微积分简明教程

（上册）

主　编　潘吉勋
副主编　苏　耘　高　洁　郭夕敬

华南理工大学出版社
·广州·

前　言

在现代的大学里，越来越多的专业开设高等数学课程，现有的教材已不能满足多层次、多元化的需要。为此，我们为应用科技类专业编写了这本教材，它具有如下特点：

1. 少而精。现代人获取知识的方式是多渠道的和快节奏的，教材要为节省读者的时间和精力着想。本书对微积分知识结构做了优化设计，尽可能地精选内容和细节，力戒烦琐。全书大约 40 万字，大大地压缩了篇幅，使读者能在较少学时的情况下学完微积分的基本内容。

2. 大众化。作为基础课教材，我们要面对多层次的读者。对于微积分中不能回避的困难问题，在讲述方式上本书有许多新的创意，尽量做到举重若轻。例如关于极限理论的教学，本书采取“两步走”的做法，即以极限的描述性定义为主，将“$\varepsilon-\delta$”定义作为选学内容加以介绍，不至于因为后者难以掌握而影响后继内容的学习。这种讲法符合历史发展和认识规律，能够满足非数学专业的普遍要求。

3. 实用性。实用性是微积分的精华，也是读者关注最多和受益最大之所在。本书侧重基本计算和应用数学能力的培养，放弃面面俱到的细节考量，把有实用价值的数学方法讲得简明透彻，做到“有所不为而后有所为”。例如本书采取贴近物理应用的方式讲述曲线(面)积分，直截了当地解决了能算积分和会用公式的问题，为后继课程的学习提供了必要的支持。

全书分上、下两册，上册包括一元微积分学和常微分方程，下册包括空间解析几何、多元微积分学和级数。各章配有习题，书末附有参考答案。

本书由潘吉勋教授任主编，苏耘、高洁、郭夕敬任副主编，张进、程延强、唐春艳、李凤翔任编委。

吉林大学珠海学院和空军航空大学的领导对本书的基调和风格提供了宝贵的建议，并积极支持本书的出版。在此谨向他们表示衷心的感谢。

吉林大学金希卓教授、卢喜观教授和李辉来教授担任主审，对本书提出了许多改进意见。华南理工大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动。在此，向他们致以诚挚的谢意。

欢迎读者对本书提出批评和建议，以便改进我们的教学。

潘吉勋

2007 年 7 月 7 日　珠海

目　录

引 论

微积分是科学发展史中最伟大的成就之一，是人类智慧的精品杰作．为了学习和掌握这门学科的基本知识，有必要适当地了解它的历史和概况．

1．微积分产生的背景

进入17世纪，科学和技术的发展进入了兴盛时期．科学巨匠Galileo（1564—1642年）和Descartes（1596—1650年）在总结前人工作的基础上，阐明了科学活动的性质、目标和方法，把科学和数学紧密地结合起来．Galileo曾说过："自然这本书是用数学写成的．"Descartes也宣称："科学的本质是数学．"此后，科学发展步入了良性发展轨道．

科学实践和各门学科的自身发展使得关于运动的研究成为中心课题，用来描写运动的合适的数学概念——变量也应运而生，与其相伴随的还有变量之间的关系的概念——函数．Descartes创建的解析几何学成为初等数学和高等数学的转折点，它运用代数方法研究几何问题，把曲线用代数方程表示，把未知量看作变量，建立了函数与曲线的联系．这方面的研究也就成为微积分诞生的前奏．

创立微积分的直接动力主要来自以下四类实际问题：

(1) 已知物体的移动距离，求物体的运动速度和加速度；反过来，已知物体运动的加速度，求物体的速度和移动距离．

(2) 如何求曲线的切线和法线．

(3) 如何求函数的最大值和最小值．

(4) 如何计算曲线的长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积等．

现在看来，这些问题的解决都必然涉及微积分．在仅有四则运算的时代，是不可能解决这些问题的．

2. 微分学的创立

求圆周和求面积是一个古老的数学问题，早在两千年前，古希腊的 Archimedes 及古中国的刘徽就发明了“穷竭法”和“割圆术”等方法，这些方法都蕴含了“分割—作和—近似”的积分学思想，后继人的研究为积分学的创立作了铺垫，但一直没有得到彻底解决. 17 世纪后半叶，科学伟人 Newton (1642—1727 年)对科学的贡献是无与伦比的. 他用数学方法研究物理规律，必然遭遇速度和加速度问题，在前人研究工作的基础上，他发明了《正流数术》(即微分学前身)及《反流数术》(即积分学前身)，标志着微积分学的诞生，开创了变量数学的新时代. 几乎与此同时，Leibniz (1646—1716 年)独立地以几何问题(切线和面积)为背景从事微积分的研究. 他独具匠心创造的微分和积分符号沿用至今. Newton 和 Leibniz 不约而同地揭示了微分和积分内在深奥的联系，这就是令人称道的“微积分学基本定理”.

