中国精算师资格考试用书

寿险精算数学

主编 卢仿先 张 琳

中国财政经济出版社

中国精算师资格考试用书

寿险精算数学

修订版主编　卢仿先　张　琳
原书主编　曾庆五　卢仿先
审　　稿　高洪忠

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算数学/卢仿先，张琳主编．—北京：中国财政经济出版社，2006.12
中国精算师资格考试用书
ISBN 7-5005-9421-6

Ⅰ．寿…　Ⅱ．①卢…②张…　Ⅲ．人寿保险-精算学-资格考核-自学参考资料
Ⅳ．F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 121415 号

中国财政经济出版社 出版
URL: http://www.cfeph.cn
E-mail: cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　19.75 印张　448 000 字
2006 年 12 月第 1 版　2006 年 12 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 060　定价：39.00 元
ISBN 7-5005-9421-6/F·8175

中国精算师资格考试用书
编审委员会

主　任： 吴小平

副主任： 魏迎宁

委　员： 李达安　谭伟民　张振堂　丁　昶　李秀芳

吴　岚　李冰清

总 序

1997年，由中国人民银行保险司牵头，开始筹划中国精算师资格考试体系的构建与考试教材的编写。当时中国寿险市场刚开始发展，市场只销售普通型产品，精算制度建设刚刚起步，在设计考试体系和考试内容时主要参考了北美、英国的资格考试体系。经过两年多的努力，2000年，中国精算师资格考试用书《利息理论》、《寿险精算数学》、《生命表的构造理论》、《风险理论与非寿险精算》和《寿险精算实务》陆续出版。1999年，中国保险监督管理委员会组织了中国首批精算师资格认证考试，其中有43名具有精算理论和实务背景的考生通过考试，获得了中国精算师资格。2000年12月，中国保监会组织了基于中国精算师资格考试体系的首次考试，中国精算师职业建设开始进入一个新的历史时期。

自2000年至今的6年中，中国精算师资格考试取得了长足的发展。到目前为止，已经设立了中国准精算师层次的全部9门考试和中国精算师层次的6门考试，在全国建立了15个考试中心，有13人通过考试获得中国精算师资格(共有56名中国精算师)，269人通过考试获得中国准精算师资格。在中国精算师职业发展的同时，中国的精算实践也取得了快速发展，以1999年发布《人身保险精算规定》为开端，在寿险业的共同努力下，中国保监会逐步建立了包括精算规定、精算责任人制度、精算报告、内含价值报告、生命表在内的较为完整的精算制度体系。这其中，在中国从事精算工作的精算人员起到了非常重要的作用。

随着中国保险业的发展以及精算师工作领域的不断扩展，参加中国精算师资格考试的人数不断增加，而第一版的考试用书在使用过程中逐渐发现了一些问题。因此，2005年开始启动修订计划。本次修订的教材包括《利息理论》、《寿险精算数学》、《风险理论》(将原书的风险理论部分独立出来)、《生命表基础》(原书名《生命表的构造理论》)和《寿险精算实务》。考试用书修订的宗旨是在不进行大的调整的基础上，对原考试用书进行完善，包括结构、内容、语句等，目的是给考生提供更为规范的考试用书。与此同时，中国保监会、中国保险行业协会精算工作委员会开始启动“中国精算师资格考试体系”研究课题，对考试体系、结构、内容进行深入研究，以中国精算理论与

实践为核心，结合国际精算理论与实践的发展，构建更为科学、全面的资格体系，这将是一项长期的系统工程。随着精算师工作领域的不断扩大，在精算师资格体系的建设过程中逐步突出精算在不同领域的应用，使精算师职业不断壮大。

本次修订得到了瑞士再保险公司和中国平安人寿保险股份有限公司的支持，在此表示感谢。

我们希望更多的有志之士投身于中国精算事业，也希望中国精算师职业的专业品质不断提高，为中国保险业、金融业以及中国社会保障的发展贡献力量。

中国精算师资格考试用书编审委员会

2006 年 7 月

前 言

本书旨在介绍寿险精算数学的基本理论。通过阅读本书，读者可以了解建立寿险经验生命表的基本方法和步骤；学会计算连续型和离散型寿险保单的趸缴纯保费及生存年金的精算现值；并在此基础上计算均衡纯保费。本书导出了各种情况下准备金的计算方法、总保费的计算、总保费准备金的计算和准备金的几种修正方法。讨论了在独立性假设下个体的联合生存状态和最后生存状态的相关精算变量及关系，还进一步探讨了在非独立情形下的分布规律，并引入了两个寿险生命参数模型，Frank's Copula 模型和 Common Shock 模型。介绍了多元风险模型与伴随单风险模型，推导了多元风险模型下的趸缴纯保费。最后介绍了在养老金计划中使用的精算方法。

