通识教育平台数学课程系列教材

GAODENGSHUXUE
DUOYUANWEIJIFENXUE

高等数学
多元微积分学

刘开宇 周利彪 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·通识教育平台数学课程系列教材·

高等数学：多元微积分学

刘开宇　周利彪　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为高等本科院校非数学专业学生编写的“高等数学”系列教材之一，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、常微分方程、向量函数及其应用、含参变量积分等. 各节后配有适量习题，书末附有习题参考答案.

本书结构严谨，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

本书可供高等院校非数学专业学生使用，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 多元微积分学/刘开宇，周利彪主编. —北京：科学出版社，2007
（通识教育平台数学课程系列教材）
ISBN 978-7-03-018405-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘…②周… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 164645 号

责任编辑：冯贵层 梅 莹／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

湖北新华印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 1 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007 年 1 月第一次印刷 印张：23 3/4
印数：1—6 000 字数：464 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教育教学的基本工具，也是高等学校深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养新世纪创新人才的重要保证.教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》(教高[2005]1号)指出:“加强教材建设，确保高质量教材进课堂.要大力锤炼精品教材，并把精品教材作为教材选用的主要目标.对发展迅速和应用性强的课程，要不断更新教材内容，积极开发新教材，并使高质量的新版教材成为教材选用的主体.”

数学作为科学和技术基础，在决定国家各级人才的素质方面正起着日益重要的作用.高等学校作为培育人才的摇篮，数学课程的开设也就具有特别重要的意义.高等数学是高等教育中涉及学生人数多、专业门类广、对学生影响深远的基础课程之一，其教材建设工作受到广大教育工作者的普遍关注和重视.

湖南大学历来十分重视高等数学课程建设，其高等数学课程已被评定为国家精品课程.由湖南大学数学与计量经济学院组织编写的《大学数学》系列教材(供非数学专业理工科学生公共数学基础课程使用)被列为普通高等教育“十五”国家级规划教材，其修订版已被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材.为了在教材建设中引进竞争机制，进一步打造精品教材，学院经广泛征求任课教师意见及教学指导委员会研究讨论，决定再组织编写一套高质量的高等数学课程教材，在不同年级学生的教学中两套教材交替使用，并修改、完善.本套教材适合于本科院校非数学专业学生作为数学公共课教材或参考书使用，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

《高等数学:多元微积分学》是本套教材的第二册，由刘开宇、周利彪主编，参加本册编写的人员还有彭亚新、孟益民、朱郁森等，他们都是长期从事非数学专业本科生数学公共课教学的教师.本书包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、常微分方程、向量函数及其应用、含参变量积分等内容，其中标注“*”号的内容可根据学时多少进行选讲.本书概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

湖南大学数学与计量经济学院退休教师刘楚中教授在本套教材编写的前期组织中做了大量工作，在此表示衷心感谢.

由于编写时间有限，本教材难免存在不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

湖南大学数学与计量经济学院

“高等数学”教材编写组

2006年10月

目　录

第一章　向量代数与空间解析几何

向量是因力学、物理学发展需要而引入的数学概念，随着对向量理论的深入研究，它已成为研究数学本身的许多问题的基础之一.

与平面解析几何类似，引进空间直角坐标系可把空间中的点与有序实数组及向量联系起来，可以运用数的代数运算来表示相应的向量运算，还可运用向量运算解决空间中的几何问题.

第一节　向量的概念及向量的表示

一、向量的基本概念

1. 向量的概念

在日常生活中，我们常遇到两种量，一种是只需用大小就能表示的量，如温度、质量、面积、功等，这种量称之为数量；另一种是既需要用大小表示，同时还要指明方向的量，如力、位移、速度等，这种量称之为向量.

在几何上，用有向线段表示向量（见图 1-1），线段的长度等于向量的大小，箭头所指的方向为向量的方向，称点 A 为向量的起点，点 B 为向量的终点，记为$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用一个英文字母表示，如向量 $\boldsymbol{a}$、向量 $\boldsymbol{b}$、向量 $\boldsymbol{F}$ 等.

