21世纪高等院校十一五规划教材

常微分方程

（下）

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

主　编　杨金林
　　　　李东平

内蒙古大学出版社

21世纪高等院校十一五规划教材

常微分方程（下）

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

杨金林　李东平　主编

杨金林　李东平　张炳成
白晓东　丁立刚　陈向华　编著

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程.下册/杨金林,李东平主编.—呼和浩特:内蒙古大学出版社,2006.7

ISBN 7-81074-974-9

Ⅰ.常… Ⅱ.①杨… ②李… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第076592号

常　微　分　方　程(下)

杨金林　李东平　主编

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古军区印刷厂印刷

开本:850×1168/32　印张:8.5　字数:213千

2006年7月第1版第1次印刷

ISBN　7-81074-974-9/O·57

全二册　定价:25.00元

(上册:14元;下册:11元)

序

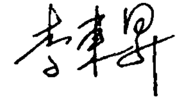
内蒙古自治区的高等教育事业起步于20世纪50年代初。经过近50年的发展,我区的高等教育无论从规模上,还是质量上都取得了长足的发展。特别是近些年来,全区高等院校的招生数量成倍增长,部分院校的合并使得一些高校的办学规模迅速壮大,形成了几所万人大学。与此同时,各高校对各自的专业及课程设置都做了较大的调整,以适应当今日益发展变化的高等教育事业。面向21世纪,在科学技术日新月异,社会对人才的知识结构、层次要求越来越高的新形势下,我们的高等教育的教学水平,特别是教材建设都应有一个更新更高的要求。

回顾50年来的发展,虽然我区高等教育的教学科研水平有了较大的提高,但与之相应的教材建设的现状还不尽如人意,绝大多数主干课程的教材还沿用一些传统教材,有些甚至是20世纪七八十年代的版本。有些院校的教材选用则有一定的随机性,在几种版本的教材之中换来换去。其间,虽然部分院校也组织力量编写了一些基础课及专业课教材,但大都是各成体系,缺乏院校间的协作与交流,形不成规模,质量亦无法保证,常常滞后于学科的发展与课程的变化。这都与我区高等教育的发展极不协调。诚然,区外部分地区高校的教学科研水平比我区要高,一些教材的质量好,我们可以直接利用,但这并不能成为我们不搞教材建设的理由。好的教材还需要相应的教育资源条件与之相对应才能取得良好的教学效果,从而达到促进教学质量提高之目的。应当承认,由于经济发展的相对落后,我区高校所招学生的基础和学校的教学条件比起全国重点名牌大学相对要差一些。因而,我们高校的教材也

应从实际出发，结合自己学校和学生的特点，逐步探索、建立一套适合自治区教育资源条件的教材体系，促进自治区高校教学科研水平的提高，多出人才，出好人才。

值得欣喜的是，随着自治区教育科学水平的提高，我区高校教育领域的一些有识之士逐渐认识到，面向21世纪，未来高校之间的竞争就是学校的产品——学生质量的竞争。要想培养出高水平、高素质的学生，使我区的高校在这种竞争中立于不败之地，除各高校应努力提高自身的教学组织管理水平、提高教师的素质外，还应积极主动地加强与区内外高校的协作、交流，取长补短，走联合发展的道路，使我区高等教育的整体水平能够在较短的时间内得到提高。为此，在有利于规范高校教材体系，促进高校教育质量的提高，加强各高校教学科研人员之间的协作与交流的原则下，由自治区教育厅牵头，内蒙古大学出版社组办、资助，联合全区高等院校的有关专家、学者共同组建成立一些相关专业的教材编委会，以求编写适合我区高等教育特点的教材，逐步建立、完善自治区高等教育的教学、教材体系，并开展一些与教学相关的科研工作。我们希望，通过教材编委会这种工作模式，建设一批高质量的教材，带出一支高水平的师资队伍，培养出大批高素质的人才。