本版是对 2001 年版寿险精算数学的修订，当时的版本是由卢仿先、曾庆五编著。本次修订由湖南大学金融学院风险管理与保险学系的 6 位老师完成。修订分工如下：第一章邓庆彪负责，第二、三章卢仿先负责，第四章尹莎负责，第五、六章张琳负责，第七章张宁负责，第八、九章王奕渲负责。最后由卢仿先和张琳统稿并做总体的校对。

本次修订在每章开始前都有每章主要内容和主要词汇，便于读者了解整章的结构和知识要点；增加了一些例题和大量的习题。为了便于读者自学，本书进行了少量的结构调整，使知识的引入更自然平滑，对原来知识引入有跳跃的地方进行了补充，并对原书出现的错误进行了更正。

湖南大学金融学院 卢仿先 张琳

2006 年 9 月

目 录

第一章

生存分布与生命表

本章主要内容： 本章以零岁新生婴儿为例，引入死力的定义，通过新生婴儿的死亡年龄 X 和其在 x 岁时的未来寿命 $T(x)$ 来建立生存函数 $s(x)$ 和 ${}_tp_x$，并在此基础之上运用概率论的基本方法，对同分布的某组新生婴儿确定生命表的各主要函数，建立寿险业的经验生命表。生命表既是寿险保单定价的重要因素之一，也是寿险业务经营和政府实施监督与管理的一项基础工作。

本章主要词汇： 死亡年龄　未来寿命　生存函数　死力　均匀分布　生命表

§1.1 死亡年龄的概率分布函数

寿险保单的保险金给付是以被保险人的生存或死亡为前提条件的，所以，被保险人在投保时的未来寿命是建立寿险精算数学模型的重要因素之一。为此，本节主要讨论死亡年龄的概率分布。

1.1.1 连续型的死亡年龄概率分布

对于某一个刚出生的婴儿来说，其死亡年龄 X 是一个连续型的随机变量，用 $F(x)$ 表示这个随机变量 X 的分布函数，则：

$$F(x)=Pr(X\leqslant x)\quad(x\geqslant 0) \tag{1.1.1}$$

这里，通常假设 $F(0)=0$。

假设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是可导的，并用 $f(x)$ 表示随机变量 X 的概率密度

函数，则：

$$f(x)=F'(x)\quad(x\geqslant 0)$$

或

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \tag{1.1.2}$$

而且其均值与方差分别是：

$$E(X)=\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}Var(X)&=\int_0^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)\,dx\\&=E(X^2)-(E(X))^2\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

1.1.2 离散型的死亡年龄概率分布

若将某一个新生婴儿的死亡年龄 X 取整数值(即取周岁数)并用字母 K 表示，则 $K=[X]$(其中，[ ]是取整函数)。那么，离散型随机变量 K 的概率分布律可表述为：

死亡年龄(K)	0	1	2	3	…
概　　率(q)	q_0	q_1	q_2	q_3	…

其中 $\sum_{i=0}^{\infty} q_i=1$，$q_i\geqslant 0(i=0,1,\ 2\cdots)$。

而且其分布函数、均值和方差分别是：

$$F(k)=\sum_{i\leqslant k} q_i\quad(i\geqslant 0)$$

$$E(K)=\sum_{i=0}^{\infty} iq_i$$

$$\begin{aligned}Var(K)&=\sum_{i=0}^{\infty}(i-E(K))^2q_i\\&=E(K^2)-(E(K))^2\end{aligned}$$

§1.2 生存分布

我们从概率的角度来考察某一新生婴儿群体的生存分布情况。

1.2.1 生存函数

假设某一新生婴儿群体的死亡年龄 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $s(x)=1-F(x)$称为该新生婴儿的生存函数，即：

$$s(x)=Pr(X>x)\quad(x\geqslant 0) \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)表示该新生婴儿能活到 x 岁(即 x 岁以后死亡)的概率。

由于我们通常假设 $F(0)=0$,则 $s(0)=1$，其实际意义是，我们所讨论的新生婴儿是以 100% 的概率保证在出生时是生存的。

对于任意确定的 x，函数 $F(x)$与 $s(x)$都可以描述新生婴儿能活到 x 岁的概率。在概率论与统计学中，人们习惯采用死亡年龄的分布函数 $F(x)$来描述；而在精算学和人口统计学中，则习惯采用生存函数 $s(x)$来描述。