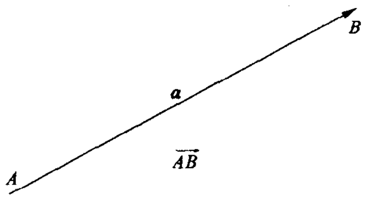

图 1-1

向量的大小（或长度）称为向量的模，记为 $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\overrightarrow{AB}\|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可看作是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同（即在同一直线上或在两平行直线上，且指向相同），且模相等，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 于是，一个向量与它经过平移以后所得的向量是相等的. 具有这种可在空间中任意平移性质的向量叫做自由向量. 因此，我们在讨论向量时只需考虑它的大小和方向，其起点位置可以任意选取.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的加法与减法

根据力学中关于力的合成法则，可以用平行四边形法则或三角形法则求两个力的合力，对速度、位移等的合成均可按这两种方法进行. 因此，我们规定：设有两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，并由此作平行四边形 $ABCD$（见图 1-2），则其对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这种方法称为向量相加的平行四边形法则.

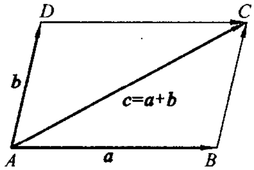

图 1-2

求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可用下述的三角形法则：平移向量 $\boldsymbol{b}$，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（见图 1-3）.

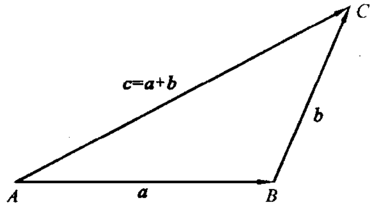

图 1-3

由图 1-4 和 1-5 可以看出，向量的加法服从交换律和结合律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

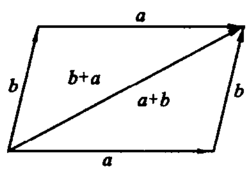

图 1-4

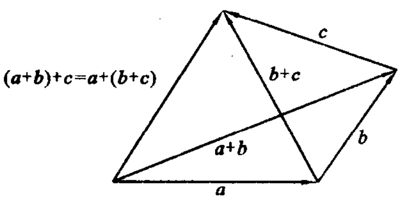

图 1-5

对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，下面的关系式成立：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量的减法是向量加法的逆运算. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 之差，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，并有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量的减法同样有平行四边形法则和三角形法则，读者不难根据图 1-6 自行完成这两个法则的文字叙述.

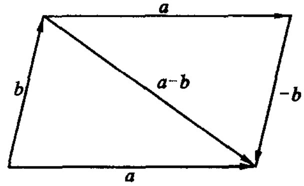

图 1-6

3. 向量与数的减法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是按下面规定所确定的一个向量：

(1) $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}\|$，即向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量与数的乘法满足下面的运算规律：设 λ,μ 为实数，对向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 位于同一条直线上或分别位于两条平行的直线上，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，故规定零向量平行于任何一个向量.

由向量与数的乘积的定义可知下面定理成立.

定理 1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1 设 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 是与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，试用 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示 $\boldsymbol{a}$.

解 因为 $\boldsymbol{a}^{\circ}\parallel\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，所以存在实数 $\lambda>0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^{\circ}$. 因此，$\|\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}^{\circ}\|=|\lambda|=\lambda$，即 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

例 2 证明平行四边形的对角线互相平分.

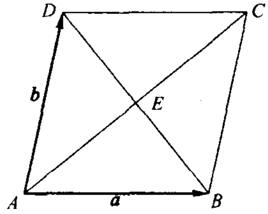

图 1-7

证 如图 1-7 所示，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 设 E 为对角线 AC 与 BD 的交点，则存在实数 λ,μ，使得

$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{ED}=\mu\overrightarrow{BD}=\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

又因为

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED},$$

故

$$\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

即

$$(1-\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}.$$

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不平行，从而使上式成立的 λ 和 μ 要满足方程组

$$\begin{cases}1-\lambda-\mu=0,\\ \lambda-\mu=0.\end{cases}$$

因此，$\mu=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，即 E 是对角线 AC 与 BD 的中点.