我坚信，在自治区教育厅的指导下，在编委会各位专家、学者的辛勤工作下，在各院校的相互理解、相互协作、相互支持下，我们一定能够克服发展过程中的困难，逐步推出一批高质量、高水平的教材，为推进内蒙古自治区高等教育事业做出重要的贡献。



2002年3月19日

前　　言

自20世纪90年代后期开始,我国高等教育的改革步伐日益加快。特别是1999年以来,各地高校开始大幅度地扩大招生规模,大学教育逐步由“精英教育”向“大众教育”过渡。随着招生规模的扩大,学生情况出现了新的变化,为此,我们的教材建设也要适应这种教育形势的变化。

“常微分方程”历来是数学系各个专业的专业基础课,系统扎实地掌握好它的基本理论和方法,无疑对进一步学好后续课程是十分必要的。但是,在目前的教学实践中遇到了一些新的情况:一方面,经历大规模扩招后,重点院校和普通院校的学生的差距不断增大,甚至在同一所学校的学生也有着明显的差距,这就要求我们建立分层次,多形式地培养模式,而且每个培养模式应该有不同的教学要求,所以,教材的内容也应该为教师提供多一些的选择,为学生提供多一点自我学习的空间;另一方面,有关计算机的基本知识及其应用的课程逐渐成为数学本科生的必修课,例如“数学建模”、“数学实验”以及计算机的其它应用课程等等,使得原有的必修课或者改为选修课或者减少课时(例如“常微分方程”),再加上数学本学科不断地发展,教学内容的更新,因此,有必要对原有教材的内容进行调整和改编,以适应新的变化和要求,保证益于学生系统而扎实地掌握本课程的基本理论和方法。由于目前本学科现有的大多数教材或起点过高,或内容陈旧,已不适应大多数普通院校的教学需求,很有必要编写一部适应面较广的教材。这就是我们编写这套教材的基本指导思想。

基于以上想法,本教材在保证“常微分方程”基本内容的前提

下，力求通俗易懂，选例丰富，同时尽可能体现本学科在新领域的应用。在教材中，我们把解的存在唯一性定理等一般理论放到第五章介绍，这样做的目的是为避免学生一开始就接触较为抽象而繁难的理论。在学习了前四章的内容之后，由于有了较多的相关知识，从而也就更易于掌握这一知识。在习题的选择上，力求层次分明，以利于不同的教学需要。其中A组题作为基本练习，B组题供教学参考和学有余力的学生参考。

根据教学的需求，本教材下册每章的内容分为内容提要、例题分析和习题解答三部分。在题解中除了选编较多的计算题外，还编写了一定数量的证明题和应用题。其目的是让读者通过各种类型习题的练习，加深对本课程基本理论的理解，掌握解题的技巧和方法，从而提高解决实际问题的能力。由于解题的思路和方法是多种多样的，解法也不是唯一的，所以在题解中，我们只是为每道习题提供了一种求解的参考方法。

《常微分方程（上册）》由陈向华、白晓东主编，并负责全书的统稿和审定。李东平编写第一章；陈向华编写第二章和第六章；张炳成编写第三章的第6节；杨金林编写第三章的第7节；白晓东编写第四章和第五章；丁立刚编写第三章的1，2，3，4，5节和第七章。

《常微分方程（下册）》由杨金林、李东平主编，并负责统稿和审定。杨金林编写第一章和第二章；李东平编写第三章；张炳成编写第四章和第七章；白晓东编写第五章的1，3，4节；丁立刚编写第五章第2节；陈向华编写第六章。

本教材编写过程中参考的有关书籍在此就不一一列出了。

虽然作者有多年“常微分方程”的教学经验，但书中一定还存在一些疏漏和错误，希望广大读者提出批评和指正，我们将不胜感谢！

作者

2005年12月

目　录

第一章　绪　论

内容提要

本章的内容主要介绍了常微分方程的一些最初步的知识，包括常微分方程的基本概念，微分方程的定解问题的提法，通解与特解，积分曲线等．掌握这些基本概念，对于微分方程的理解和应用是非常重要的．