从死亡年龄的分布函数 $F(x)$的性质，可以推导出生存函数 $s(x)$的一些直观性质：

① $s(0)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)=0$；

② $s(x)$是单调递减的函数；

③ $s(x)$是一个右连续的函数。

关于生存函数 $s(x)$的一般图形，可用图 1－1 表示。

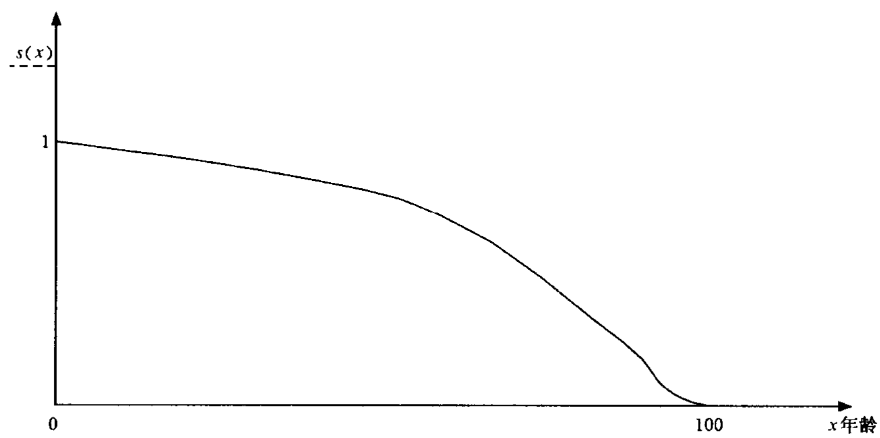

图 1－1

人的寿命是有限的，通常人的寿命不会超过某一特定年龄。也就是说，存在一个正数 ω，当 $x<\omega$ 时，$s(x)>0$；当 $x\geqslant\omega$ 时，$s(x)=0$。这时，称正数 ω 为极限年龄。如从图 1－1 中的曲线表示可以看出，极限年龄 ω 是 100 岁。

例如，某一个新生婴儿服从生存函数：

$$s(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{105} & (0\leqslant x<105)\\ 0 & (x\geqslant 105)\end{cases}$$

读者不难看出，生存者的极限年龄是 $\omega=105$ 岁。

根据概率原理，新生婴儿在年龄 x 岁与 $z(x<z)$岁之间死亡的概率是：

$$\begin{aligned}Pr(x<X\leqslant z)&=F(z)-F(x)\\&=s(x)-s(z)\end{aligned}$$

类似地，新生婴儿在 x 岁时仍活着的条件下，于年龄 x 岁与 $z(x<z)$岁之间死亡的条件概率是：

$$\begin{aligned}Pr(x<X\leqslant z\mid X>x)&=\frac{Pr(x<X\leqslant z)}{Pr(X>x)}\\&=\frac{s(x)-s(z)}{s(x)}\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

$$=1-\frac{s(z)}{s(x)}$$

一般地，新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，于年龄 y 岁与 $z(x \leqslant y < z)$ 岁之间死亡的条件概率是：

$$Pr(y < X \leqslant z \mid X > x) = \frac{Pr(y < X \leqslant z)}{Pr(X > x)} = \frac{s(y)-s(z)}{s(x)} \tag{1.2.3}$$

为叙述方便起见，我们引入符号(x)表示年龄为 x 岁的人，X 表示某新生婴儿的死亡年龄，则该新生婴儿在 x 岁活着的条件下，未来仍生存的时间(或生存期)是 $X-x$，那么，$X-x$ 称为该新生婴儿在 x 岁时的未来寿命，简称(x)的未来寿命(或未来余命)，并用符号 $T(x)$表示。即该新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，有 $T(x)=X-x$。

1.2.2 连续型未来寿命的生存分布

用概率来研究生存者的未来寿命 $T(x)$是精算学中的一项基本内容，而且还引用了一组国际通用的精算函数符号来描述随机变量 $T(x)$的概率分布。这些精算函数符号，在以后的章节中将陆续给予介绍。引入下列符号：

$${}_tq_x = Pr(T(x) \leqslant t) \quad (t \geqslant 0) \tag{1.2.4}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr(T(x) > t) \quad (t \geqslant 0) \tag{1.2.5}$$