新的微积分引进了与前人工作根本不同的概念和方法，用到的是“无穷小量分析”(即极限方法的前身). 许多长期未解决的难题运用微积分便迎刃而解. 像计算曲线围成的面积这样的问题只不过是微积分的一个习题那样简单. 诚然，早期的微积分缺少严格的逻辑基础，推理中主观认定的成分多，这也招致了许多非议和批评. 尽管如此，科学家们意识到这门新学科所孕育的巨大潜能，大数学家 d'Alembert (1717—1783 年)就曾说过“向前进，你就会获得信心”，表达了微积分给科学界带来的鼓舞，以及对未来发展的憧憬.

3. 微积分的发展

Newton 和 Leibniz 把微分当作无穷小量，流数(即导数)当作无穷小量之比，积分当作无穷小量之和. 在仅有四则运算(没有极限运算)的情况下，对于无穷小量的理解是含糊不清的，作为增量时，它是非零的，在计算流数的结果时又让它为零，这种逻辑上的混乱必然招致人们的批判. 在缺乏严格理论基础的情况下，运用微积分却又解决了许多前人不能解决的问题，并且得到了实践的验证. 与此同时，数学家

们也在积极地从事微积分理论基础的修补工作. 直到 19 世纪前，这项严密化的工作一直未能完成，它需要人们更多的智慧积累.

数学家们经过了百余年的反复研讨，造就了一个新的武器——极限理论. Cauchy (1789—1857 年)的代表作《分析教程》于 1821 年问世，给出了极限的描述性定义，为微积分奠定了合适的理论基础. 再经 Weierstrass (1815—1897 年)的改进，给出了极限的精确化定义(1861 年)，这便是现今微积分教材中的"ε-δ"型极限定义. 至此，严格化的工作基本完成.

随着微积分的创立和发展，也带动了一批相关的数学分支(微分方程、函数论及概率论等)的产生和发展，进而推动了自然科学的全面发展.

4. 微积分的应用

对于运动的研究是自然科学的中心问题. Newton 就是基于对运动规律的研究发明了微积分. 不仅速度和加速度是用导数定义的，其他学科的许多原始概念(诸如几何学中的面积和切线，物理学中的变力做功，经济学中的边际分析等)都需要借助微分或积分来定义. 从这个意义上来说，没有微积分也就没有现代的自然科学.

许多科学规律都是通过数学分析和微分方程刻画的，即建立数学模型. 小者如微观的基本粒子的量子力学方程，大者如宏观的行星运动方程. 近一个世纪以来，数学模型也广泛地应用于其他学科，例如社会学中的人口增长模型、经济学中的市场均衡模型、军事学中的兵力损耗模型、管理事务中的最优规划方法、金融股市中的期权定价模型等，可以说科学的数学化时代已经到来.

微积分的另一个突出作用，就是它能为科学和技术工作提供精确的数量化结果，特别是随着电子计算机的广泛应用，使得数学如虎添翼. 像宇宙飞船这样浩大的工程就必须进行精确的轨道计算，进而实施实时的准确控制，才能成功地完成升空和回收任务. 这类应用数学的事例不胜枚举.

纵观历史，人们会发现，微积分是人类智慧的结晶. 它不仅能够

引导人们培养理性思维的能力，而且通过应用于自然科学和社会科学的实践创造了巨大的物质财富和文化财富.

第一章 函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，极限理论是微积分的基础．本章将先对函数概念及初等函数给出简明的综述，然后着重探讨极限理论，以便为后继内容的展开做好必要的准备．

§1 变量与函数

一、常量与变量

宇宙是由物质构成的，运动是物质的存在形式，描述运动的数学工具是变量．所谓**变量**，就是变化着的量，也就是在某一过程中可以取不同数值的量．与变量相对照，在某一过程中，保持取固定数值的量称为**常量**．正如可把静止看成运动的特例一样，我们也常把常量看成一种特殊的变量．

在微积分学中，变量所取的每个值都是一个实数，所有这些数所构成的数集，称为这个变量的**变域**．建立坐标系之后，数和数轴上的点就建立了一一对应关系，因此在论述推理时，便不再区别数和点．

本书经常用的数集(也就是点集)有下面几种：

(1) 有限区间：设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\},$$
$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},$$

前两个依次称为**开区间**和**闭区间**，后两个都称为**半开半闭区间**．a，b 分别称为区间的**端点**．

微积分中经常用到点 a 的“邻域”这个概念，这是指以 a 为中心的某个对称开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$，其中 $\delta>0$. 有时，也用到“在 a 点附近”这种说法，这是指点集$(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)$，即在邻域$(a-\delta,\ a+\delta)$中除掉 a 点.