4. 向量在轴上的投影

将两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点，规定它们正向之间位于 0 到 π 范围内的那个夹角为这两个向量的夹角，记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或记为 θ,α,φ 等，类似地，可以把两根轴之间的夹角及向量与轴之间的夹角定义为它们正向之间的夹角，其取值范围为 $[0,\pi]$.

已知空间中一点 A 及一根轴 u，过点 A 作垂直于轴 u 的平面 π，则平面 π 与轴 u 的交点 A' 称为点 A 在轴 u 上的投影.

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B'，则当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 同向时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为 $\|\overrightarrow{A'B'}\|$；当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 反向时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为 $-\|\overrightarrow{A'B'}\|$，记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$（见图 1-8），即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{ 与 }u\text{ 同向},\\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{ 与 }u\text{ 反向}.\end{cases}$$

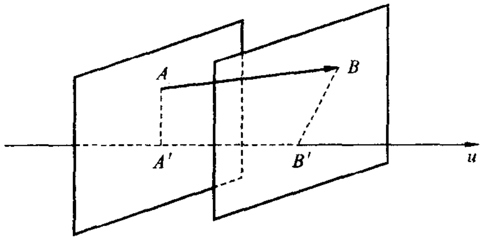

图 1-8

向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影可以通过$\overrightarrow{AB}$的模及$\overrightarrow{AB}$与轴u夹角的余弦值来表示：

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \| \overrightarrow{AB} \| \cos\varphi, \tag{1}$$

其中$\varphi = < \overrightarrow{AB}, u >$，一般地有

$$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = \| \boldsymbol{a} \| \cos < \boldsymbol{a}, u >.$$

由此容易看出，向量在轴上的投影是可正、可负的数量，且相等的向量在同一轴上的投影相等.

如果向量$\boldsymbol{b}$与轴u同向，则规定$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}$. 于是，由公式(1)有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \| \boldsymbol{a} \| \cos < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >.$$

由向量在轴上投影的定义，可知下面关于向量在轴上的投影定理成立.

定理 2 已知向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$及轴$u$，则有$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{b}$.

我们把定理的证明留给读者. 定理可以推广到有限个向量的和的情况，即

推论 1 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_n$.

二、空间直角坐标系及向量的坐标表示式

有许多关于向量的问题仅靠几何方法是很难解决的，只有将向量与数量联系起来，把向量的运算归结为相应的数的代数运算，向量理论才能得到广泛的应用. 为此，我们在$\mathbf{R}^3$空间中引进空间直角坐标系，建立空间中点与实数的关系，并由此建立向量与有序实数组的关系.

1. 空间直角坐标系

过空间$\mathbf{R}^3$中某一点O作三条两两垂直的数轴Ox, Oy, Oz，它们均以点O为起点，且有相同的单位长度，这样就建立了一个空间直角坐标系. Ox, Oy, Oz称为坐标轴，简称为x轴，y轴，z轴，点O称为坐标原点. 习惯上，我们将x轴，y轴，z轴的正方向按右手规则排列：即以右手握住z轴，四个手指从x轴正方向转动$\frac{\pi}{2}$到y轴的正方向时，拇指所指的方向是z轴的正方向(见图 1-9). 以后我们所说的空间直角坐标系就是这种右手直角坐标系，通常记为坐标系$Oxyz$.

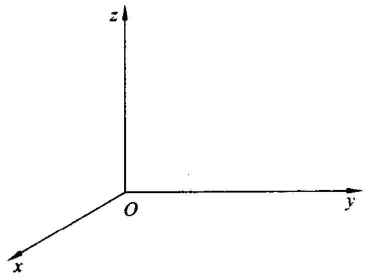

图 1-9

三条坐标轴中任意两条所确定的平面称为坐标面，由x轴与y轴所确定的坐

标面叫 xy 坐标面，类似地还有 xz 坐标面和 yz 坐标面.