微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践和科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题和解决问题的一个强有力的工具．本章通过一些具体的实例，叙述了对于几何问题，我们建立微分方程时要熟练掌握导数、微分的几何意义，以及在分析学中熟知的用导数、微分来表达的许多其他几何概念及它们之间的关系等；对于其他学科问题，首先要求掌握导数是各种意义下的瞬时变化率这一物理意义，然后把这个概念用到新问题所属学科的某种相关联的定律中去，最后列出我们所要的方程来．

例题分析

例1　证明　$y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在区间$(-1,1)$内是方程

$$y'+2xy^2=0$$

的一个解，但任何包含 -1 或 1 点的区间不是它的定义区间．

证明　当 $x \in (-1,1)$ 时,$y = \frac{1}{x^2-1}$ 及其导数 $y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$ 都是具有明确定义的函数,将这些函数代入此微分方程,得

$$y' + 2xy^2 = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} + 2x\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 \equiv 0$$

所以,$y = \frac{1}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内是该方程的一个解. 因为 $\frac{1}{x^2-1}$ 当 $x = \pm 1$ 时无意义,所以包含 1 或 -1 点的任意区间都不是解的定义区间.

例 2　求边值问题

$$y'' + 4y = 0, y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

的解,已知其通解为 $y(x) = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$

解　将边界条件 $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ 代入通解中,得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组,得

$$C_1 = -C_2 = \sqrt{3} + 1$$

将其代入 $y(x)$,得

$$y(x) = (\sqrt{3} + 1)(\sin 2x - \cos 2x)$$

即为此边值问题的解.

例 3　设一曲线有如下性质:曲线上各点处的切线,切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形(以 x 轴为底)且通过点

(1,2),求该曲线的方程满足的微分方程及定解条件.

解　如图,设曲线方程为 $y=y(x)$,$A(x,y)$ 为所求曲线上任意一点,则过 A 点的切线方程为

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)$$

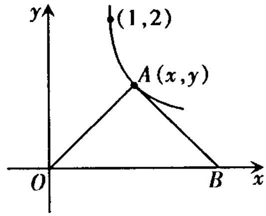


图 1-1

所以 B 点的坐标为

$(x-\frac{1}{y'}y,0)$,由题意知

$$|AO|=|AB|$$

所以

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\frac{y}{y'})^2+y^2}\\ y(1)=2\end{cases}$$

即为所求的曲线方程所满足的微分方程及定解条件.

例4　一质点在重力作用下沿某曲线无磨擦地滑动,在水平方向上成等速运动,试求曲线的方程所满足的微分方程.

解　如图所示选取坐标系,设曲线的方程为 $y=y(x)$. 物体由 A 运动到 B,根据能量守恒定律有

$$\frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2=mgx$$

即
$$(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2=2gx$$

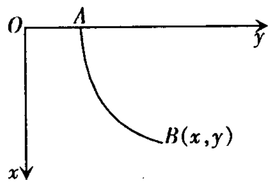


图 1-2

而将 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 代入上式得

$$(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y})^2\cdot(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2=2gx \tag{1}$$

由已知,物体在水平方向成等速运动,即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a$($a$ 为常数). 而且

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}$$

将其代入(1) 式得

$$a^2[1 + (\frac{dx}{dy})^2] = 2gx$$

此即为所求的微分方程.

例 5 画出方程

$$y' = -\frac{2y}{x}$$

的广义线素场,并近似画出它的积分曲线族.

解 显然,原点是唯一的奇点,除原点外,过平面上其它点的积分曲线是存在且唯一的. 作等斜线

$$-\frac{2y}{x} = k$$

即 $$y = -\frac{k}{2}x$$

它们是过原点的直线束,

线素场如图

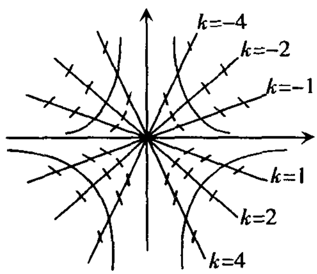


图 1-3

$y = 0, x = 0$ 皆是积分曲线,且直线 $x = 0, y = 0$ 把 xOy 平面分为四个象限,故积分曲线有四个分支.