符号${}_tq_x$ 描述为(x)将在未来 t 年内死亡的概率。${}_tq_x$ 是随机变量 $T(x)$的分布函数，而${}_tp_x$ 是关于 $T(x)$的生存函数，即表述(x)将在 $x+t$ 岁时仍生存的概率。

特别地，当 $x=0$ 时，$T(0)=X$，即 0 岁新生儿的未来寿命就是刚出生婴儿的死亡年龄，且，

$${}_xp_0 = s(x) \quad (x \geqslant 0) \tag{1.2.6}$$

当 $t=1$ 时，式(1.2.4)与式(1.2.5)所定义符号中的前缀允许省略，即${}_1q_x$ 与${}_1p_x$ 可简写为 q_x 与 p_x。q_x 表示(x)在未来一年内死亡的概率，p_x 表示(x)在 $x+1$ 岁时仍生存的概率。

另外，我们用精算函数符号${}_{t|\mu}q_x$ 表示(x)在生存 t 年后，在 $x+t$ 岁与 $x+t+\mu$ 岁之间死亡的概率，即：

$$\begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= Pr(t < T(x) \leqslant t+\mu) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+\mu}p_x \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $\mu=1$ 时，符号${}_{t|1}q_x$ 可简写成${}_{t|}q_x$。

下面，我们考察精算函数符号${}_tq_x$、${}_tp_x$、${}_{t|\mu}q_x$ 与生存函数 $s(x)$之间的关系。

由于(x)的未来寿命 $T(x)=X-x$，隐含着新生婴儿在 x 岁时仍生存这一前提条件，所以事件$\{T(x) \leqslant t\}$与事件$\{0 \leqslant X-x \leqslant t \mid X > x\}$是同一事件，从而 $T(x)$的分布函数为：

$${}_tq_x = Pr(T(x) \leqslant t) = Pr(x < X \leqslant x+t \mid X > x)$$

运用式(1.2.2)，并且 $z=x+t$，则：

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{1.2.8}$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

对于${}_{t|\mu}q_x$，运用式(1.2.7)、式(1.2.8)和式(1.2.9)，可得：

$$
\begin{aligned}
{}_{t|\mu}q_x &= Pr(t < T(x) \leqslant \mu + t) \\
&= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\
&= \frac{s(x+t) - s(x+t+\mu)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t) - s(x+t+\mu)}{s(x+t)} \\
&= {}_tp_x \cdot {}_\mu q_{x+t}
\end{aligned}
\tag{1.2.10}
$$

式(1.2.10)表明：(x)在$x+t$岁与$x+t+\mu$岁之间死亡的条件概率，等于(x)在$x+t$岁时仍生存的条件概率与$(x+t)$在以后的μ年内死亡的条件概率的乘积。

未来寿命$T(x)$的概率分布在人寿保险业务经营中具有重要的现实意义。这是因为死亡保险的保险金通常是在被保险人死亡时给付的，即死亡保险金是在被保险人于x岁投保后的$T(x)$处给付的。但是，在实际的业务运作过程中，从计算方法的角度来看其可操作性较差。为使这一现实性意义落到实处，我们有必要引入离散型未来寿命的概率分布。

1.2.3 离散型未来寿命的生存分布

设$K(x)$表示(x)未来寿命的周年数或(x)在未来生存的整年数，即$K(x)=[T(x)]$，即$K(x)$是$T(x)$的最大整数部分。例如，若$T(x)=34.25$，则$K(x)=34$；若$T(x)=35.98$，则$K(x)=35$。

根据$K(x)$的定义，则$K(x)$是取值于非负整数集上的一个随机变量，且对于任意非负整数k，$k \leqslant T(x) < k+1 \Leftrightarrow K(x)=k$，则随机变量$K(x)$的概率分布律可表示为：

$$Pr(K(x)=k) = Pr(k \leqslant T(x) < k+1) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

由于对连续型随机变量$T(x)$，有：

$$Pr(T(x)=k) = Pr(T(x)=k+1) = 0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

故随机变量$K(x)$的概率分布律又可表示为：

$$
\begin{aligned}
Pr(K(x)=k) &= Pr(k < T(x) \leqslant k+1) \\
&= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x \quad (k=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