(2) 无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\},$$
$$(-\infty,+\infty)=(-\infty,0]\cup[0,+\infty),$$

其中，a 是实数，$+\infty$ 和 $-\infty$ 是两个符号，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.

全体自然数的集合记作 **N**. 全体整数的集合记作 **Z**. 全体实数的集合记作 **R**.

二、函数概念

事物不是孤立存在的. 函数是用来描述变量之间存在的各种各样的依赖关系的.

例 1 在自由落体运动中，位置变量 s 随时间 t 而变，它们之间的依赖关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 2 关系式

$$y=x^2$$

表示抛物线上的点(x,y)的两个坐标的依赖关系.

例 3 在电子技术中遇到一种矩形波，每隔 100 微秒(1 秒 $=10^6$ 微秒)产生一个 10 伏的电压脉冲，持续时间是 10 微秒. 波形呈周期性，在一个周期内电压 u 随时间 t 而改变，它们之间的依赖关系可表示成

$$u=\begin{cases}10, & 0\leqslant t\leqslant 10;\\ 0, & 10<t<100.\end{cases}$$

类似上述的例子不胜枚举，它们的共同特点是：一个变量的改变

引起另一个变量的改变，当一个变量取定一个数值，按着某种确定的对应关系，可以求得另一个变量的一个相应值. 这便引出下面的函数概念.

定义　设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D. 如果对于每个数 $x \in D$，按照某一种确定的规则，变量 y 有惟一的一个数值与之对应，我们就称 y 是 x 的一个**函数**，记作

$$y = f(x), \qquad x \in D.$$

其中数集 D 称为该函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，f 表示函数关系. 不同函数的表示符号是不同的.

决定函数的有两个基本要素，一是“对应规则”，另一个是定义域. 两个函数相等当且仅当它们的对应规则相同，且定义域相同. 例如，

$$f(x) = \lg x^2 \quad \text{和} \quad g(x) = 2\lg x$$

就是两个不相等的函数，虽然对应规则相同，但定义域不同，前者的定义域为全体非零实数，后者的定义域是全体正数.

对于用解析式表示的函数，其定义域是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体，这种定义域也称作函数的**自然定义域**，通常不予写出. 例如前述函数 $\lg x^2$ 和 $2\lg x$ 的自然定义域分别是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 和 $(0, +\infty)$.

例 4　确定函数 $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \lg(5-x)$ 的定义域.

解　为使函数有意义，则要求

$$x - 1 \geqslant 0, \quad x - 2 \neq 0, \quad \text{且} \ 5 - x > 0.$$

所以函数的定义域 $D = [1,2) \cup (2,5)$.

对于函数 $y = f(x)$，$x \in D$，全体函数值所构成的数集 W 称为函数的**值域**，即

$$W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}.$$

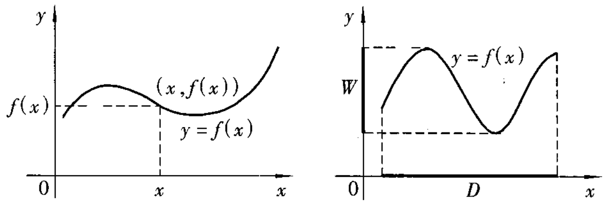
例如前述例 2 和例 3 中函数的值域分别是 $[0, +\infty)$ 和 $\{0, 10\}$.

函数的定义域 D 和值域 W 分别为两个数集，在平面直角坐标系中，它们分别是 x 轴和 y 轴中的两个点集. 对于每一个 $x \in D$，有函数

值 $y=f(x)$ 与之对应，相应地，xy 平面上确定了一点 (x,y)，当 x 取遍 D 中的每个数值，就得到点集 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**图形**或**曲线**(见图 1-1).



(a) (b)

图 1-1

例 5 绝对值函数 $y=|x|$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形见图 1-2.

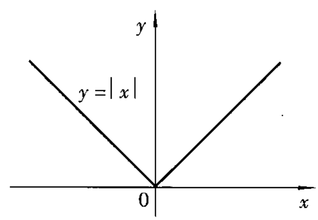


图 1-2

例 6 定义在自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的函数也称作**数列**，记成

$$y_n=f(n),\qquad n\in\mathbf{N}.$$

例如，数列 $y_n=\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}$，它的值域为集合 $\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\}$.

例 7 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

的定义域由两部分构成，当 $x\in[-1,0]$ 时，对应的函数值 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$；当 $x\in(0,1]$ 时，对应的函数值 $f(x)=x$. 函数的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,1]$，它的图形如图 1-3 所示.

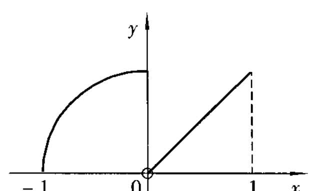


图 1-3

三、参数方程

函数曲线可以帮助我们建立几何直观，反过来，函数也可用作研

究曲线性质的工具.