设 P 为空间中任意一点，过点 P 作三个平面分别与三条坐标轴垂直，它们与三条坐标轴的交点依次为 A,B,C（见图 1-10），点 A,B,C 在三条坐标轴上的坐标分别记为 x,y,z. 于是空间中的点 P 与三个有序实数 x,y,z 建立起了一一对应的关系，记为 $P(x,y,z)$. 通常称 x 为 P 的横坐标，y 为 P 的纵坐标，z 为 P 的竖坐标.

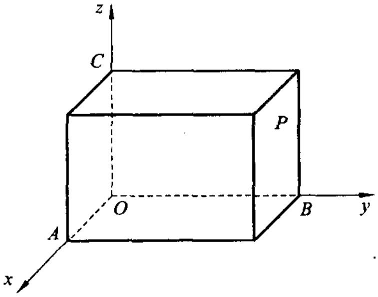

图 1-10

三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 这八个卦限的次序规定如下（见图 1-11）：

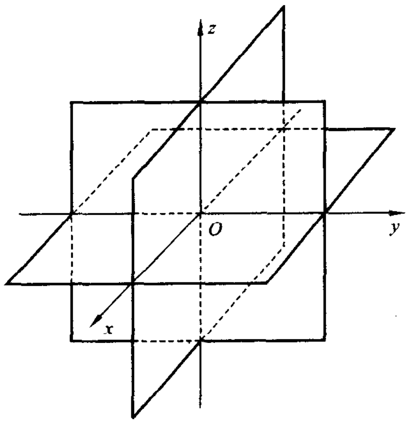

图 1-11

第 Ⅰ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x>0, y>0, z>0\}$；

第 Ⅱ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x<0, y>0, z>0\}$；

第 Ⅲ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x<0, y<0, z>0\}$；

第 Ⅳ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x>0, y<0, z>0\}$；

第 Ⅴ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x>0, y>0, z<0\}$；

第 Ⅵ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x<0, y>0, z<0\}$；

第 Ⅶ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x<0, y<0, z<0\}$；

第 Ⅷ 卦限：$\{(x,y,z) \mid x>0, y<0, z<0\}$.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的任意两点，由图 1-12 可知

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1R|^2 + |P_2R|^2 \\ &= |P_1Q|^2 + |QR|^2 + |P_2R|^2 \\ &= |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

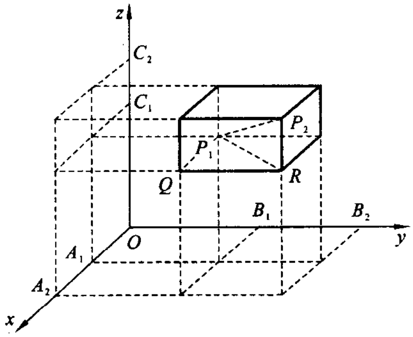

图 1-12

于是得到空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式：

$$d(P_1,P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (2)$$

例 3 已知 $A(-3,2,1)$，$B(0,2,5)$，求 $\triangle AOB$ 的周长.

解 由公式(2) 可得

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3-0)^2+(2-2)^2+(1-5)^2} = 5,$$

$$\|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{(-3)^2+2^2+1^2} = \sqrt{14},$$

$$\|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{0^2+2^2+5^2} = \sqrt{29}.$$

所以，$\triangle AOB$ 的周长

$$l = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AO}\| + \|\overrightarrow{BO}\| = 5+\sqrt{14}+\sqrt{29} \approx 14.$$

2. 向量的坐标表示式

在空间 $\mathbf{R}^3$ 中，利用向量在坐标轴上的投影可建立起向量与有序实数组之间的对应关系，有序实数称为向量相应的坐标.

$\forall P(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$，称以坐标原点 O 为起点、点 P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为点 P 的向径，记为 $\boldsymbol{r}$，则向径 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r} = x, \quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r} = y, \quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r} = z,$$

则 x,y,z 称之为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，其中 x 为其横坐标，y 为其纵坐标，z 为其竖坐标(见图 1-13). $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 称为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式.

依次取与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量：