在不易发生混淆的情况下，在以后的有关章节中，我们通常将符号$T(x)$简写成T，符号$K(x)$简写成K。

§1.3 死　力

上一节我们所讨论的问题是(x)将在某一段时间内死亡的有关精算函数。本节我们所讨论的问题是：(x)将在某一瞬间内死亡的变化情况，即死力。

1.3.1 死力的定义及性质

所谓死力，是指在到达 x 岁的人中，在一瞬间里死亡的人所占的比率。死力也称瞬间死亡率或死亡密度，通常在 x 岁时的死力用符号 μ_x 表示，其基本关系式是：

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{s(x) - s(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{s(x)}$$

$$= -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{1-F(x)} \tag{1.3.1}$$

死力也如同生存函数一样，可以用来确定随机变量 X 的分布。

由式(1.3.1)中可知 $\mu_x \geqslant 0$，将式(1.3.1)中的 x 改为 y，可得：

$$-\mu_y dy = \frac{ds(y)}{s(y)} = d[\ln s(y)]$$

对上式从 x 到 $x+t$ 进行积分，得：

$$-\int_x^{x+t} \mu_y dy = \int_x^{x+t} d[\ln s(y)]$$

$$= \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln({}_tp_x)$$

即
$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy\right) \tag{1.3.2}$$

或
$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \tag{1.3.3}$$

特别地，当 $x=0, t=x$ 时，式(1.3.3)转化为：

$$s(x) = {}_xp_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \tag{1.3.4}$$

从而随机变量 X 的分布函数与密度函数分别是：

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \tag{1.3.5}$$

和
$$f_X(x) = -s'(x) = \mu_x \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)$$

$$= {}_xp_0 \cdot \mu_x \tag{1.3.6}$$

$T(x)$的分布函数与密度函数分别是：

$$F_T(t) = 1 - {}_tp_x = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \tag{1.3.7}$$

和
$$f_T(t) = -\frac{d}{dt}({}_tp_x) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \quad (t \geqslant 0) \tag{1.3.8}$$

[例 1.3.1] 设死力 $\mu_x = \frac{1}{1+x}$，$x \geqslant 0$。

试求：(1)随机变量 X 的分布函数与密度函数；

(2)随机变量 $T(x)$的分布函数与密度函数；

(3) $Pr(10 < X \leqslant 30)$；

(4) ${}_{5|15}q_{20}$。

解：(1) $F_X(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{1+s} ds\right)$

$$= 1 - \exp(-\ln(1+x))$$

$$= \frac{x}{1+x} \quad (x \geqslant 0)$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (x \geqslant 0)$$

$$(2)\ F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{1+x+s} ds\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\ln \frac{1+x+t}{1+x}\right)$$

$$= \frac{t}{1+x+t} \quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

$$f_T = F'_T(t) = \frac{1+x}{(1+x+t)^2} \quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

$$(3)\ Pr(10 < X \leqslant 30) = F(30) - F(10)$$

$$= \frac{30}{1+30} - \frac{10}{1+10} \approx 0.05865$$

$$(4)\ {}_{5|5}q_{20} = \frac{s(25)-s(30)}{s(20)} = \frac{F(30)-F(25)}{1-F(20)}$$

$$\approx 0.13027$$

死力具有如下性质：

① 当 $x \geqslant 0$ 时，$\mu_x \geqslant 0$；

② 对于任意 $x \geqslant 0$,都有 $\int_x^{+\infty} \mu_s ds = +\infty$；

③ μ_x 是死力，则 $\int_0^{+\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = 1$。

证： 性质①、③显然成立。

至于性质②，由于 ${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$，且 $\lim_{t \to \infty} s(x+t) = 0$

故

$$\lim_{t \to \infty} {}_tp_x = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{s(x)} \cdot s(x+t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \ln {}_tp_x = -\infty$$

$$\int_x^{+\infty} \mu_s ds = \lim_{t \to \infty} \int_x^{x+t} \mu_s ds = \lim_{t \to \infty} (-\ln {}_tp_x) = +\infty$$

死力 μ_x 的一般图形如图 1－2 所示。

在精算学中，μ_x 称为死力；但在部件及系统的可靠性理论中，μ_x 又称为失效率或故障率。因此，μ_x 在理论研究中是一个很重要的函数。

本节关于死力 μ_x 与分布函数 $F(x)$、密度函数 $f(x)$、生存函数 $s(x)$之间的关系，可归纳为表 1－1。

从表 1－1 中可以看出，对于四个函数 $F(x)$、$f(x)$、$s(x)$、μ_x，只要已知其中的一个函数，就可以求出其中的另外三个函数。

1.3.2 死力的若干解析形式

下面,我们介绍四种常见的死力解析形式。解析式的名称都是以创建者的名字来命名的。