例 8 斜抛物体在铅直平面上的运动方程

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

其中 v_1, v_2 分别为物体初速的水平、铅直分量. 这是运动的参数方程, 消去 t, 便得到

$$y = \frac{v_2}{v_1}x - \frac{g}{2v_1^2}x^2.$$

于是, 确定了变量 x 与 y 的函数关系. 这便是斜抛物体的轨迹方程.

一般地, 给了一对函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$, 称

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

为**参数方程**, t 称为**参数**. 指定 $t \in [\alpha,\beta]$, 相应地确定了惟一的 x 值和 y 值(即惟一的点(x,y)), 随之确定了 y 与 x 之间的函数关系 $y = f(x)$ (或者 $x = g(y)$), 称作由参数方程所确定的函数. 当 t 取遍$[\alpha,\beta]$, 点 $(x(t), y(t))$所描出的轨迹便是函数 $y = f(x)$的图形.

例 9 参数方程

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

满足方程

$$x^2 + y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

于是确定了函数

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

它的图形如图 1-4 所示.

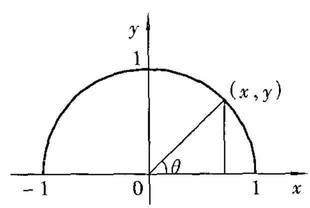


图 1-4

函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 也可视为由参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \qquad t \in D$$

所确定的.

以后将会看到，参数方程都是基于几何或物理需要出现的；不必非要追求明显地导出 y 与 x 之间的表达式.

习题 1-1

1. 用区间表示下列变量的变化范围：

(1) $-1<x\leqslant 5$; (2) $x\geqslant 0$;

(3) $x^2<16$; (4) $|x-2|\leqslant 6$.

2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; (2) $y=\sqrt{x^2-4}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$;

(5) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}+\log_a(2x-3)$.

5. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$. 求下列函数值：

$$f\left(\frac{1}{a}\right),\ f(x_0),\ f(x_0+h),\ f(\ln(1+t)+t^2)\ .$$

6. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，试确定 a，b 的值.

7. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3};\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

8. 已知曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{t}{2},\\ y=1-t^2.\end{cases}$$

求：(1) 曲线在 $t=0$，1，2 处的对应点的坐标；

(2) 变量 y 与 x 间的函数关系式，并画出函数图形.

9. 设 $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$.

(1) 求 x_n，y_n，z_n，使得

$$f(x_n)=0,\quad f(y_n)=1,\quad f(z_n)=-1.$$

(2) 作出函数 $f(x)$的略图.

§2 函数运算

正如数与数可以进行运算一样，在函数之间也可以定义多种运算.

一、函数的四则运算

给了两个函数 f 和 g，可以进行加、减、乘、除运算，便得到新函数

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

函数 $f+g$，$f-g$ 和 fg 的定义域是函数 f 与 g 的定义域的交集．函数 f/g 的定义域是函数 f 与 g 的定义域的交集再除掉使 $g(x)=0$ 的点．

例 1 函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{1-x}$ 是两个函数的和，函数 $\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $[-2, 2]$，函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$，所以和函数的定义域是 $[-2, 1)\cup(1, 2]$．

二、函数的复合

今有函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，前者的自变量 u 是后者的因变量，于是产生了变量 y 与 x 的依赖关系

$$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y.$$

这样确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f(\varphi(x))$，称 u 为**中间变量**．

一个复杂的函数可以分解成若干个简单函数的复合．例如函数

$$y = \sin\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$$

可分解成

$$y = \sin w, \quad w = \sqrt{u}, \quad u = 1+v, \quad v = \mathrm{e}^x.$$

复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域的确定是比较复杂的．

设函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D_1$，值域为 W．函数 $y=f(u)$，$u\in D_2$．为使 $y=f(\varphi(x))$ 有定义，必须 $x\in D_1$，这样才能使 $\varphi(x)$ 有定义；不仅如此，还要求相对应的 $u=\varphi(x)\in D_2$，这样才能使 $f(\varphi(x))$ 有定义（参见图 1-5）．因此，复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域

$$D = \{x \in D_1 \mid \varphi(x) \in D_2\}.$$

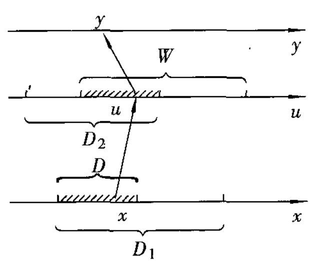


图 1-5

例 2 函数 $y=\sqrt{\sqrt{x-1}-3}$ 可视为函数 $y=\sqrt{u}$，$u\in[0, +\infty)$ 和