在第一象限,$y' < 0, y'' > 0$,此时积分曲线皆下降且呈凸形;

在第二象限,$y' > 0, y'' > 0$,此时积分曲线皆上升且呈凸形;

在第三象限,$y' < 0, y'' < 0$,此时积分曲线皆下降且呈凹形;

在第四象限,$y' > 0, y'' < 0$,此时积分曲线皆上升且呈凹形;

综上所述,可作出积分曲线族的图形,如图中粗线所示.

习题解答

习题 1.1　A 组

1. (1) 一阶线性；　(2) 二阶非线性；

   (3) 一阶非线性；(4) n 阶非线性；

   (5) 四阶非线性；(6) 二阶非线性.

2. (1) 是；(2) 是；(3) 不是；(4) 是；(5) 不是.

3. 解(1) 设 $y'' = x^2 - 1$　　(1)

对方程(1) 两端积分，得

$$y' = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \tag{2}$$

再积分一次，得

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \tag{3}$$

故方程的通解为

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

(2) 将 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 分别代入(2)，(3) 两式，得

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 2x + 1$$

(3) 将 $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=2} = 1$ 分别代入(2)，(3) 两式，得

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{25}{12}$$

B 组

1. $y = -4\cos x$

2. (1) $r = -4, 1$；(2) $r = -2, \frac{1}{2}, 1$.

3. 证明：当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$，将其代入微分方程，得

$$xy'' + y' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} \equiv 0$$

所以，$y = \ln x$ 是该方程在区间 $(0, +\infty)$ 上的一个解. 因为负数及零的对数无意义，所以区间 $(-\infty, +\infty)$ 不是解的定义区间.

习题 1.2　A 组

1. (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$；

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y + x\tan\alpha}{x - y\tan\alpha}$；

(3) $\left|(y - xy')\left(x - \frac{y}{y'}\right)\right| = 2a^2$；

(4) $xy' + y = 0$

2. 解 (1) $y = \sin(x + c)$　　(1)

对 x 求导，得

$$y' = \cos(x + c) \tag{2}$$

取 (1)、(2) 的平方和，得

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

此即为曲线族 (1) 所满足的微分方程.

(2)　$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$　　(3)

两边对 x 求导，得

$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \tag{4}$$

(4) 式两边再对 x 求导，得

$$2 + 2(y - b)y'' + 2(y')^2 = 0 \tag{5}$$

由 (5) 得

$$y - b = -\frac{(y')^2 + 1}{y''} \tag{6}$$

由(4)得

$$x - a = \frac{y'[(y')^2 + 1]}{y''} \tag{7}$$

将(6)、(7)代入(3)得

$$\frac{(y')^2[(y')^2 + 1]^2}{(y'')^2} + \frac{[(y')^2 + 1]^2}{(y'')^2} = 1$$

整理得

$$[(y')^2 + 1]^2[(y')^2 + 1] = (y'')^2$$

即有

$$(y'')^2 = [(y')^2 + 1]^3$$

此即为曲线族(3)所满足的微分方程.

B 组

1. 解　以 O 点为极点建立极坐标系,在极坐标系下设曲线的方程为 $\rho = \rho(\theta)$. P、Q 两点的坐标分别为 $(\rho(\theta),\theta)$,$(\rho(\theta_1),\theta_1)$. 由题意得

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = k((\rho(\theta) - \rho(\theta_1))\quad (k\text{ 为比例常数})$$

两边对 θ 求导,得

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = k\rho'$$

即

$$(\rho')^2(k^2 - 1) = \rho^2$$

所以

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{\rho}{\sqrt{k^2 - 1}}\text{ 为所求的方程.}$$

2. 解　设质点的运动规律为 $x = x(t)$,其中 t 表示时间,x 表