换**.

例如：经1,2对换，排列2,4,3,1就变成1,4,3,2；排列2,1,4,3就变成1,2,4,3. 显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了. 例如：排列2,4,3,1经1,2对换变成1,4,3,2，而1,4,3,2再经1,2对换就还原为2,4,3,1.

下面考查对换对排列的奇偶性的影响.

先看一个例子，排列3,1,4,5,2经过相邻位置的两个数1,4对换变成排列3,4,1,5,2. 这两个排列只是1与4的位置不同，1,4在3,1,4,5,2中构成顺序，在3,4,1,5,2中构成反序，而其他数之间的顺序关系都没有改变，因此3,4,1,5,2较3,1,4,5,2多一个反序. 所以排列3,4,1,5,2和3,1,4,5,2的奇偶性是相反的. 又如：排列3,1,4,5,2经不相邻位置的两个数3,5对换变

成排列 5,1,4,3,2. 虽然只有 3 与 5 的位置不同，但对换后不仅把原来的顺序 3,5 变为反序 5,3，而且影响 3 与 1,4 之间的顺序关系，以及 5 与 1,4 之间的顺序关系. 原来的反序3,1 变为顺序 1,3，而原来的顺序 3,4;3,5;1,5;4,5 分别变为反序4,3;5,3;5,1;5,4. 因此

$$\tau(5,1,4,3,2)=\tau(3,1,4,5,2)-1+4=\tau(3,1,4,5,2)+3.$$

故排列 5,1,4,3,2 和 3,1,4,5,2 的奇偶性是相反的.

**定理 1.1**　一个对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一个对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

**证**　先看一个特殊情况，即对换的两个数在排列中是相邻的情况，排列

$$\cdots,j,k,\cdots, \tag{2.1}$$

经 $j,k$ 对换变成排列

$$\cdots,k,j,\cdots, \tag{2.2}$$

这里“…”表示不变动的数. 显然在排列(2.1) 与(2.2) 中，$j$ 或 $k$ 与前面和后面的不动的各数构成的反序或顺序都是相同的，不同的只是 $j$ 与 $k$ 的次序变了. 若 $j,k$ 原为反序，则经对换后. 新排列(2.2) 的反序数比原排列(2.1) 的反序数少 1；若 $j,k$ 原为顺序，则经对换后反序数增加 1. 无论减少 1 或增加 1，排列的奇偶性都改变了. 因此在这种情况下，定理结论成立.

再看一般情况，即对换的两个数在排列中不相邻. 设排列为

$$\cdots,j,i_1,i_2,\cdots,i_s,k,\cdots. \tag{2.3}$$

经 $j,k$ 对换，排列(2.3) 变为

$$\cdots,k,i_1,i_2,\cdots,i_s,j,\cdots. \tag{2.4}$$

不难看出，这样一个不相邻的两数的对换可以通过若干次相邻两数的对换来实现. 从(2.3) 出发，把 $k$ 与 $i_s$ 对换，再与 $i_{s-1}$ 对换 …… 与 $i_1$ 对换，最后与 $j$ 对换. 共经 $s+1$ 次相邻两数的对换，排列(2.3) 变成

$$\cdots,k,j,i_1,i_2,\cdots,i_s,\cdots. \tag{2.5}$$

再从(2.5) 出发，把 $j$ 与 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 一个个地对换，共经 $s$ 次相邻两数的对换，排列(2.5) 变成排列(2.4). 因此，$j$ 与 $k$ 的对换可经 $2s+1$ 次(奇数次) 相邻两数的对换来实现. 前面已证明：相邻两数的一个对换改变排列的奇偶性. 因此经过奇数次相邻两数对换最终也改变排列的奇偶性. ∎

**推论**　奇数次对换改变排列的奇偶性，偶数次对换不改变排列的奇偶性.

这是因为，作一次对换改变排列的奇偶性，作两次对换则排列的奇偶性